آزمایشگاه فیزیک
تجزیه و تحلیلی نموداری و روش کمترین مربعات

محمدرضا مظفری

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مهر ۱۴۰۰

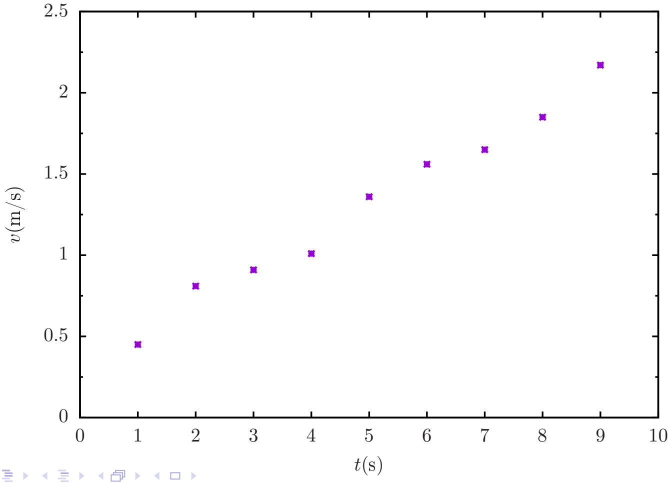
تجزیه و تحلیلی نموداری

هدف بسیاری از آزمایشها، **یافتن رابطه بین متغیرهای اندازه گیری** شده است. یک راه خوب برای انجام این کار ترسیم نمودار داده ها و سپس تجزیه و تحلیل نمودار است.
به عنوان مثال، مطالعه سرعت یک ذره‌ای بصورت تابعی از زمان را در نظر بگیرید. داده ها به شرح زیر است:

$t(s)$	$v(m/s)$
1	0.45
2	0.81
3	0.91
4	1.01
5	1.36
6	1.56
7	1.65
8	1.85
9	2.17

تجزیه و تحلیلی نموداری

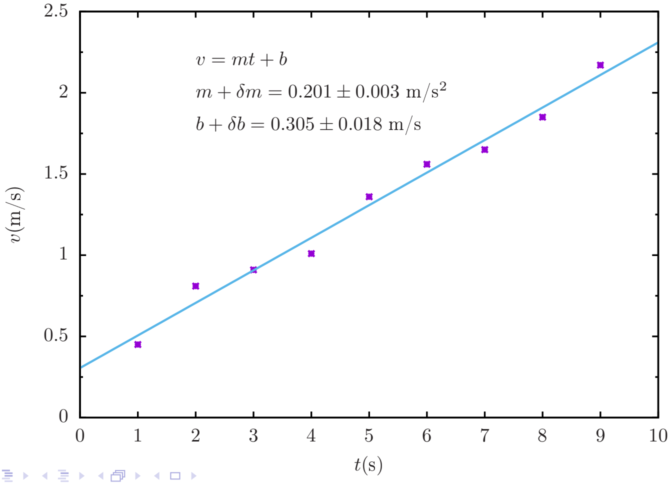
هدف بسیاری از آزمایشها، **یافتن رابطه بین متغیرهای اندازه گیری** شده است. یک راه خوب برای انجام این کار ترسیم نمودار داده ها و سپس تجزیه و تحلیل نمودار است.
به عنوان مثال-۱، مطالعه سرعت یک ذره‌ای بصورت تابعی زمان،



تجزیه و تحلیلی نموداری

هدف بسیاری از آزمایشها، **یافتن رابطه بین متغیرهای اندازه گیری** شده است. یک راه خوب برای انجام این کار ترسیم نمودار داده ها و سپس تجزیه و تحلیل نمودار است.

