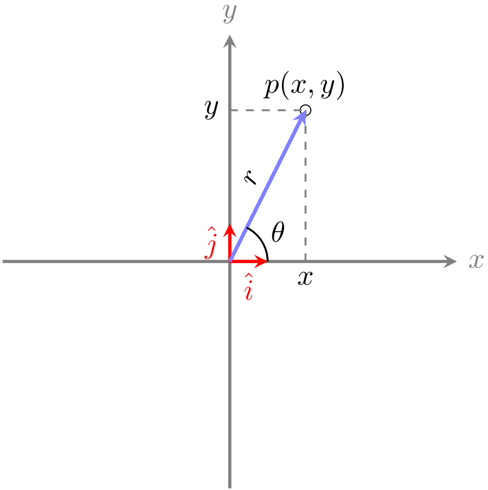
# فیزیک ۲
## دستگاه مختصات قطبی

محمدرضا مظفری

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

بهمن ۱۴۰۰

# بردارهای یکه




بردار یکه

$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = 1, \quad \hat{i}\cdot\hat{j} = 0$$

بردار مکان

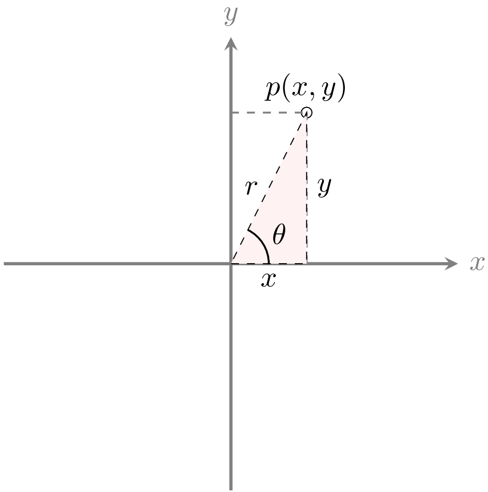
$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

اندازه

$$r = |\vec{r}|$$

$$r = \sqrt{\vec{r}\cdot\vec{r}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

# بردارهای یکه




بردار یکه

$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = 1, \quad \hat{i}\cdot\hat{j} = 0$$

بردار مکان

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

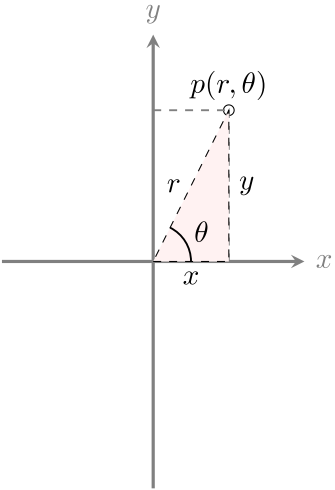
اندازه

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

جهت

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

# بردارهای یکه




اندازه و جهت

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

بردار مکان

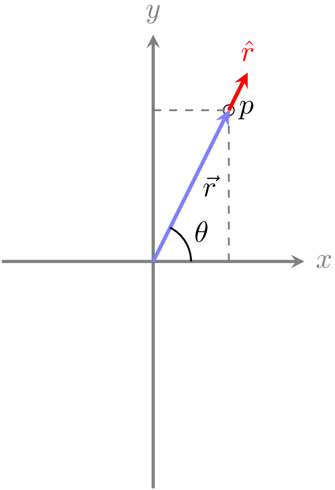
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y$$

$$\vec{r} = \hat{i}r\cos\theta + \hat{j}r\sin\theta$$

$$\vec{r} = r(\hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta)$$

# بردارهای یکه




اندازه و جهت

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

بردار مکان

$$\vec{r} = r(\hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta)$$

$$\vec{r} = r\hat{r} \Rightarrow \hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\boxed{\hat{r} = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta}$$

$$|\hat{r}| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$$

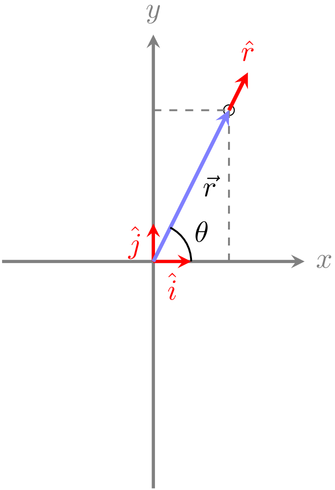
# بردارهای یکه

بردار مکان

$$\vec{r} = r\hat{r}, \quad |\hat{r}| = 1$$

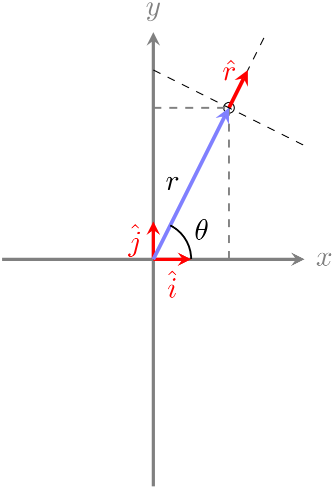
بردار یکه

$$\hat{r} = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta$$




- بطور کلی برای هر دستگاه مختصات دوبعدی دو بردار یکه وجود دارد. برای مثال، $\hat{i}$ و $\hat{j}$ ، در دستگاه مختصات دکارتی در دو بعد بردارهای یکه می‌باشند.
- به همین ترتیب برای دستگاه مختصات قطبی، علاوه بر بردار یکه $\hat{r}$، نیاز به یک بردار یکه دیگر نیز می‌باشد.

