آزمایشگاه فیزیک
انتشار خطا

محمدرضا مظفری

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مهر ۱۴۰۰

انتشار خطا

انتشار خطاها روشی ساده برای تعیین خطا در مقدار یک کمیت است که بوسیله مقادیر دو یا چند کمیت اندازه گیری شده و خطاهای شان محاسبه می شود.

این روش به طور جداگانه برای **جمع** و **تفریق** اندازه گیری ها و **ضرب** و **تقسیم** اندازه گیری ها مورد بحث قرار می گیرد.

فرض کنید که x، y و z مقادیر سه کمیت اندازه گیری شده و δx، δy و δz خطاهای برآورد شده آنها باشند.

نتایج سه اندازه گیری معمولا بصورت

$$x \pm \delta x, \quad y \pm \delta y, \quad z \pm \delta z$$

گزارش می شود.

انتشار خطا

انتشار خطاها روشی ساده برای تعیین خطا در مقدار یک کمیت است که بوسیله مقادیر دو یا چند کمیت اندازه گیری شده و خطاهای شان محاسبه می شود.

اگر w یک تابع شناخته شده از مقادیر کمیتهای اندازه گیری شده باشد، $w(x, y, z)$ ، ممکن است نیاز به محاسبه‌ی w و خطای آن δw باشد. در این شرایط برای تعیین δw، با محاسبه دیفرانسیل $\mathrm{d}w$ شروع می کنیم،

$$w = w(x, y, z) \Rightarrow \mathrm{d}w = \frac{\partial w}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial w}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial w}{\partial z}\mathrm{d}z$$

اگر

$$\mathrm{d}w \to \delta w$$

و

$$\mathrm{d}x \to \delta x, \quad \mathrm{d}y \to \delta y, \quad \mathrm{d}z \to \delta z$$

بنابراین

$$\delta w = \frac{\partial w}{\partial x}\delta x + \frac{\partial w}{\partial y}\delta y + \frac{\partial w}{\partial z}\delta z$$

انتشار خطا

انتشار خطاها روشی ساده برای تعیین خطا در مقدار یک کمیت است که بوسیله مقادیر دو یا چند کمیت اندازه گیری شده و خطاهای شان محاسبه می شود.

در رابطه‌ی

$$\delta w = \frac{\partial w}{\partial x}\delta x + \frac{\partial w}{\partial y}\delta y + \frac{\partial w}{\partial z}\delta z$$

اگر فرض کردیم که خطاهای تخمینی δx ، δy و δz خطاهای تصادفی باشند، نظریه آماری نشان می دهد که δw ریشه مربع مجموع مربعات است:

$$\delta w = \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\delta z\right)^2}$$

معادله‌ی بالا، **فرمول اساسی برای انتشار خطا** است.

انتشار خطا برای اندازه‌گیریهای جمع و تفریق

فرمول اساسی برای انتشار خطا

$$\delta w = \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\delta z\right)^2}$$

فرض کنید که

$$w = ax + by + cz$$

که a ، b و c می‌تواند ثوابت مثبت یا منفی باشد و x ، y و z کمیتهای اندازه‌گیری شده با خطاهای شناخته شده δx ، δy و δz می‌باشد. خطای δw بصورت

$$\delta w = \sqrt{(a\delta x)^2 + (b\delta y)^2 + (c\delta z)^2}$$

داده می‌شود که هموار مستقل از علامت است.

انتشار خطا برای اندازه‌گیریهای جمع و تفریق

فرمول اساسی برای انتشار خطا

$$\delta w = \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\delta z\right)^2}$$

برای

$$w = ax + by + cz$$

خطای δw بصورت

$$\delta w = \sqrt{(a\delta x)^2 + (b\delta y)^2 + (c\delta z)^2}$$

داده می‌شود.

مثال ۱: فرض کنید که اندازه‌گیری سه طول و خطاهای شان بصورت زیر داده شده است،

$$l_1 + \delta l_1 = 23.5 \pm 0.1 \text{ cm}$$

$$l_2 + \delta l_2 = 17.8 \pm 0.2 \text{ cm}$$

$$l_3 + \delta l_3 = 93.9 \pm 0.2 \text{ cm}$$

کمیت $L = l_1 + 2l_2 - l_3$ و خطای آنرا بدست آورید.