به عنوان مثال–۱، مطالعه سرعت یک ذره‌ای بصورت تابعی زمان،



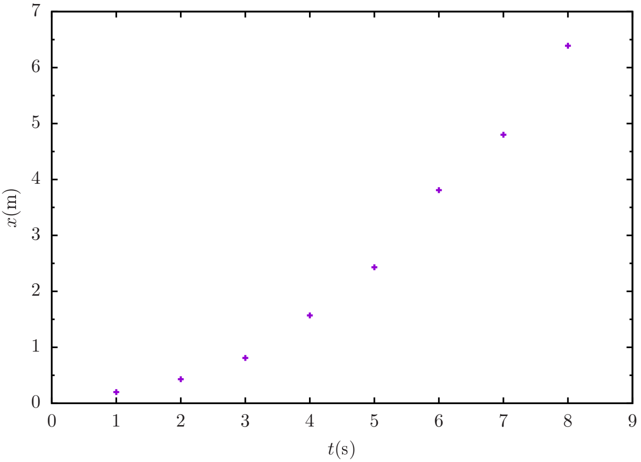
تجزیه و تحلیلی نموداری

هدف بسیاری از آزمایشها، **یافتن رابطه بین متغیرهای اندازه گیری** شده است. یک راه خوب برای انجام این کار ترسیم نمودار داده ها و سپس تجزیه و تحلیل نمودار است.
به عنوان مثال–۲، مطالعه مسافت طی شده توسط یک جسم را به عنوان تابعی از زمان در نظر بگیرید. داده ها به شرح زیر است:

$t(s)$	$x(m)$
1	0.20
2	0.43
3	0.81
4	1.57
5	2.43
6	3.81
7	4.80
8	6.39

تجزیه و تحلیلی نموداری

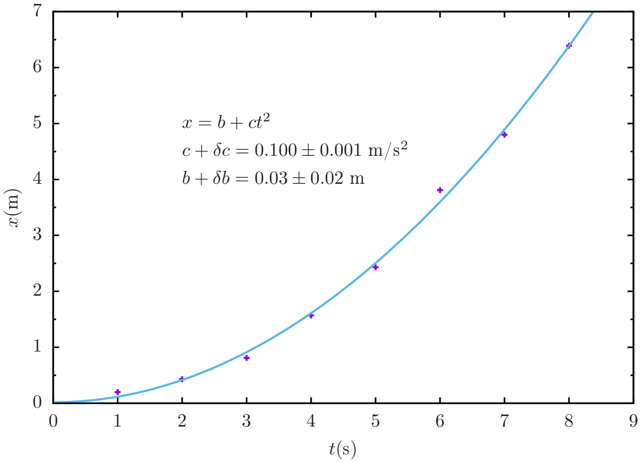
هدف بسیاری از آزمایشها، **یافتن رابطه بین متغیرهای اندازه گیری** شده است. یک راه خوب برای انجام این کار ترسیم نمودار داده ها و سپس تجزیه و تحلیل نمودار است.
به عنوان مثال–۲، مطالعه مسافت طی شده بصورت تابعی از زمان،



تجزیه و تحلیلی نموداری

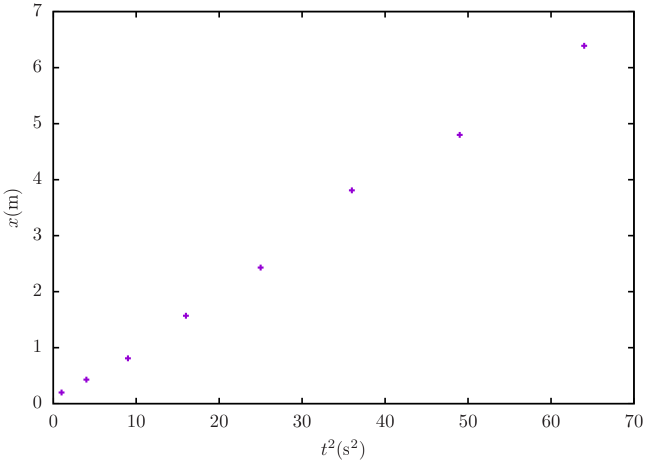
هدف بسیاری از آزمایشها، **یافتن رابطه بین متغیرهای اندازه گیری** شده است. یک راه خوب برای انجام این کار ترسیم نمودار داده ها و سپس تجزیه و تحلیل نمودار است.