# بردارهای یکه




بردار مکان

$$\vec{r} = r\hat{r}, \quad |\hat{r}| = 1$$

بردار یکه

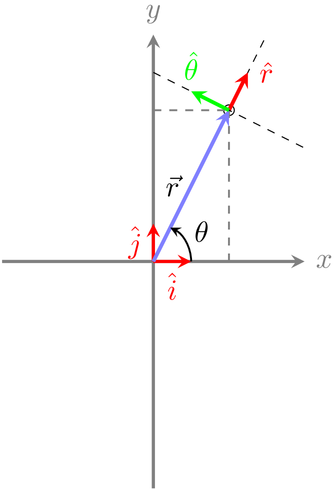
$$\hat{r} = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta$$

- بردارهای یکه بر یکدیگر عمود هستند. برای مثال در دستگاه مختصات دکارتی، بردارهای یکه $\hat{i}$ و $\hat{j}$ بر یکدیگر عمودند.

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = 0$$

- به همین ترتیب برای دستگاه مختصات قطبی، بردار یکه‌ای وجود دارد که بر بردار یکه $\hat{r}$ عمود است.

# بردارهای یکه




بردار مکان

$$\vec{r} = r\hat{r}, \quad |\hat{r}| = 1$$

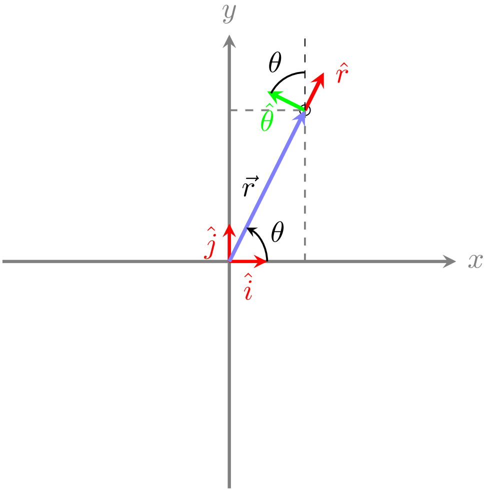
بردار یکه

$$\hat{r} = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta$$

- بردارهای یکه در امتداد مثبت تغییرات مختصات هستند. برای مثال در دستگاه مختصات دکارتی، بردار یکه $\hat{i}$ در امتداد مثبت تغییرات محور $x$ است و بردار یکه $\hat{j}$ در امتداد مثبت تغییرات محور $y$ است.

- در دستگاه مختصات قطبی، $\hat{r}$ در امتداد مثبت تغییرات بردار $\vec{r}$ است.

# بردارهای یکه




بردار مکان

$$\vec{r} = r\hat{r}, \quad |\hat{r}| = 1$$

بردار یکه

$$\hat{r} = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta$$

$$\hat{\theta} = -\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta$$

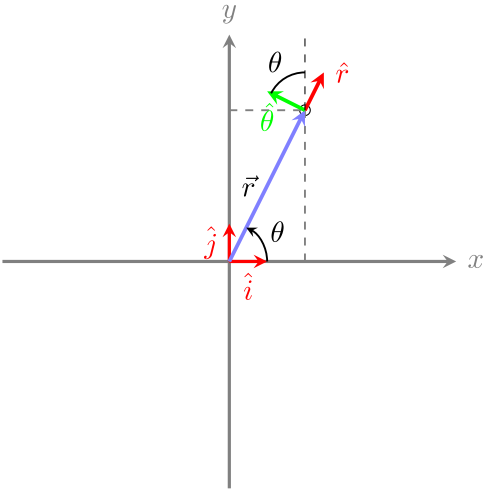
$$|\hat{\theta}| = 1$$

$$\sqrt{(-\sin\theta)^2 + \cos^2\theta} = 1$$

$$\hat{r}\cdot\hat{\theta} = 0$$

$$\cos\theta(-\sin\theta) + \cos\theta\sin\theta = 0$$

# بردارهای یکه




<u>بردار مکان</u>

$$\vec{r} = r\hat{r}, \quad |\hat{r}| = 1$$

<u>بردار یکه</u>

$$\hat{r} = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta, \ |\hat{r}| = 1$$

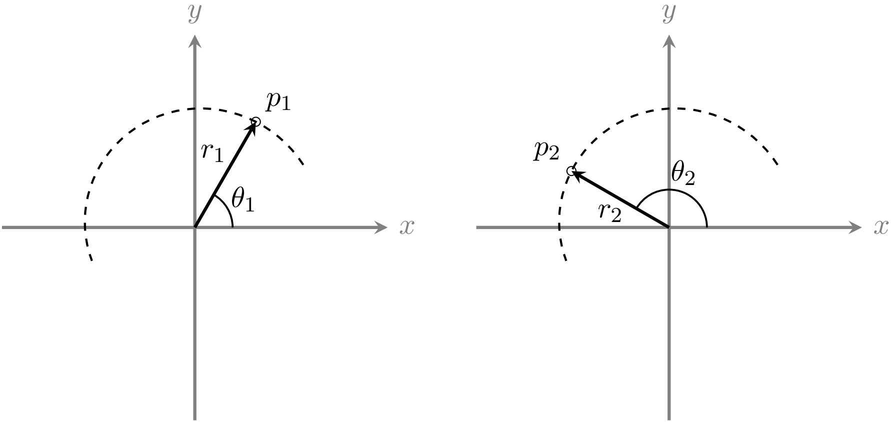
$$\hat{\theta} = -\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta, \ |\hat{\theta}| = 1$$