انتشار خطا برای اندازه‌گیریهای جمع و تفریق

فرمول اساسی برای انتشار خطا

$$\delta w = \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\delta z\right)^2}$$

برای $w = ax + by + cz$ خطای بصورت

$$\delta w = \sqrt{(a\delta x)^2 + (b\delta y)^2 + (c\delta z)^2}$$

داده می‌شود.

مثال ۱: برای $L = l_1 + 2l_2 - l_3$

$$\begin{cases} l_1 + \delta l_1 = 23.5 \pm 0.1 \\ l_2 + \delta l_2 = 17.8 \pm 0.2 \\ l_3 + \delta l_3 = 93.9 \pm 0.2 \end{cases} \Rightarrow \delta L = \sqrt{(\delta l_1)^2 + (2\delta l_2)^2 + (-\delta l_3)^2}$$

$$\delta L = \sqrt{(0.1)^2 + (2 \times 0.2)^2 + (-0.2)^2} = 0.5 \text{ cm}$$

و

$$L \pm \delta L = -34.8 \pm 0.5 \text{ cm}$$

انتشار خطا برای اندازه‌گیریهای جمع و تفریق

فرمول اساسی برای انتشار خطا

$$\delta w = \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\delta z\right)^2}$$

برای $w = ax + by + cz$ خطای بصورت

$$\delta w = \sqrt{(a\delta x)^2 + (b\delta y)^2 + (c\delta z)^2}$$

داده می‌شود.

مثال ۲: فرض کنید که اندازه‌گیری دو فاصله‌ی زمانی و خطاهای شان بصورت زیر داده شده است،

$$t_1 + \delta t_1 = 0.743 \pm 0.0005 \text{ s}$$

$$t_2 + \delta t_2 = 0.374 \pm 0.0005 \text{ s}$$

کمیت

$$t = 2t_1 + 5t_2$$

و خطای آنرا بدست آورید.

انتشار خطا برای اندازه‌گیریهای جمع و تفریق

فرمول اساسی برای انتشار خطا

$$\delta w = \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\delta z\right)^2}$$

برای $w = ax + by + cz$ خطای بصورت

$$\delta w = \sqrt{(a\delta x)^2 + (b\delta y)^2 + (c\delta z)^2}$$

داده می‌شود.

مثال ۲: برای $t = 2t_1 + 5t_2$

$$\begin{cases} t_1 + \delta t_1 = 0.743 \pm 0.0005 \\ t_2 + \delta t_2 = 0.374 \pm 0.0005 \end{cases} \Rightarrow \delta t = \sqrt{(2\delta t_1)^2 + (5\delta t_2)^2}$$

$$\delta t = \sqrt{(2 \times 0.0005)^2 + (5 \times 0.0005)^2} = 0.027 \text{ s}$$

و

$$t \pm \delta t = 3.406 \pm 0.027 \text{ s}$$

انتشار خطا برای اندازه‌گیریهای ضرب و تقسیم

فرمول اساسی برای انتشار خطا

$$\delta w = \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\delta z\right)^2}$$

فرض کنید که

$$w = kx^a y^b z^c$$

که k ، a ، b و c می‌تواند ثوابت مثبت یا منفی باشد و x ، y و z کمیتهای اندازه‌گیری شده با خطاهای شناخته شده δx ، δy و δz می‌باشد. خطای δw بصورت

$$\delta w = \sqrt{(kax^{a-1}y^b z^c)^2(\delta x)^2 + (kbx^a y^{b-1} z^c)^2(\delta y)^2 + (kcx^a y^b z^{c-1})^2(\delta z)^2}$$

داده می‌شود.