به عنوان مثال–۲، مطالعه مسافت طی شده بصورت تابعی از زمان،



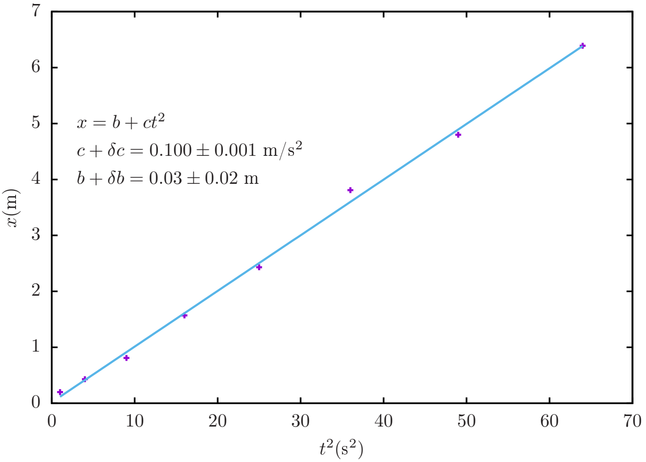
تجزیه و تحلیلی نموداری

هدف بسیاری از آزمایشها، **یافتن رابطه بین متغیرهای اندازه گیری** شده است. یک راه خوب برای انجام این کار ترسیم نمودار داده ها و سپس تجزیه و تحلیل نمودار است.
به عنوان مثال–۲، مطالعه مسافت طی شده بصورت تابعی از مجذور زمان،



تجزیه و تحلیلی نموداری

هدف بسیاری از آزمایشها، **یافتن رابطه بین متغیرهای اندازه گیری** شده است. یک راه خوب برای انجام این کار ترسیم نمودار داده ها و سپس تجزیه و تحلیل نمودار است.
به عنوان مثال–۲، مطالعه مسافت طی شده بصورت تابعی از مجذو زمان،



روش کمترین مربعات

برای n داده

x	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
y	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_n

می خواهیم معادله **بهترین** منحنی را برای این مجموعه داده‌ها بیابیم. اگر نقاط داده ارتباط خطی داشته باشند، به فرایند بدست آوردن معادله برای بهترین منحنی خطی **رگرسیون خطی** گفته می شود. اما در غالب حالتها، نقاط داده ارتباط خطی ندارند و فرایند بدست آوردن معادله برای بهترین منحنی را **رگرسیون غیرخطی** می نامند. تکنیکی که برای تعیین بهترین منحنی مورد استفاده قرار می گیرد، **روش کمترین مربعات** است.

برای تابع پیشنهادی

$$p = p(x)$$

که بتواند بهترین توافق را با داده داشته باشد، انتظار داریم

$$\begin{aligned}
(p(x_1) - y_1) &\to 0 \\
(p(x_2) - y_2) &\to 0 \\
(p(x_3) - y_3) &\to 0 \\
&\cdots \\
(p(x_n) - y_n) &\to 0
\end{aligned}$$

روش کمترین مربعات

برای n داده

x	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
y	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_n

می خواهیم معادله **بهترین** منحنی را برای این مجموعه داده‌ها بیابیم.

برای تابع پیشنهادی

$$p = p(x)$$

که بتواند بهترین توافق را با داده داشته باشد، انتظار داریم

$$
\begin{aligned}
(p(x_1) - y_1) &\to 0\\
(p(x_2) - y_2) &\to 0\\
(p(x_3) - y_3) &\to 0\\
&\cdots\\
(p(x_n) - y_n) &\to 0
\end{aligned}
$$

هر کدام از جملاتی که به طرف صفر میل می‌کند می‌تواند مقادیر مثبت یا منفی داشته باشد. برای مستقل کردن عبارتهای از علامت، **مربع** آنها را بررسی می‌کنیم.

روش کمترین مربعات

برای n داده

x	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
y	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_n

می خواهیم معادله **بهترین** منحنی را برای این مجموعه داده‌ها بیابیم.

هر کدام از جملاتی که به طرف صفر میل می‌کند می‌تواند مقادیر مثبت یا منفی داشته باشد. برای مستقل کردن عبارتهای از علامت، **مربع** آنها را بررسی می‌کنیم.

$$(p(x_1) - y_1)^2 \to 0$$
$$(p(x_2) - y_2)^2 \to 0$$
$$(p(x_3) - y_3)^2 \to 0$$
$$\cdots$$
$$(p(x_n) - y_n)^2 \to 0$$

برای بررسی رفتار جمعی داده در بدست آوردن معادله بهترین منحنی، تابع ای از جمیع جملات بطرف صفر را در نظر می‌گیریم.

روش کمترین مربعات

برای n داده

x	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
y	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_n

می خواهیم معادله **بهترین** منحنی را برای این مجموعه داده‌ها بیابیم.

