آزمایشگاه فیزیک
انواع خطا و تحلیل خطاهای تصادفی

محمدرضا مظفری

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مهر ۱۴۰۰

انواع خطا

در جمع آوری داده ها آزمایشی، معمولاً دو نوع خطای **سیستماتیک** و **تصادفی** در اندازه‌گیری کمیتها حضور دارند.

- **خطاهای سیستماتیک**
  خطاهای سیستماتیک به دلایل قابل تشخیص بودن می‌توان آنها را حذف کرد.
  خطاهایی از این نوع، باعث می‌شود که مقادیر اندازه گیری به طور مداوم بیش از حد بالا و یا به طور مداوم بیش از حد پایین باشد.

  خطاهای سیستماتیک ممکن است چهار نوع باشد:

  - **خطای ابزاری**
    به عنوان مثال، یک دماسنجی که کالیبراسیون ضعیفی دارد، هنگام غوطه‌ور شدن در آب جوش ۱۰۲ درجه سانتیگراد و هنگام غوطه‌ور شدن در آب یخ ۲ درجه سانتیگراد را نشان می دهد. چنین دماسنجی می تواند مقادیری را اندازه گیری کند که به طور مداوم بیش از حد بالا هستند.
  - **خطای مشاهده‌ای**
    به عنوان مثال، اختلاف منظر در خواندن مقیاس متر

انواع خطا

در جمع آوری داده ها آزمایشی، معمولاً دو نوع خطای **سیستماتیک** و **تصادفی** در اندازه‌گیری کمیتها حضور دارند.

- **خطاهای سیستماتیک**
  خطاهای سیستماتیک به دلایل قابل تشخیص بودن می‌توان آنها را حذف کرد.
  خطاهایی از این نوع، باعث می‌شود که مقادیر اندازه گیری به طور مداوم بیش از حد بالا و یا به طور مداوم بیش از حد پایین باشد.

  خطاهای سیستماتیک ممکن است چهار نوع باشد:

  - **خطای محیطی**
    به عنوان مثال ، کاهش ولتاژ یا براون‌اوت (Brownout) به شرایطی گفته می‌شود که ولتاژ شبکه کمتر از میزان نرمال است و باعث می شود که جریانهای اندازه گیری شده به طور مداوم بسیار کم باشند.
  - **خطای نظری**
    چنین خطاهایی به دلیل ساده شدن سیستم مدل یا تقریب در معادلات توصیف کننده ظاهر می‌شود. به عنوان مثال ، اگر یک نیروی اصطکاک در طول آزمایش عمل می کند اما این نیرو در نظریه گنجانده نمی شود، نتایج نظری و تجربی به طور مداوم با هم اختلاف خواهند داشت.

انواع خطا

در جمع آوری داده ها آزمایشی، معمولاً دو نوع خطای **سیستماتیک** و **تصادفی** در اندازه‌گیری کمیتها حضور دارند.

- **خطاهای تصادفی**
  خطاهای تصادفی افت و خیزهای مثبت و منفی هستند که باعث می شود حدود نیمی از اندازه گیری ها بیش از حد زیاد و نیمی از آنها بسیار کم باشد. همیشه نمی توان منابع خطاهای تصادفی را شناسایی کرد.

  منابع احتمالی خطاهای تصادفی به شرح زیر است:

  - **خطای مشاهده‌ای**
    به عنوان مثال ، اشتباهات در قضاوت ناظر هنگام خواندن مقیاس یک دستگاه اندازه گیری.
  - **خطای محیطی**
    به عنوان مثال ، نوسانات غیرقابل پیش بینی در خط ولتاژ، دما یا ارتعاشات مکانیکی تجهیزات.