$$\hat{r}\cdot\hat{\theta} = 0$$

$$\hat{r}\times\hat{\theta} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

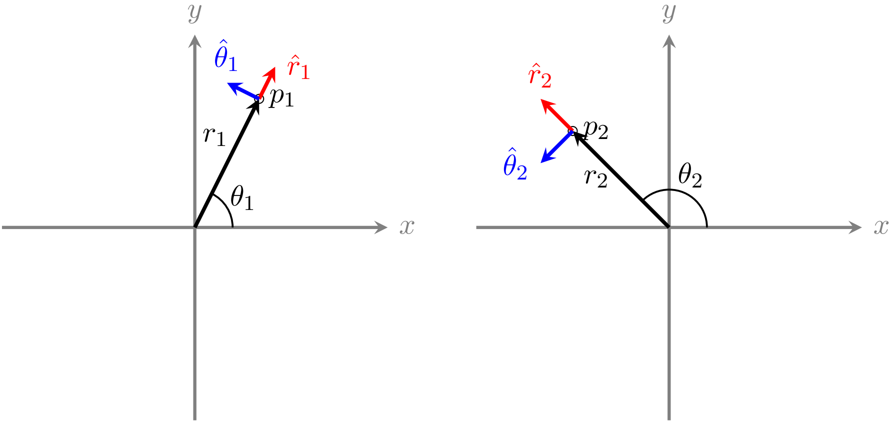
$$\hat{r}\times\hat{\theta} = \hat{k}$$

# بردارهای یکه




$$r=r(t),\ \theta=\theta(t):\quad \begin{cases} p_1: r_1=r(t_1),\ \theta_1=\theta(t_1)\\ p_2: r_2=r(t_2),\ \theta_2=\theta(t_2)\end{cases}$$

# بردارهای یکه




$$r = r(t),\ \theta = \theta(t): \quad \begin{cases} p_1 : r_1 = r(t_1),\ \theta_1 = \theta(t_1),\ \hat{r}_1 = \hat{r}(\theta_1),\ \hat{\theta}_1 = \hat{\theta}(\theta_1) \\ p_2 : r_2 = r(t_2),\ \theta_2 = \theta(t_2),\ \hat{r}_2 = \hat{r}(\theta_2),\ \hat{\theta}_2 = \hat{\theta}(\theta_2) \end{cases}$$

# بردارهای سرعت و شتاب

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \hat{r} = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}, \quad \hat{\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j} = \hat{\theta}$$

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\hat{r})$$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\hat{r} + r\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t}$$

قاعده‌ی زنجیری

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\hat{r} + r\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\hat{r} + r\hat{\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

اگر

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}, \quad \dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}}$$

# بردارهای سرعت و شتاب

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \hat{r} = \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}, \quad \hat{\theta} = -\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}$$

$$\vec{v} = v_r\hat{r} + v_\theta\hat{\theta}$$

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r\dot{\theta} \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{r}\hat{r}\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r\dot{\theta}\hat{\theta}\right)$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}t}\hat{r} + \dot{r}\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}t}$$

قاعده زنجیری

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}t}\hat{r} + \dot{r}\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

اگر

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}, \quad \dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$\ddot{r} = \frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}t}, \quad \dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \hat{r} = \cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j}, \quad \hat{\theta} = -\sin\theta \hat{i} + \cos\theta \hat{j}$$

$$\vec{a} = \frac{d\dot{r}}{dt}\hat{r} + \dot{r}\frac{d\hat{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{dr}{dt}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\frac{d\dot{\theta}}{dt}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\frac{d\hat{\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\frac{d\hat{r}}{d\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}^2\frac{d\hat{\theta}}{d\theta}$$

اگر

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt}, \quad \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt}, \quad \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d\hat{r}}{d\theta} = -\sin\theta \hat{i} + \cos\theta \hat{j} = \hat{\theta}$$

$$\frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\cos\theta \hat{i} - \sin\theta \hat{j} = -\hat{r}$$

# بردارهای سرعت و شتاب

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \hat{r} = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}, \quad \hat{\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}\theta}$$

$$+ \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}^2\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}\theta}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j} = \hat{\theta}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}\theta} = -\cos\theta\hat{i} - \sin\theta\hat{j} = -\hat{r}$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$+ \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} - r\dot{\theta}^2\hat{r}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} \\ &\quad + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}\end{aligned}}$$

$$\vec{a} = a_r\hat{r} + a_\theta\hat{\theta}$$

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{cases}$$

## بردارهای سرعت و شتاب

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t)$$

$$\hat{r} = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}, \quad \hat{\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j} = \hat{\theta}, \quad \frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}\theta} = -\cos\theta\hat{i} - \sin\theta\hat{j} = -\hat{r}$$

<u>بطور خلاصه</u>

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t)$$

$$\hat{r} = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}$$

$$\hat{\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}$$

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}$$

حالتهای خاص ۱-حرکت بر مسیر دایره‌ای با شعاع ثابت $R$

$$r = R, \quad \theta = \theta(t)$$

$$\vec{r} = R\hat{r}$$

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\hat{r} + R\ddot{\theta}\hat{\theta}$$

## بردارهای سرعت و شتاب

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t)$$

$$\hat{r} = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}, \quad \hat{\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j} = \hat{\theta}, \quad \frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}\theta} = -\cos\theta\hat{i} - \sin\theta\hat{j} = -\hat{r}$$