برای بررسی رفتار جمعی داده در بدست آوردن معادله بهترین محنی، تابع ای از جمیع جملات بطرف صفر را در نظر می‌گیریم.

$$(p(x_1) - y_1)^2 \to 0$$
$$(p(x_2) - y_2)^2 \to 0$$
$$(p(x_3) - y_3)^2 \to 0$$
$$\cdots$$
$$(p(x_n) - y_n)^2 \to 0$$

$$L = \sum_i^n (p(x_i) - y_i)^2$$

روش کمترین مربعات

برای n داده

x	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
y	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_n

می خواهیم معادله **بهترین** منحنی را برای این مجموعه داده‌ها بیابیم.

$$L = \sum_i^n (p(x_i) - y_i)^2$$

اگر معادله بهترین منحنی **خطی** باشد، یعنی

$$p(x) = a_0 + a_1 x$$

که a_0 و a_1 کمیتهای ثابت و نامشخص هستند. در این صورت

$$L = \sum_i^n (a_0 + a_1 x_i - y_i)^2 = L(a_0, a_1)$$

هدف پیدا کردن ثوابت a_0 و a_1 با کمینه کردن عبارت بالا است.

روش کمترین مربعات

کمینه کردن تابع

$$L(a_0, a_1) = \sum_i^n (a_0 + a_1 x_i - y_i)^2$$

وقتی معادله بهترین منحنی خطی باشد.
جهت کمینه سازی

$$\frac{\partial L}{\partial a_0} = 0 : \quad 2\sum_i^n (a_0 + a_1 x_i - y_i) = 0$$

$$\left(\sum_i^n 1\right) a_0 + \left(\sum_i^n x_i\right) a_1 = \sum_i^n y_i$$

و

$$\frac{\partial L}{\partial a_1} = 0 : \quad 2\sum_i^n x_i(a_0 + a_1 x_i - y_i) = 0$$

$$\left(\sum_i^n x_i\right) a_0 + \left(\sum_i^n x_i^2\right) a_1 = \sum_i^n x_i y_i$$

روش کمترین مربعات

کمینه کردن تابع

$$L(a_0, a_1) = \sum_i^n (a_0 + a_1 x_i - y_i)^2$$

وقتی معادله بهترین منحنی خطی باشد.
جهت کمینه سازی

$$\begin{aligned} n a_0 + \left(\sum_i^n x_i\right) a_1 &= \sum_i^n y_i \\ \left(\sum_i^n x_i\right) a_0 + \left(\sum_i^n x_i^2\right) a_1 &= \sum_i^n x_i y_i \end{aligned}, \qquad \sum_i^n 1 = n$$

دستگاه دو معادله و دو مجهول a_0 و a_1،

$$\begin{bmatrix} n & \sum_i^n x_i \\ \sum_i^n x_i & \sum_i^n x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i^n y_i \\ \sum_i^n x_i y_i \end{bmatrix}$$

روش کمترین مربعات

بدین ترتیب

$$a_0 = \frac{\left(\sum_i^n x_i^2\right)\left(\sum_i^n y_i\right) - \left(\sum_i^n x_i\right)\left(\sum_i^n x_i y_i\right)}{n\left(\sum_i^n x_i^2\right) - \left(\sum_i^n x_i\right)^2}$$

$$a_1 = \frac{n\left(\sum_i^n x_i y_i\right) - \left(\sum_i^n x_i\right)\left(\sum_i^n y_i\right)}{n\left(\sum_i^n x_i^2\right) - \left(\sum_i^n x_i\right)^2}$$

حالا این سوال باقی می‌ماند که **عدم قطعیت در a_0 و a_1 چیست؟**

نکته ۱: هر y_i نسبت به معادله منحنی $y = a_0 + a_1 x$ یک عدم قطعیت دارد که مقدار آن برای همه y_iها یکسان فرض می شود.

نکته ۲: بخاطر عدم قطعیت در y_iها، a_0 و a_1 هر دو دارای عدم قطعیت هستند. این عدم قطعیت‌ها **انحراف معیار میانگین‌ها** s_{ma_0} و s_{ma_1} است. برای محاسبه s_{ma_0} و s_{ma_1} ما به **انحراف معیار** s_y نیاز داریم.