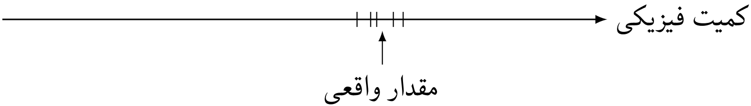
  نکته: بر خلاف خطاهای سیستماتیک، **اثر خطاهای تصادفی بر کمیتهای مورد بررسی، اغلب با تجزیه و تحلیل آماری قابل تعیین هستند.**

انواع خطا

در جمع آوری داده ها آزمایشی، معمولاً دو نوع خطای **سیستماتیک** و **تصادفی** در اندازه‌گیری کمیتها حضور دارند.

تمایز بین خطاهای **سیستماتیک** و **تصادفی** را می توان با مثال زیر نشان داد،

فرض کنید اندازه گیری کمیت فیزیکی را پنج بار در شرایط یکسان تکرار می‌کنید. اگر فقط خطاهای تصادفی وجود داشته باشند، مطابق شکل زیر، پنج مقدار اندازه گیری شده حول **مقدار واقعی** پخش می‌شوند که برخی بسیار زیاد و برخی دیگر بسیار پایین خواهند بود.

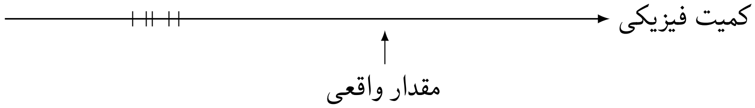


انواع خطا

در جمع آوری داده ها آزمایشی، معمولاً دو نوع خطای **سیستماتیک** و **تصادفی** در اندازه‌گیری کمیتها حضور دارند.

تمایز بین خطاهای **سیستماتیک** و **تصادفی** را می توان با مثال زیر نشان داد،

حالا اگر علاوه بر خطاهای تصادفی یک خطای سیستماتیک نیز وجود داشته باشد، پنج مقدار اندازه گیری شده، مطابق شکل زیر، حول **مقدار واقعی** پخش نمی‌شوند، بلکه حول یک مقدار جابجا شده‌ای پخش می‌شوند.



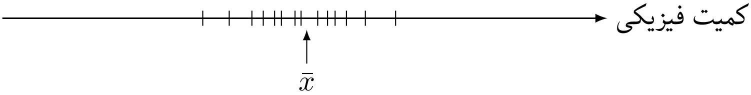
تحلیل خطاهای تصادفی: مقدار متوسط

اگر کمیت فیزیکی مانند طول با خط کش چندین بار اندازه گیری شود و یا بازه زمانی با کرونومتر چندین بار اندازه گیری شود، به دلیل خطاهای تصادفی، توزیعی از قرائت‌ها به دست می آید. برای چنین مجموعه‌ای از داده‌ها، مقدار میانگین یا مقدار متوسط بصورت

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i}^{n} x_i$$

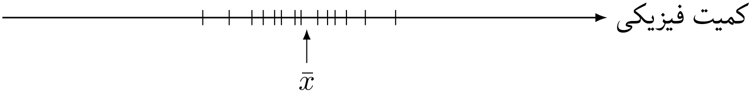
تعریف می‌شود که x_i مقدار iامین اندازه گیری و n تعداد کل اندازه گیری‌ها می‌باشد.

مطابق شکل زیر، n مقدار اندازه گیری شده حول مقدار متوسط توزیع می شود.



نکته: اگر n خیلی بزرگ باشد و خطاهای سیستماتیکی نیز وجود نداشته باشند، در بسیاری از موارد مقدار متوسط $\bar{x}$ به **مقدار واقعی** نزدیک می‌شود.

نکته: یک گستردگی کوچک از مقادیر اندازه‌گیری شده حول مقدار متوسط، نشان از دقت بالای اندازه‌گیریها دارد.



اکنون که ما بهترین مقدار برای اندازه گیری ، یعنی $\bar{x}$ تعیین را کرده‌ایم، باید عدم قطعیت یا خطای این مقدار را تخمین بزنیم. برای این منظور **انحراف\ معیار** را بصورت

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

تعریف می‌کنیم. اگر انحراف معیار کوچک باشد بنابراین گستردگی توزیع مقادیر اندازه‌گیری شده حول مقدار متوسط کوچک است و یعنی دقت اندازه‌گیریها بالا است.