حالتهای خاص ۲-حرکت بر مسیر دایره‌ای با شعاع ثابت $R$ و سرعت زاویه‌ای ثابت $\omega$

$$r = R, \quad \theta = \omega t + \theta_0$$

$$\vec{r} = R\hat{r}$$

$$\vec{v} = R\omega\hat{\theta}$$

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\hat{r}$$

سرعت مماسی و شتاب شعاعی

<u>بطور خلاصه</u>

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t)$$

$$\hat{r} = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}$$

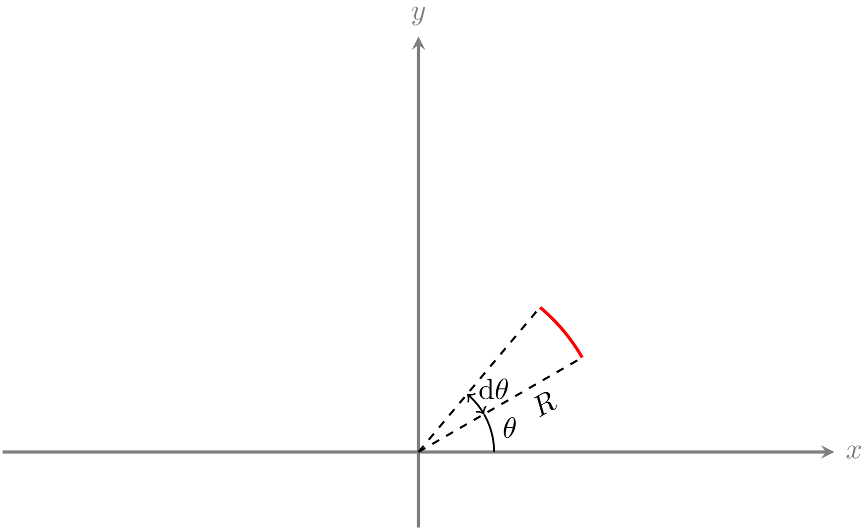
$$\hat{\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}$$

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

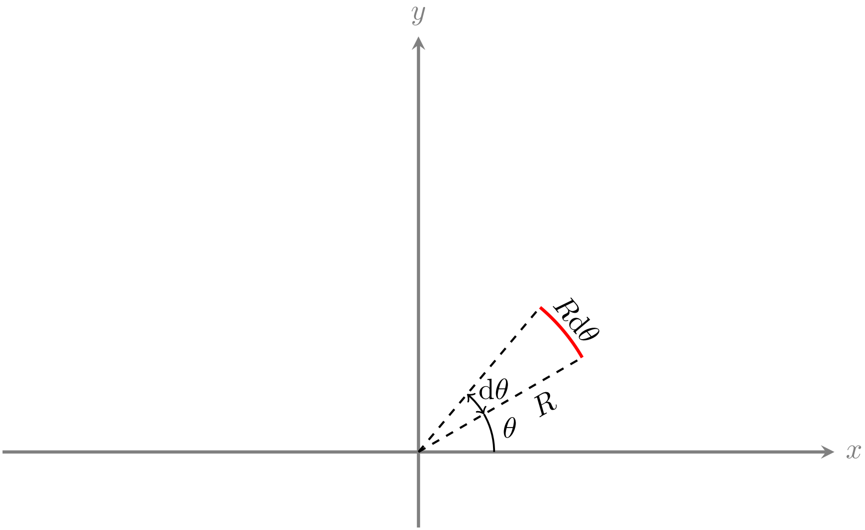
$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}$$

# انتگرالگیری یک‌بعدی

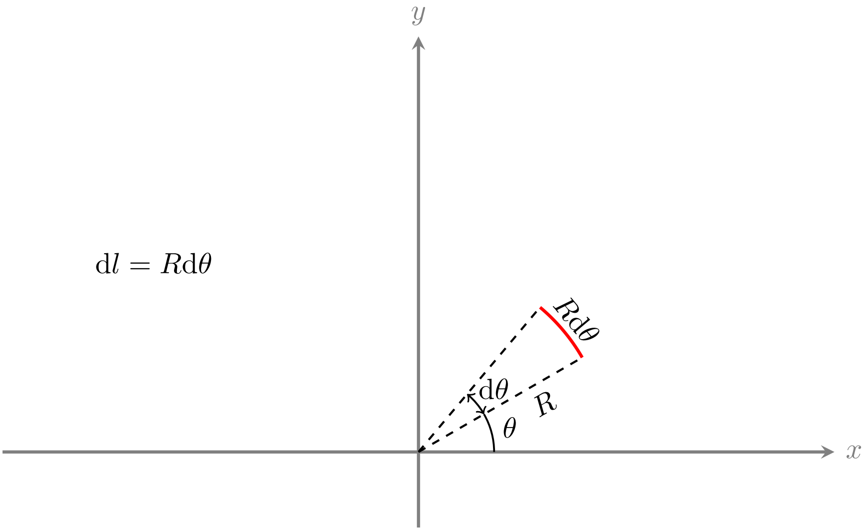


# انتگرالگیری یک‌بعدی

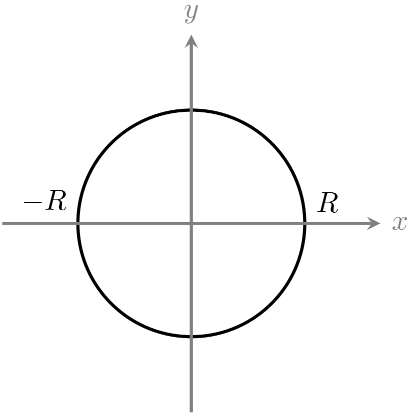


# انتگرالگیری یک‌بعدی

$$\mathrm{d}l = R\mathrm{d}\theta$$



# انتگرالگیری یک‌بعدی




$$\mathrm{d}l = R\mathrm{d}\theta$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