نکته ۳: دوباره این سوال پیش می‌آید که **عدم قطعیت آماری در اندازه گیری $y_1, y_2, \cdots, y_n$ چیست؟** در این حالت نیاز به انحراف معیار s_y است.

روش کمترین مربعات

محاسبه انحراف معیار s_y،

$$s_y = \sqrt{\frac{1}{n-2}\sum_{i}^{n}(a_0 + a_1 x_i - y_i)^2}$$

نکته: بدلیل وجود دو ثابت a_0 و a_1 در معادله بهترین منحنی، تعداد داده‌ها در مخرج کسر از n به $n-2$ تقلیل پیدا می‌کند.

محاسبه انحراف معیار میانگین s_{my}،

$$s_{my} = \frac{s_y}{\sqrt{n}}$$

بدین ترتیب برای هر y_i نتیجه عدم قطعیت یکسان و بصورت زیر گزارش می‌شود،

$$y_i \pm s_{my}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

روش کمترین مربعات

برای محاسبه خطای a_0 از رابطه انتشار خطا استفاده می‌کنیم. با توجه به

$$a_0 = \frac{\left(\sum_i^n x_i^2\right)\left(\sum_i^n y_i\right) - \left(\sum_i^n x_i\right)\left(\sum_i^n x_i y_i\right)}{n\left(\sum_i^n x_i^2\right) - \left(\sum_i^n x_i\right)^2}$$

انحراف معیار میانگین بصورت زیر داده می‌شود

$$s_{ma_0}^2 = \sum_j^n \left(\frac{\partial a_0}{\partial y_j}\right)^2 s_{my_j}^2$$

قبلا اشاره کردید که s_{my_j} برای همه‌ی y_jها یکسان و برابر با s_{my} است، بنابراین

$$s_{ma_0}^2 = s_{my}^2 \sum_j^n \left(\frac{\partial a_0}{\partial y_j}\right)^2$$

روش کمترین مربعات

برای محاسبه خطای a_0 از رابطه انتشار خطا استفاده می‌کنیم. با توجه به

$$a_0 = \frac{\left(\sum_i^n x_i^2\right)\left(\sum_i^n y_i\right) - \left(\sum_i^n x_i\right)\left(\sum_i^n x_i y_i\right)}{n\left(\sum_i^n x_i^2\right) - \left(\sum_i^n x_i\right)^2}$$

بنابراین

$$s_{ma_0}^2 = s_{my}^2 \sum_j^n \left(\frac{\partial a_0}{\partial y_j}\right)^2$$

که

$$\frac{\partial a_0}{\partial y_j} = \frac{\left(\sum_i^n x_i^2\right) - \left(\sum_i^n x_i\right) x_j}{n\left(\sum_i^n x_i^2\right) - \left(\sum_i^n x_i\right)^2}$$

$$\sum_j^n \left(\frac{\partial a_0}{\partial y_j}\right)^2 = \sum_j^n \frac{\left(\sum_i^n x_i^2\right)^2 + \left(\sum_i^n x_i\right)^2 x_j^2 - 2\left(\sum_i^n x_i^2\right)\left(\sum_i^n x_i\right) x_j}{\left[n\left(\sum_i^n x_i^2\right) - \left(\sum_i^n x_i\right)^2\right]^2}$$

روش کمترین مربعات

برای محاسبه خطای a_0 از رابطه انتشار خطا استفاده می‌کنیم. با توجه به

$$a_0 = \frac{\left(\sum_i^n x_i^2\right)\left(\sum_i^n y_i\right) - \left(\sum_i^n x_i\right)\left(\sum_i^n x_i y_i\right)}{n\left(\sum_i^n x_i^2\right) - \left(\sum_i^n x_i\right)^2}$$