تحلیل خطاهای تصادفی: انحراف معیار متوسط

خطا در مقدار متوسط $\bar{x}$، **انحراف معیار متوسط** s_m نام دارد که بصورت

$$s_m = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

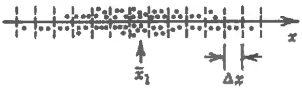
تعریف می‌شود که s انحراف معیار و n تعداد نهایی اندازه‌گیریها می‌باشد. بدین ترتیب نتیجه بصورت

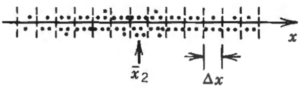
$$\bar{x} \pm s_m$$

گزارش می‌شود. رابطه بالا بیان می‌کند که با یک احتمال مشخص مقدار اندازه‌گیری شده در محدوده‌ای بین $\bar{x} - s_m$ تا $\bar{x} + s_m$ قرار می‌گیرد.

تحلیل خطاهای تصادفی: توزیع گوسی

شکل زیر توزیع مقادیر اندازه گیری شده حول مقدار متوسط برای داده‌های دو مجموعه را نشان می دهد، که هر مجموعه n اندازه گیری مکرر از مقدار فیزیکی یکسان است.

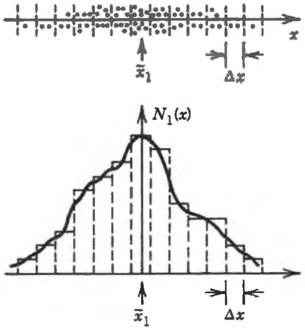


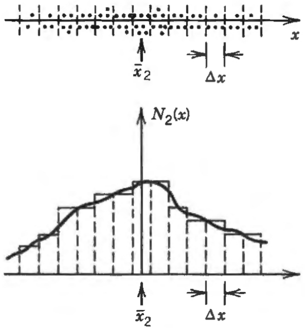


- محور x با اندازه‌های Δx تقسیم شده است و هر نقطه مقدار اندازه گیری شده را نشان می دهد. نقاط برای وضوح به صورت عمودی پخش می شوند.
- داده های سمت چپ بیشتر حول میانگین جمع شده اند. بنابراین آنها دلالت بر دقت بالایی دارند.

تحلیل خطاهای تصادفی: توزیع گوسی

در شکل زیر، تعداد مقادیر اندازه گیری شده، $N(x)$ ، در یک پهنای Δx با مرکزیت x به صورت عمودی ترسیم شده است.

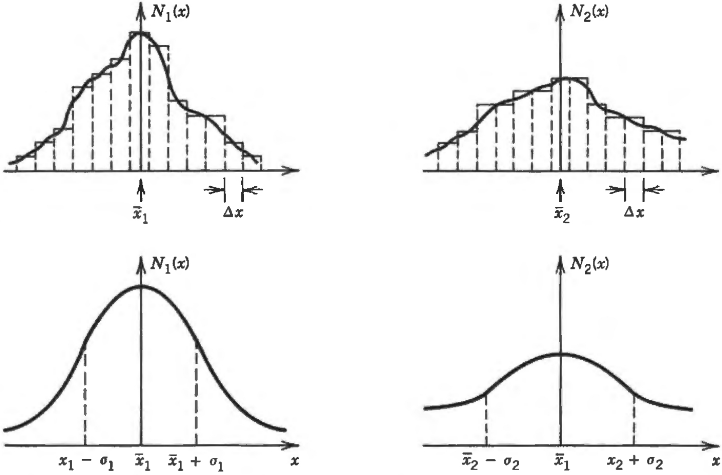




- توجه داشته باشید که منحنی در سمت چپ، که مربوط به داده های با دقت بیشتر است، به وضوح بیشتر از منحنی در سمت راست قله دارد.
- منحنی های صاف، که در شکل نامتقارن هستند، برای نشان دادن وابستگی تقریبی تعداد نقاط اندازه گیری شده $N(x)$ به x ترسیم شده اند.