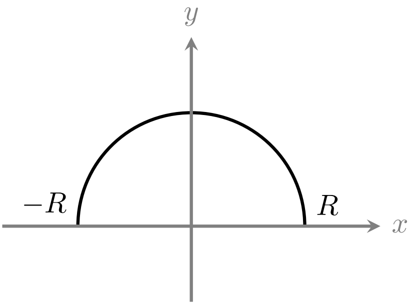
$$l = \int_0^{2\pi} R\mathrm{d}\theta$$

$$l = R\left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\right)$$

$$l = R\left([\theta]_0^{2\pi}\right)$$

$$l = R \times 2\pi = 2\pi R$$

# انتگرالگیری یک‌بعدی




$$\mathrm{d}l = R\mathrm{d}\theta$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

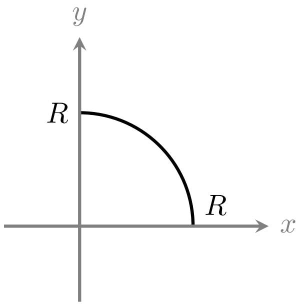
$$l = \int_0^\pi R\mathrm{d}\theta$$

$$l = R\left(\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\right)$$

$$l = R\left([\theta]_0^\pi\right)$$

$$l = R \times \pi = \pi R$$

# انتگرالگیری یک‌بعدی




$$\mathrm{d}l = R\mathrm{d}\theta$$

$$0 \leq \theta \leq \pi/2$$

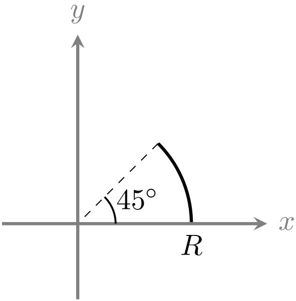
$$l = \int_0^{\pi/2} R\mathrm{d}\theta$$

$$l = R\left(\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta\right)$$

$$l = R\left([\theta]_0^{\pi/2}\right)$$

$$l = R \times \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\pi R$$

# انتگرالگیری یک‌بعدی




$$\mathrm{d}l = R\mathrm{d}\theta$$

$$0 \leq \theta \leq \pi/4$$

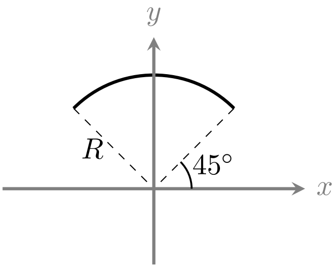
$$l = \int_0^{\pi/4} R\mathrm{d}\theta$$

$$l = R\left(\int_0^{\pi/4} \mathrm{d}\theta\right)$$

$$l = R\left([\theta]_0^{\pi/4}\right)$$

$$l = R \times \frac{\pi}{4} = \frac{1}{4}\pi R$$

# انتگرالگیری یک‌بعدی




$$\mathrm{d}l = R\mathrm{d}\theta$$

$$\pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4$$

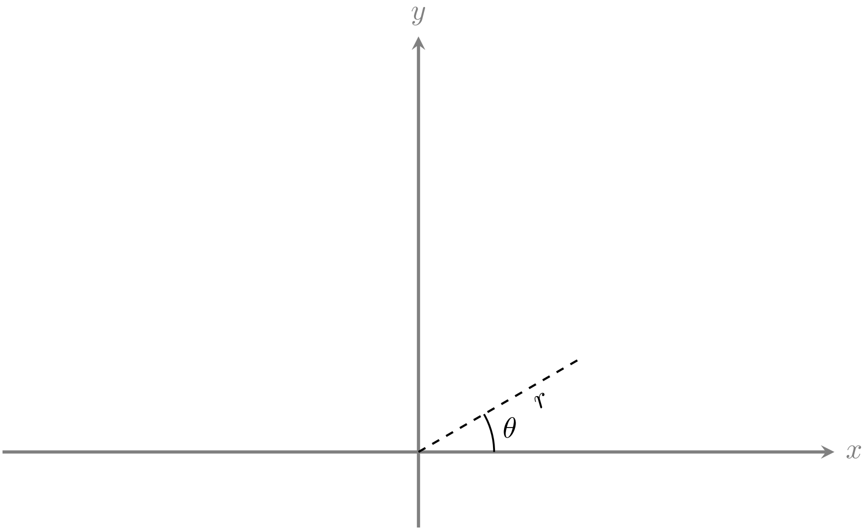
$$l = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} R\mathrm{d}\theta$$

$$l = R\left(\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \mathrm{d}\theta\right)$$

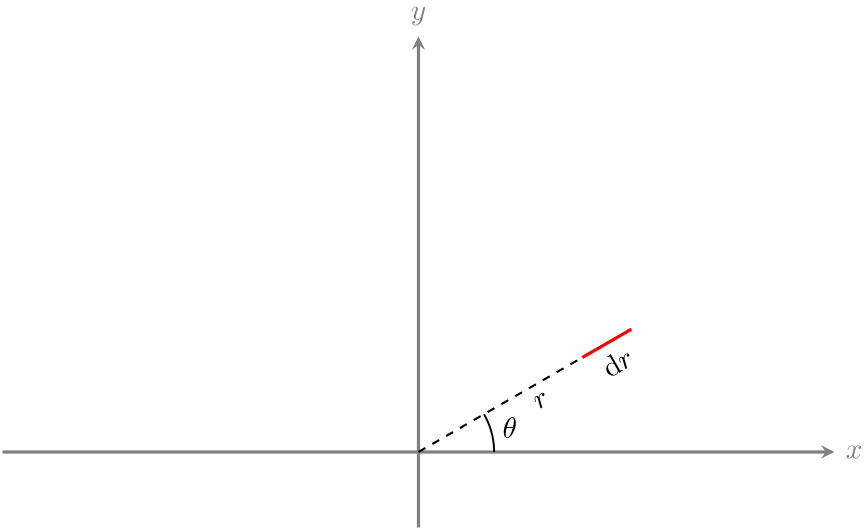
$$l = R\left([\theta]_{\pi/4}^{3\pi/4}\right)$$