بنابراین

$$s_{ma_0}^2 = s_{my}^2 \sum_j^n \left(\frac{\partial a_0}{\partial y_j}\right)^2$$

$$\sum_j^n \left(\frac{\partial a_0}{\partial y_j}\right)^2 = \sum_j^n \frac{\left(\sum_i^n x_i^2\right)^2 + \left(\sum_i^n x_i\right)^2 x_j^2 - 2\left(\sum_i^n x_i^2\right)\left(\sum_i^n x_i\right) x_j}{\left[n\left(\sum_i^n x_i^2\right) - \left(\sum_i^n x_i\right)^2\right]^2}$$

$$\sum_j^n \left(\frac{\partial a_0}{\partial y_j}\right)^2 =$$

$$= \frac{\left(\sum_i^n x_i^2\right)^2 \left(\sum_j^n 1\right) + \left(\sum_i^n x_i\right)^2 \left(\sum_j^n x_j^2\right) - 2\left(\sum_i^n x_i^2\right)\left(\sum_i^n x_i\right)\left(\sum_j^n x_j\right)}{\left[n\left(\sum_i^n x_i^2\right) - \left(\sum_i^n x_i\right)^2\right]^2}$$

روش کمترین مربعات

برای محاسبه خطای a_0 از رابطه انتشار خطا استفاده می‌کنیم. با توجه به

$$a_0 = \frac{\left(\sum_i^n x_i^2\right)\left(\sum_i^n y_i\right) - \left(\sum_i^n x_i\right)\left(\sum_i^n x_i y_i\right)}{n\left(\sum_i^n x_i^2\right) - \left(\sum_i^n x_i\right)^2}$$

بنابراین

$$s_{ma_0}^2 = s_{my}^2 \sum_j^n \left(\frac{\partial a_0}{\partial y_j}\right)^2$$

$$\sum_j^n \left(\frac{\partial a_0}{\partial y_j}\right)^2 =$$

$$= \frac{\left(\sum_i^n x_i^2\right)^2 \left(\sum_j^n 1\right) + \left(\sum_i^n x_i\right)^2 \left(\sum_j^n x_j^2\right) - 2\left(\sum_i^n x_i^2\right)\left(\sum_i^n x_i\right)\left(\sum_j^n x_j\right)}{\left[n\left(\sum_i^n x_i^2\right) - \left(\sum_i^n x_i\right)^2\right]^2}$$

$$= \frac{n\left(\sum_i^n x_i^2\right)^2 + \left(\sum_i^n x_i\right)^2\left(\sum_i^n x_i^2\right) - 2\left(\sum_i^n x_i^2\right)\left(\sum_i^n x_i\right)^2}{\left[n\left(\sum_i^n x_i^2\right) - \left(\sum_i^n x_i\right)^2\right]^2}$$

روش کمترین مربعات

برای محاسبه خطای a_0 از رابطه انتشار خطا استفاده می‌کنیم. با توجه به

$$a_0 = \frac{\left(\sum_i^n x_i^2\right)\left(\sum_i^n y_i\right) - \left(\sum_i^n x_i\right)\left(\sum_i^n x_i y_i\right)}{n\left(\sum_i^n x_i^2\right) - \left(\sum_i^n x_i\right)^2}$$

بنابراین

$$s_{ma_0}^2 = s_{my}^2 \sum_j^n \left(\frac{\partial a_0}{\partial y_j}\right)^2$$

$$\sum_j^n \left(\frac{\partial a_0}{\partial y_j}\right)^2 =$$

$$= \frac{n\left(\sum_i^n x_i^2\right)^2 + \left(\sum_i^n x_i\right)^2\left(\sum_i^n x_i^2\right) - 2\left(\sum_i^n x_i^2\right)\left(\sum_i^n x_i\right)^2}{[n\left(\sum_i^n x_i^2\right) - \left(\sum_i^n x_i\right)^2]^2}$$

$$= \frac{n\left(\sum_i^n x_i^2\right)^2 - \left(\sum_i^n x_i^2\right)\left(\sum_i^n x_i\right)^2}{[n\left(\sum_i^n x_i^2\right) - \left(\sum_i^n x_i\right)^2]^2} = \frac{\left(\sum_i^n x_i^2\right)\left[n\left(\sum_i^n x_i^2\right) - \left(\sum_i^n x_i\right)^2\right]}{[n\left(\sum_i^n x_i^2\right) - \left(\sum_i^n x_i\right)^2]^2}$$

روش کمترین مربعات

برای محاسبه خطای a_0 از رابطه انتشار خطا استفاده می‌کنیم. با توجه به

$$a_0 = \frac{\left(\sum_i^n x_i^2\right)\left(\sum_i^n y_i\right) - \left(\sum_i^n x_i\right)\left(\sum_i^n x_i y_i\right)}{n\left(\sum_i^n x_i^2\right) - \left(\sum_i^n x_i\right)^2}$$