تحلیل خطاهای تصادفی: توزیع گوسی

اگر تعداد اندازه گیری ها n بسیار زیاد شود، مقادیر اندازه گیری شده به طور متقارن حول مقدار متوسط توزیع می شوند، همانطورکه در شکل زیر نشان داده شده است.



تحلیل خطاهای تصادفی: توزیع گوسی

برای n بسیار بزرگ،

$$n \to \infty \Rightarrow \begin{cases} \bar{x} \to \text{مقدار واقعی} \\ s \to \sigma \quad \text{نیم پهنا} \\ s_m \to \sigma_m \end{cases} \quad , \sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

هر منحنی در شکل، $N(x)$ بر حسب x، نشان دهنده تعداد دفعاتی است که مقدار x در نتیجه هر تک اندازه گیری بدست می آید.
در حالت ایده آل ، عبارت تحلیلی چنین منحنی هایی بصورت

$$N(x) = \frac{n}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\bar{x})^2/2\sigma^2}$$

می‌باشد. معادله‌ی بالا **توزیع گوسی (یا نرمال)** نامیده می‌شود.
اگر اندازه گیری ها با دقت بالایی انجام شود، Δx کوچک خواهد بود و توزیع گاوس به شدت در مقدار متوسط $\bar{x}$ به اوج می رسد.
منحنی $N_1(x)$ قله‌ی تیز تری از $N_2(x)$ در مقدار متوسط دارد و یا $\sigma_1 < \sigma_2$.

تحلیل خطاهای تصادفی: توزیع گوسی

اگر هر دو طرف رابطه‌ی

$$N(x) = \frac{n}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\bar{x})^2/2\sigma^2}$$

بر n تقسیم کنیم

$$\frac{N(x)}{n} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\bar{x})^2/2\sigma^2}$$

و نسبت $N(x)/n$ برابر $P(x)$ تعریف شود، داریم

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\bar{x})^2/2\sigma^2}$$

که $P(x)$ احتمال بدست اوردن x بصورت نتیجه‌ای برای هر تک اندازه‌گیری است. دقت شود که **بیشترین احتمال** برای هر تک اندازه‌گیری مربوط به **مقدار متوسط** $\bar{x}$ می‌باشد.

تحلیل خطاهای تصادفی: توزیع گوسی

احتمال اینکه اندازه‌گیری در بازه‌ی $-\sigma$ و σ حول مقدار متوسط قرار داشته باشد، با انتگرالگیری از تابع توزیع گوسی در بازه‌ی $[\bar{x}-\sigma, \bar{x}+\sigma]$ مشخص می‌شود،

$$p(\text{در محدوده‌ی بین } -\sigma \text{ و } \sigma) = \int_{\bar{x}-\sigma}^{\bar{x}+\sigma} P(x)\mathrm{d}x$$

که

$$p(\text{در محدوده‌ی بین } -\sigma \text{ و } \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\bar{x}-\sigma}^{\bar{x}+\sigma} e^{-(x-\bar{x})^2/2\sigma^2}\mathrm{d}x$$

اگر

$$y = (x-\bar{x})/\sigma : \quad \mathrm{d}y = \mathrm{d}x/\sigma$$

بنابراین

$$p(\text{در محدوده‌ی بین } -\sigma \text{ و } \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{y^2/2}\mathrm{d}y \simeq 0.68$$

حل تحلیلی برای انتگرال بالا وجود ندارد و باید با استفاده از روشهای عددی آنرا حل کرد.