$$l = R \times \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\pi R$$

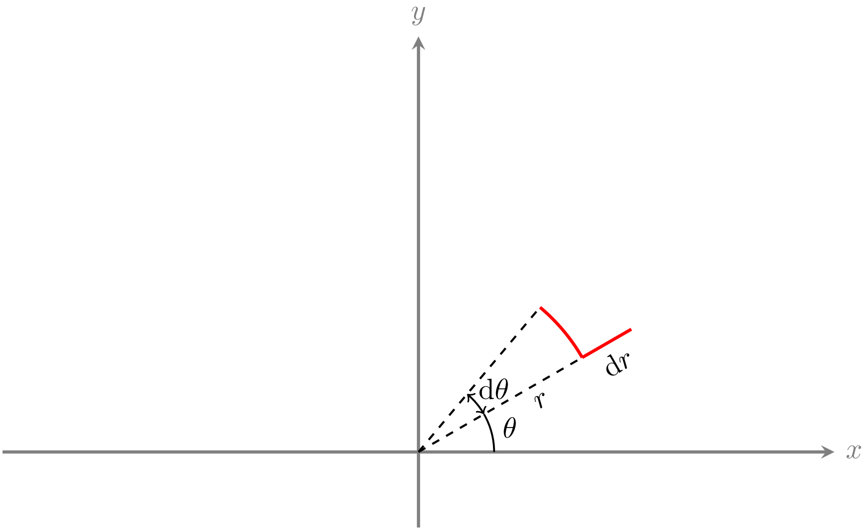
# انتگرالگیری دوبعدی



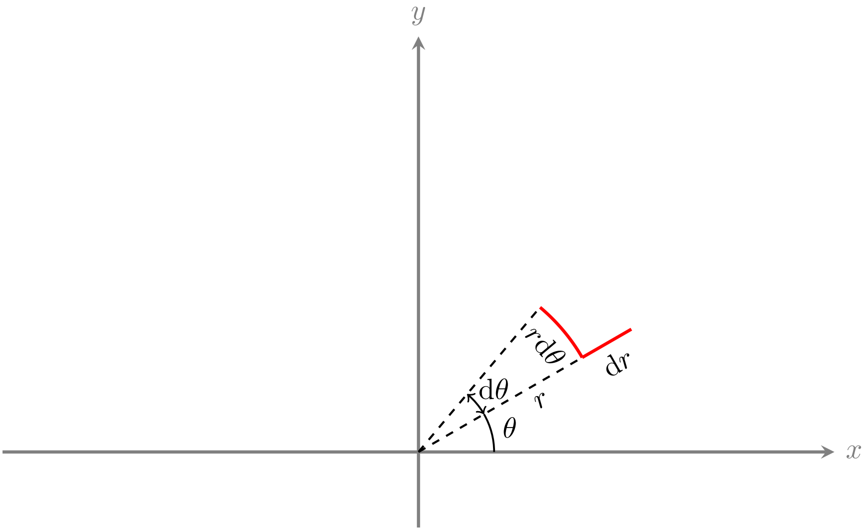
# انتگرالگیری دوبعدی



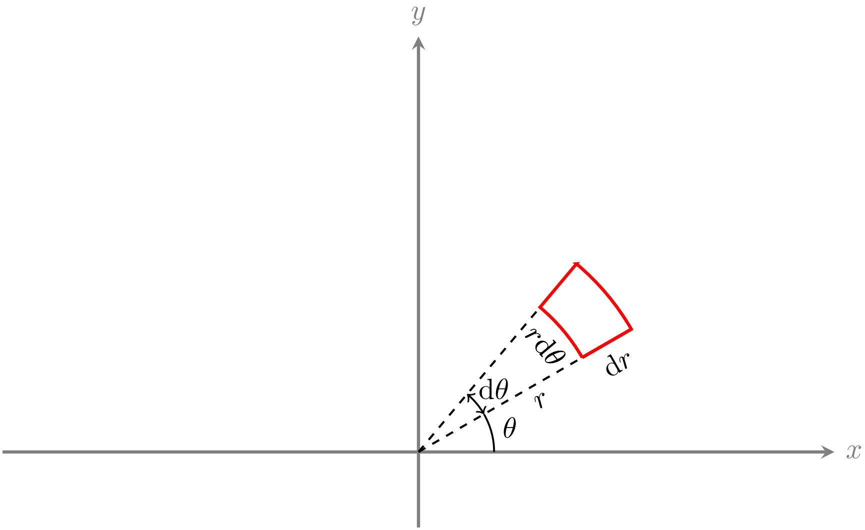
# انتگرالگیری دوبعدی



# انتگرالگیری دوبعدی

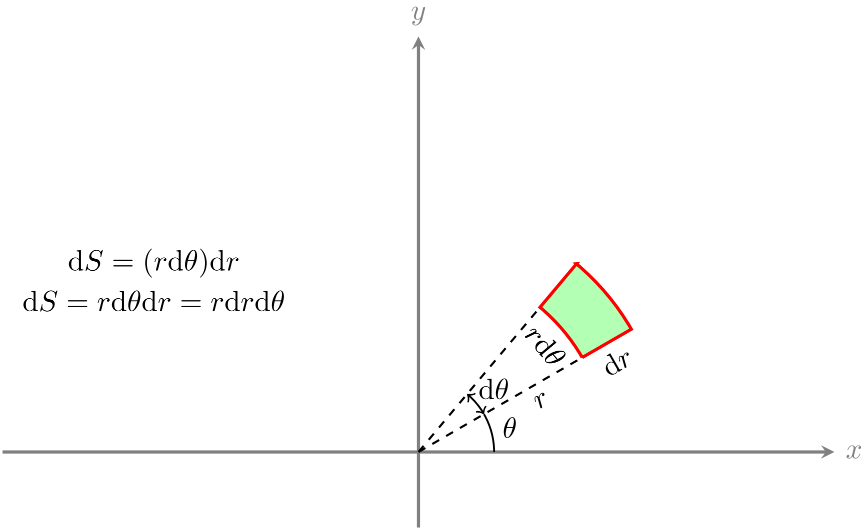


# انتگرالگیری دوبعدی

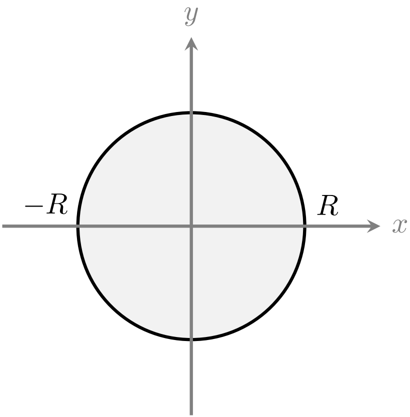


## انتگرالگیری دوبعدی

$$\mathrm{d}S = (r\mathrm{d}\theta)\mathrm{d}r$$
$$\mathrm{d}S = r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$



# انتگرالگیری دوبعدی




$$\mathrm{d}S = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$0 \leq r \leq R$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

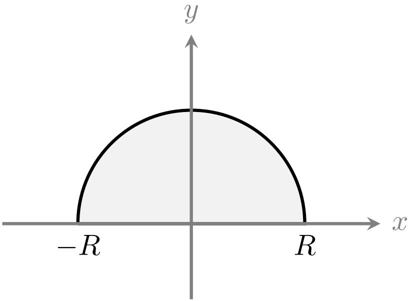
$$S = \int_0^R \int_0^{2\pi} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$S = \left(\int_0^R r\mathrm{d}r\right)\left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\right)$$

$$S = \left(\left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^R\right)\left([\theta]_0^{2\pi}\right)$$

$$S = \frac{1}{2}R^2 \times 2\pi = \pi R^2$$

# انتگرالگیری دوبعدی




$$\mathrm{d}S = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$0 \leq r \leq R$$

$$\boxed{0 \leq \theta \leq \pi}$$

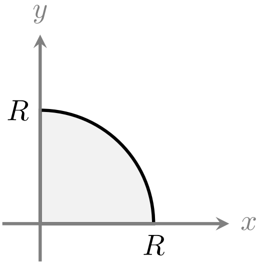
$$S = \int_0^R \int_0^\pi r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$S = \left( \int_0^R r\mathrm{d}r \right) \left( \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \right)$$