انتشار خطا برای اندازه‌گیریهای ضرب و تقسیم

فرمول اساسی برای انتشار خطا

$$\delta w = \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\delta z\right)^2}$$

برای $w = kx^a y^b z^c$ خطای بصورت

$$\delta w = \sqrt{(kax^{a-1}y^b z^c)^2(\delta x)^2 + (kbx^a y^{b-1} z^c)^2(\delta y)^2 + (kcx^a y^b z^{c-1})^2(\delta z)^2}$$

داده می‌شود.که مفید است طرفین را بر w تقسیم کنیم،

$$\frac{\delta w}{w} = \frac{1}{kx^a y^b z^c}\,[\,(kax^{a-1}y^b z^c)^2(\delta x)^2 + (kbx^a y^{b-1} z^c)^2(\delta y)^2 + (kcx^a y^b z^{c-1})^2(\delta z)^2\,]^{1/2}$$

انتشار خطا برای اندازه‌گیریهای ضرب و تقسیم

فرمول اساسی برای انتشار خطا

$$\delta w = \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\delta z\right)^2}$$

برای $w = kx^a y^b z^c$

$$\frac{\delta w}{w} = \frac{1}{kx^a y^b z^c}\,[\,(kax^{a-1}y^b z^c)^2(\delta x)^2 + (kbx^a y^{b-1} z^c)^2(\delta y)^2 + (kcx^a y^b z^{c-1})^2(\delta z)^2\,]^{1/2}$$

و

$$\frac{\delta w}{w} = \sqrt{\left(\frac{a\delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{b\delta y}{y}\right)^2 + \left(\frac{c\delta z}{z}\right)^2}$$

انتشار خطا برای اندازه‌گیریهای ضرب و تقسیم

برای $w = kx^a y^b z^c$ خطا بصورت

$$\delta w = w\sqrt{\left(\frac{a\delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{b\delta y}{y}\right)^2 + \left(\frac{c\delta z}{z}\right)^2}$$

داده می‌شود.

مثال ۱: خطای نیروی گرانش $F = Gm_1m_2/r^2$ را برای مقادیر اندازه‌گیری شده و خطاهای شان بدست آورید.

$$m_1 + \delta m_1 = 19.7 \pm 0.2 \text{ kg}$$

$$m_2 + \delta m_2 = 9.4 \pm 0.2 \text{ kg}$$

$$r + \delta r = 0.641 \pm 0.009 \text{ m}$$

و ثابت

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$$

انتشار خطا برای اندازه‌گیریهای ضرب و تقسیم

مثال ۱: برای $F = Gm_1m_2/r^2$ خطا بصورت زیر داده می‌شود

$$\delta F = F\sqrt{\left(\frac{\delta m_1}{m_1}\right)^2 + \left(\frac{\delta m_2}{m_2}\right)^2 + \left(-2\frac{\delta r}{r}\right)^2}$$

مقادیر داده شده مقدار نیروی گرانش و خطا برابرند با

$$F = 6.67 \times 10^{-11}\frac{19.7 \times 9.7}{0.641^2} = 3.0 \times 10^{-8}\mathrm{N}$$

و

$$\delta F = 3.0\times10^{-8}\sqrt{\left(\frac{0.2}{19.7}\right)^2 + \left(\frac{0.2}{9.4}\right)^2 + \left(-2 \times \frac{0.009}{0.641}\right)^2} = 1.10\times10^{-9}\mathrm{N}$$

آنچه نهایتا گزارش می‌شود

$$F \pm \delta F = (3.0 \pm 0.1) \times 10^{-8}\mathrm{N}$$

انتشار خطا برای اندازه‌گیریهای ضرب و تقسیم

مثال ۲: ضریب شکست شیشه با استفاده از قانون اسنل بصورت زیر داده می‌شود،

$$n_g = n_{\text{هوا}} \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}$$

که $n_{\text{هوا}} = 1$ ، $\theta_1 \pm \delta\theta_1 = 61^\circ \pm 2^\circ$ و $\theta_2 \pm \delta\theta_2 = 36^\circ \pm 1^\circ$.