بنابراین

$$s_{ma_0}^2 = s_{my}^2 \sum_j^n \left(\frac{\partial a_0}{\partial y_j}\right)^2$$

$$\sum_j^n \left(\frac{\partial a_0}{\partial y_j}\right)^2 = \frac{\sum_i^n x_i^2}{n\left(\sum_i^n x_i^2\right) - \left(\sum_i^n x_i\right)^2}$$

$$s_{ma_0}^2 = s_{my}^2 \frac{\sum_i^n x_i^2}{n\left(\sum_i^n x_i^2\right) - \left(\sum_i^n x_i\right)^2}$$

بصورت یک گزارش

$$a_0 \pm s_{ma_0}$$

روش کمترین مربعات

برای محاسبه خطای a_1 از رابطه انتشار خطا استفاده می‌کنیم. با توجه به

$$a_1 = \frac{n\left(\sum_i^n x_i y_i\right) - \left(\sum_i^n x_i\right)\left(\sum_i^n y_i\right)}{n\left(\sum_i^n x_i^2\right) - \left(\sum_i^n x_i\right)^2}$$

انحراف معیار میانگین بصورت زیر داده می‌شود

$$s_{ma_1}^2 = \sum_j^n \left(\frac{\partial a_1}{\partial y_j}\right)^2 s_{my_j}^2$$

قبلا اشاره کردید که s_{my_j} برای همه‌ی y_jها یکسان و برابر با s_{my} است، بنابراین

$$s_{ma_1}^2 = s_{my}^2 \sum_j^n \left(\frac{\partial a_1}{\partial y_j}\right)^2$$

روش کمترین مربعات

برای محاسبه خطای a_0 از رابطه انتشار خطا استفاده می‌کنیم. با توجه به

$$a_1 = \frac{n\left(\sum_i^n x_i y_i\right) - \left(\sum_i^n x_i\right)\left(\sum_i^n y_i\right)}{n\left(\sum_i^n x_i^2\right) - \left(\sum_i^n x_i\right)^2}$$

بنابراین

$$s_{ma_1}^2 = s_{my}^2 \sum_j^n \left(\frac{\partial a_1}{\partial y_j}\right)^2$$

که

$$\frac{\partial a_1}{\partial y_j} = \frac{n x_j - \left(\sum_i^n x_i\right)}{n\left(\sum_i^n x_i^2\right) - \left(\sum_i^n x_i\right)^2}$$

$$\sum_j^n \left(\frac{\partial a_1}{\partial y_j}\right)^2 = \sum_j^n \frac{n^2 x_j^2 + \left(\sum_i^n x_i\right)^2 - 2n x_j \left(\sum_i^n x_i\right)}{\left[n\left(\sum_i^n x_i^2\right) - \left(\sum_i^n x_i\right)^2\right]^2}$$

روش کمترین مربعات

برای محاسبه خطای a_0 از رابطه انتشار خطا استفاده می‌کنیم. با توجه به

$$a_1 = \frac{n\left(\sum_i^n x_i y_i\right) - \left(\sum_i^n x_i\right)\left(\sum_i^n y_i\right)}{n\left(\sum_i^n x_i^2\right) - \left(\sum_i^n x_i\right)^2}$$

بنابراین

$$s_{ma_1}^2 = s_{my}^2 \sum_j^n \left(\frac{\partial a_1}{\partial y_j}\right)^2$$

$$\sum_j^n \left(\frac{\partial a_1}{\partial y_j}\right)^2 = \sum_j^n \frac{n^2 x_j^2 + \left(\sum_i^n x_i\right)^2 - 2n x_j \left(\sum_i^n x_i\right)}{\left[n\left(\sum_i^n x_i^2\right) - \left(\sum_i^n x_i\right)^2\right]^2}$$

$$\sum_j^n \left(\frac{\partial a_1}{\partial y_j}\right)^2 = \frac{n^2 \left(\sum_j^n x_j^2\right) + \left(\sum_i^n x_i\right)^2 \left(\sum_j^n 1\right) - 2n \left(\sum_j^n x_j\right)\left(\sum_i^n x_i\right)}{\left[n\left(\sum_i^n x_i^2\right) - \left(\sum_i^n x_i\right)^2\right]^2}$$