$$S = \left( \left[ \frac{1}{2} r^2 \right]_0^R \right) \left( [\theta]_0^\pi \right)$$

$$S = \frac{1}{2} R^2 \times \pi = \frac{1}{2} \pi R^2$$

# انتگرالگیری دوبعدی




$$\mathrm{d}S = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$0 \leq r \leq R$$

$$\boxed{0 \leq \theta \leq \pi/2}$$

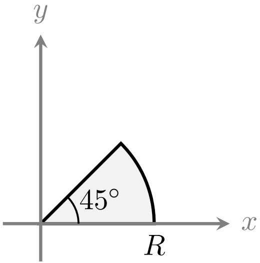
$$S = \int_0^R \int_0^{\pi/2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$S = \left(\int_0^R r\mathrm{d}r\right)\left(\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta\right)$$

$$S = \left(\left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^R\right)\left([\theta]_0^{\pi/2}\right)$$

$$S = \frac{1}{2}R^2 \times \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4}\pi R^2$$

# انتگرالگیری دوبعدی




$$\mathrm{d}S = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$0 \leq r \leq R$$

$$\boxed{0 \leq \theta \leq \pi/4}$$

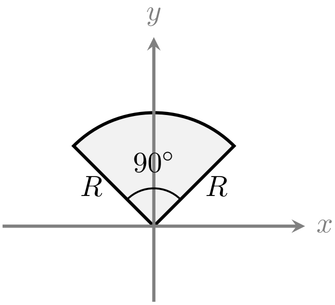
$$S = \int_0^R \int_0^{\pi/4} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$S = \left(\int_0^R r\mathrm{d}r\right)\left(\int_0^{\pi/4} \mathrm{d}\theta\right)$$

$$S = \left(\left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^R\right)\left([\theta]_0^{\pi/4}\right)$$

$$S = \frac{1}{2}R^2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{1}{8}\pi R^2$$