تحلیل خطاهای تصادفی: توزیع گوسی

رابطه‌ی

$$p(\text{در محدوده‌ی بین } -\sigma \text{ و } \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\bar{x}-\sigma}^{\bar{x}+\sigma} e^{-(x-\bar{x})^2/2\sigma^2} \mathrm{d}x \simeq 0.68$$

نشان می‌دهد که احتمال اینکه اندازه‌گیری در بازه‌ی $[\bar{x}-\sigma, \bar{x}+\sigma]$ قرار بگیرید 68 درصد می‌باشد.
به همین ترتیب می‌توان نشان داد که برای تابع توزیع گوسی، احتمال اینکه اندازه‌گیری در بازه‌ی $[\bar{x}-2\sigma, \bar{x}+2\sigma]$ قرار بگیرید 95 درصد می‌باشد، یعنی

$$\begin{aligned} p(\text{در محدوده‌ی بین } -2\sigma \text{ و } 2\sigma) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\bar{x}-2\sigma}^{\bar{x}+2\sigma} e^{-(x-\bar{x})^2/2\sigma^2} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-2}^{2} e^{y^2/2} \mathrm{d}y \simeq 0.95 \end{aligned}$$

که

$$y = (x-\bar{x})/\sigma : \quad \mathrm{d}y = \mathrm{d}x/\sigma$$

و بطور مشابه حل تحلیلی برای انتگرال بالا وجود ندارد و باید با استفاده از روشهای عددی آنرا حل کرد.

تحلیل خطاهای تصادفی: مثال

داده‌های پایین یک مجموعه از اندازه‌گیریها از یک برگه‌ی ورق است که با یک خط کش 30 سانتمتری گرفته شده است.

l(cm)	27.96	27.93	27.94	27.99	28.00	27.98	27.96	27.97

مقدار متوسط

$$\begin{aligned}\bar{l} &= \frac{1}{8}\sum_{i}^{8} l_i \\ &= \frac{1}{8}(27.97 + 27.96 + 27.98 + 28.00 + 27.99 + 27.94 + 27.93 + 27.96) \\ &= 27.97\text{cm}\end{aligned}$$

تحلیل خطاهای تصادفی: مثال

داده‌های پایین یک مجموعه از اندازه‌گیریها از یک برگه‌ی ورق است که با یک خط کش 30 سانتمتری گرفته شده است.

l(cm)	27.96	27.93	27.94	27.99	28.00	27.98	27.96	27.97

انحراف معیار

$$s = \left[\frac{1}{8-1}\sum_{i}^{8}(l_i - \bar{l})^2\right]^{1/2}$$

$$\begin{aligned} s = [& \frac{1}{8-1}((27.97 - 27.97)^2 + (27.96 - 27.97)^2 + (27.98 - 27.97)^2 \\ & + (28.00 - 27.97)^2 + (27.99 - 27.97)^2 + (27.94 - 27.97)^2 \\ & + (27.93 - 27.97)^2 + (27.96 - 27.97)^2) \;]^{1/2} \\ = & \; 0.02\text{cm} \end{aligned}$$

تحلیل خطاهای تصادفی: مثال

داده‌های پایین، مجموعه از اندازه‌گیریها یک برگه‌ی ورق است که با یک خط کش 30 سانتمتری بدست آمده است.

l(cm)	27.96	27.93	27.94	27.99	28.00	27.98	27.96	27.97

انحراف معیار متوسط

$$s_m = \frac{s}{\sqrt{8}}$$

$$s_m = \frac{0.02}{\sqrt{8}} = 0.01\text{cm}$$

درصد خطا

$$\frac{s_m}{\bar{l}} \times 100 \text{ درصد} = \frac{0.01}{27.97} \times 100 \text{ درصد} = 0.04 \text{ درصد}$$

نتیجه‌ای که گزارش می‌شود:

$$\bar{l} \pm s_m = 27.97 \pm 0.01 \text{ cm}$$

مراجع

- The Art of Experimental Physics, Daryl W. Preston and Eric R. Dietz, John Wiley and Sons (1991).
- A Student's Guide to Data and Error Analysis, Herman J. C. Berendsen, Cambridge University Press (2011).
- Basic Concepts of Data and Error Analysis: With Introductions to Probability and Statistics and to Computer Methods, Panayiotis Nicos Kaloyerou, Springer (2018).