$$\delta n_g = \sqrt{\left(\frac{\partial n_g}{\partial \theta_1}\delta\theta_1\right)^2 + \left(\frac{\partial n_g}{\partial \theta_2}\delta\theta_2\right)^2}$$

$$\delta n_g = \sqrt{\left(n_{\text{هوا}}\frac{\cos\theta_1}{\sin\theta_2}\delta\theta_1\right)^2 + \left(-n_{\text{هوا}}\frac{\sin\theta_1\cos\theta_2}{\sin^2\theta_2}\delta\theta_2\right)^2}$$

$$\frac{\delta n_g}{n_g} = \sqrt{\left(\frac{\cos\theta_1}{\sin\theta_1}\delta\theta_1\right)^2 + \left(-\frac{\cos\theta_2}{\sin\theta_2}\delta\theta_2\right)^2}$$

انتشار خطا برای اندازه‌گیریهای ضرب و تقسیم

مثال ۲: ضریب شکست شیشه با استفاده از قانون اسنل بصورت زیر داده می‌شود،

$$n_g = n_{\text{هوا}} \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}$$

که $n_{\text{هوا}} = 1$ ، $\theta_1 \pm \delta\theta_1 = 61^\circ \pm 2^\circ$ و $\theta_2 \pm \delta\theta_2 = 36^\circ \pm 1^\circ$.

$$n_g = 1 \times \frac{\sin(61 \times \pi/180)}{\sin(36 \times \pi/180)} = 1.5$$

$$\delta n_g = 1.5 \left[\left(\frac{\cos(61 \times \pi/180)}{\sin(61 \times \pi/180)} \times 2 \times \pi/180 \right)^2 + \left(-\frac{\cos(36 \times \pi/180)}{\sin(36 \times \pi/180)} \times 1 \times \pi/180 \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$\delta n_g = 1.5 \times 0.0490 = 0.07$$

$$n_g \pm \delta n_g = 1.5 \pm 0.1$$

انتشار خطا برای اندازه‌گیریهای با عملیات‌های ترکیبی

مثال ۱: خطای کمیت طولی زیر را بدست آورید،

$$L = l_1 - 2l_2/l_3$$

که

$$l_1 \pm \delta l_1 = 14.7 \pm 0.2 \text{ cm}$$
$$l_2 \pm \delta l_2 = 9.76 \pm 0.05 \text{ cm}$$
$$l_3 \pm \delta l_3 = 11 \pm 1 \text{ cm}$$

$$L = l_1 - 2l_2/l_3 = 17.4 - 2 \times 9.76/11 = 15.625454545454545$$

$$\delta L = \sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial l_1}\delta l_1\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial l_2}\delta l_2\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial l_3}\delta l_3\right)^2}$$

$$\delta L = \sqrt{(\delta l_1)^2 + \left(\frac{-2}{l_3}\delta l_2\right)^2 + \left(\frac{2l_2}{l_3^2}\delta l_3\right)^2}$$

انتشار خطا برای اندازه‌گیریهای با عملیات‌های ترکیبی

مثال ۱: خطای کمیت طولی زیر را بدست آورید،

$$L = l_1 - 2l_2/l_3$$

که

$$l_1 \pm \delta l_1 = 17.4 \pm 0.2 \text{ cm}$$
$$l_2 \pm \delta l_2 = 9.76 \pm 0.05 \text{ cm}$$
$$l_3 \pm \delta l_3 = 11 \pm 1 \text{ cm}$$

$$L = l_1 - 2l_2/l_3 = 17.4 - 2 \times 9.76/11 = 15.625454545454545$$

$$\delta L = \sqrt{(\delta l_1)^2 + \left(\frac{-2}{l_3}\delta l_2\right)^2 + \left(\frac{2l_2}{l_3^2}\delta l_3\right)^2}$$

$$\delta L = \sqrt{(0.2)^2 + \left(\frac{-2}{11} \times 0.05\right)^2 + \left(\frac{2 \times 9.76}{11^2} \times 1\right)^2} = 0.2571138534548706$$