# انتگرالگیری دوبعدی




$$\mathrm{d}S = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$0 \leq r \leq R$$

$$\boxed{\pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4}$$

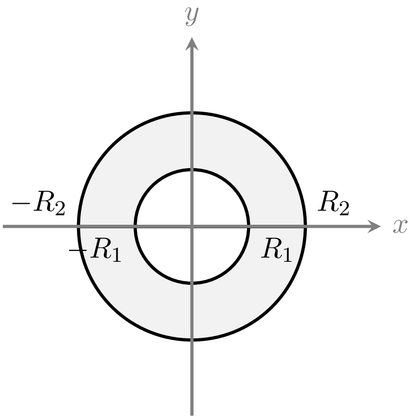
$$S = \int_0^R \int_{\pi/4}^{3\pi/4} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$S = \left(\int_0^R r\mathrm{d}r\right)\left(\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \mathrm{d}\theta\right)$$

$$S = \left(\left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^R\right)\left([\theta]_{\pi/4}^{3\pi/4}\right)$$

$$S = \frac{1}{2}R^2 \times \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4}\pi R^2$$

# انتگرالگیری دوبعدی




$$\mathrm{d}S = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$\boxed{R_1 \leq r \leq R_2}$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

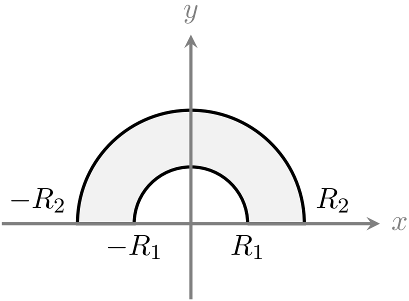
$$S = \int_{R_1}^{R_2} \int_{0}^{2\pi} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$S = \left( \int_{R_1}^{R_2} r\mathrm{d}r \right) \left( \int_{0}^{2\pi} \mathrm{d}\theta \right)$$

$$S = \left( \left[ \frac{1}{2} r^2 \right]_{R_1}^{R_2} \right) \left( [\theta]_0^{2\pi} \right)$$

$$S = \frac{1}{2}(R_2^2 - R_1^2) \times 2\pi = \pi(R_2^2 - R_1^2)$$

# انتگرالگیری دوبعدی




$$\mathrm{d}S = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$R_1 \leq r \leq R_2$$

$$\boxed{0 \leq \theta \leq \pi}$$

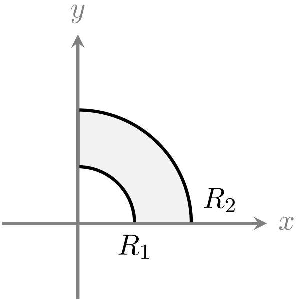
$$S = \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{\pi} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$S = \left(\int_{R_1}^{R_2} r\mathrm{d}r\right)\left(\int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta\right)$$

$$S = \left(\left[\frac{1}{2}r^2\right]_{R_1}^{R_2}\right)\left([\theta]_0^{\pi}\right)$$

$$S = \frac{1}{2}(R_2^2 - R_1^2) \times \pi = \frac{1}{2}\pi(R_2^2 - R_1^2)$$

# انتگرالگیری دوبعدی




$$dS = r dr d\theta$$

$$R_1 \leq r \leq R_2$$

$$\boxed{0 \leq \theta \leq \pi/2}$$

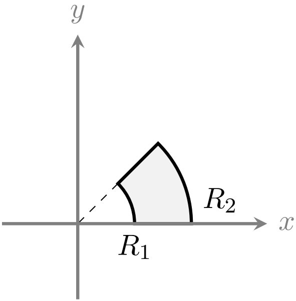
$$S = \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{\pi/2} r dr d\theta$$

$$S = \left( \int_{R_1}^{R_2} r dr \right) \left( \int_0^{\pi/2} d\theta \right)$$

$$S = \left( \left[ \frac{1}{2} r^2 \right]_{R_1}^{R_2} \right) \left( [\theta]_0^{\pi/2} \right)$$

$$S = \frac{1}{2}(R_2^2 - R_1^2) \times \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4}\pi(R_2^2 - R_1^2)$$

# انتگرالگیری دوبعدی




$$\mathrm{d}S = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$R_1 \leq r \leq R_2$$

$$\boxed{0 \leq \theta \leq \pi/4}$$

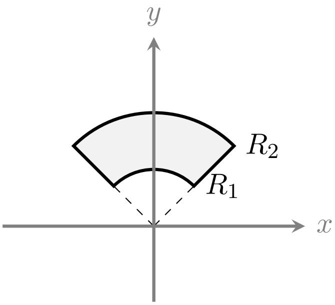
$$S = \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{\pi/4} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$S = \left(\int_{R_1}^{R_2} r\mathrm{d}r\right)\left(\int_0^{\pi/4} \mathrm{d}\theta\right)$$

$$S = \left(\left[\frac{1}{2}r^2\right]_{R_1}^{R_2}\right)\left([\theta]_0^{\pi/4}\right)$$

$$S = \frac{1}{2}(R_2^2 - R_1^2) \times \frac{\pi}{4} = \frac{1}{8}\pi(R_2^2 - R_1^2)$$

# انتگرالگیری دوبعدی




$$\mathrm{d}S = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$R_1 \le r \le R_2$$

$$\boxed{\pi/4 \le \theta \le 3\pi/4}$$

$$S = \int_{R_1}^{R_2} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$S = \left(\int_{R_1}^{R_2} r\mathrm{d}r\right)\left(\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \mathrm{d}\theta\right)$$

$$S = \left(\left[\frac{1}{2}r^2\right]_{R_1}^{R_2}\right)\left([\theta]_{\pi/4}^{3\pi/4}\right)$$

$$S = \frac{1}{2}(R_2^2 - R_1^2) \times \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4}\pi(R_2^2 - R_1^2)$$