انتشار خطا برای اندازه‌گیریهای با عملیات‌های ترکیبی

مثال ۱: خطای کمیت طولی زیر را بدست آورید،

$$L = l_1 - 2l_2/l_3$$

که

$$l_1 \pm \delta l_1 = 14.7 \pm 0.2 \text{ cm}$$

$$l_2 \pm \delta l_2 = 9.76 \pm 0.05 \text{ cm}$$

$$l_3 \pm \delta l_3 = 11 \pm 1 \text{ cm}$$

$$L = 15.625454545454545 = 15.6$$

$$\delta L = 0.257113853454870 6 = 0.3$$

بنابراین

$$L \pm \delta L = 15.6 \pm 0.3 \text{ m}$$

$$\frac{\delta L}{L} \times 100 \text{ درصد} = 2 \text{ درصد}$$

انتشار خطا برای اندازه‌گیریهای با عملیات‌های ترکیبی

مثال ۲: خطای پریود نوسانات کند میرا زیر را بدست آورید،

$$T = 2\pi \Big/ \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

که

$$k \pm \delta k = 0.11 \pm 0.01 \text{ N/m}$$
$$m \pm \delta m = 0.500 \pm 0.005 \text{ kg}$$
$$b \pm \delta b = 0.062 \pm 0.008 \text{ kg/s}$$

$$T = 13.514382940233906 \text{ s}$$

$$\delta T = \sqrt{\left(\frac{\partial T}{\partial k}\delta k\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial b}\delta b\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial m}\delta m\right)^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial k} = T\left(\frac{-1/2m}{k/m - (b/2m)^2}\right) = -62.52143331776081$$

انتشار خطا برای اندازه‌گیریهای با عملیات‌های ترکیبی

مثال ۲: خطای پریود نوسانات کند میرا زیر را بدست آورید،

$$T = 2\pi \Big/ \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

که

$$k \pm \delta k = 0.11 \pm 0.01 \text{ N/m}$$
$$m \pm \delta m = 0.500 \pm 0.005 \text{ kg}$$
$$b \pm \delta b = 0.062 \pm 0.008 \text{ kg/s}$$

$$T = 13.514382940233906 \text{ s}$$

$$\delta T = \sqrt{\left(\frac{\partial T}{\partial k}\delta k\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial b}\delta b\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial m}\delta m\right)^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial b} = T\left(\frac{b/4m^2}{k/m - (b/2m)^2}\right) = 3.876328865701 17$$

انتشار خطا برای اندازه‌گیریهای با عملیات‌های ترکیبی

مثال ۲: خطای پریود نوسانات کند میرا زیر را بدست آورید،

$$T = 2\pi \Big/ \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

که

$$k \pm \delta k = 0.11 \pm 0.01 \text{ N/m}$$
$$m \pm \delta m = 0.500 \pm 0.005 \text{ kg}$$
$$b \pm \delta b = 0.062 \pm 0.008 \text{ kg/s}$$

$$T = 13.514382940233906 \text{ s}$$

$$\delta T = \sqrt{\left(\frac{\partial T}{\partial k}\delta k\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial b}\delta b\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial m}\delta m\right)^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial m} = T\left(\frac{k/2m^2 - b^2/4m^3}{k/m - (b/2m)^2}\right) = 13.274050550560432$$

انتشار خطا برای اندازه‌گیریهای با عملیات‌های ترکیبی

مثال ۲: خطای پریود نوسانات کند میرا زیر را بدست آورید،

$$T = 2\pi \Big/ \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

که

$$k \pm \delta k = 0.11 \pm 0.01 \text{ N/m}$$
$$m \pm \delta m = 0.500 \pm 0.005 \text{ kg}$$
$$b \pm \delta b = 0.062 \pm 0.008 \text{ kg/s}$$

$$T = 13.514382940233906 = 14 \text{ s}$$
$$\delta T = 0.6294915663387369 = 1 \text{ s}$$

بنابراین

$$T \pm \delta T = 14 \pm 1\text{s}$$
$$\frac{\delta T}{T} \times 100 \text{ درصد} = 7 \text{ درصد}$$

مراجع

- The Art of Experimental Physics, Daryl W. Preston and Eric R. Dietz, John Wiley and Sons (1991).
- A Student's Guide to Data and Error Analysis, Herman J. C. Berendsen, Cambridge University Press (2011).
- Basic Concepts of Data and Error Analysis: With Introductions to Probability and Statistics and to Computer Methods, Panayiotis Nicos Kaloyerou, Springer (2018).