روش کمترین مربعات

برای محاسبه خطای a_0 از رابطه انتشار خطا استفاده می‌کنیم. با توجه به

$$a_1 = \frac{n\left(\sum_i^n x_i y_i\right) - \left(\sum_i^n x_i\right)\left(\sum_i^n y_i\right)}{n\left(\sum_i^n x_i^2\right) - \left(\sum_i^n x_i\right)^2}$$

بنابراین

$$s_{ma_1}^2 = s_{my}^2 \sum_j^n \left(\frac{\partial a_1}{\partial y_j}\right)^2$$

$$\sum_j^n \left(\frac{\partial a_1}{\partial y_j}\right)^2 = \frac{n^2\left(\sum_j^n x_j^2\right) + \left(\sum_i^n x_i\right)^2\left(\sum_j^n 1\right) - 2n\left(\sum_j^n x_j\right)\left(\sum_i^n x_i\right)}{\left[n\left(\sum_i^n x_i^2\right) - \left(\sum_i^n x_i\right)^2\right]^2}$$

$$\sum_j^n \left(\frac{\partial a_1}{\partial y_j}\right)^2 = \frac{n^2\left(\sum_i^n x_i^2\right) + n\left(\sum_i^n x_i\right)^2 - 2n\left(\sum_i^n x_i\right)\left(\sum_i^n x_i\right)}{\left[n\left(\sum_i^n x_i^2\right) - \left(\sum_i^n x_i\right)^2\right]^2}$$

روش کمترین مربعات

برای محاسبه خطای a_0 از رابطه انتشار خطا استفاده می‌کنیم. با توجه به

$$a_1 = \frac{n\left(\sum_i^n x_i y_i\right) - \left(\sum_i^n x_i\right)\left(\sum_i^n y_i\right)}{n\left(\sum_i^n x_i^2\right) - \left(\sum_i^n x_i\right)^2}$$

بنابراین

$$s_{ma_1}^2 = s_{my}^2 \sum_j^n \left(\frac{\partial a_1}{\partial y_j}\right)^2$$

$$\sum_j^n \left(\frac{\partial a_1}{\partial y_j}\right)^2 = \frac{n^2\left(\sum_i^n x_i^2\right) + n\left(\sum_i^n x_i\right)^2 - 2n\left(\sum_i^n x_i\right)\left(\sum_i^n x_i\right)}{[n\left(\sum_i^n x_i^2\right) - \left(\sum_i^n x_i\right)^2]^2}$$

$$\sum_j^n \left(\frac{\partial a_1}{\partial y_j}\right)^2 = \frac{n^2\left(\sum_i^n x_i^2\right) - n\left(\sum_i^n x_i\right)^2}{[n\left(\sum_i^n x_i^2\right) - \left(\sum_i^n x_i\right)^2]^2} = \frac{n[n\left(\sum_i^n x_i^2\right) - \left(\sum_i^n x_i\right)^2]}{[n\left(\sum_i^n x_i^2\right) - \left(\sum_i^n x_i\right)^2]^2}$$

$$\sum_j^n \left(\frac{\partial a_1}{\partial y_j}\right)^2 = \frac{n}{n\left(\sum_i^n x_i^2\right) - \left(\sum_i^n x_i\right)^2}$$

روش کمترین مربعات

برای محاسبه خطای a_0 از رابطه انتشار خطا استفاده می‌کنیم. با توجه به

$$a_1 = \frac{n\left(\sum_i^n x_i y_i\right) - \left(\sum_i^n x_i\right)\left(\sum_i^n y_i\right)}{n\left(\sum_i^n x_i^2\right) - \left(\sum_i^n x_i\right)^2}$$

بنابراین

$$s_{ma_1}^2 = s_{my}^2 \sum_j^n \left(\frac{\partial a_1}{\partial y_j}\right)^2$$

$$\sum_j^n \left(\frac{\partial a_1}{\partial y_j}\right)^2 = \frac{n}{n\left(\sum_i^n x_i^2\right) - \left(\sum_i^n x_i\right)^2}$$

$$s_{ma_1}^2 = s_{my}^2 \frac{n}{n\left(\sum_i^n x_i^2\right) - \left(\sum_i^n x_i\right)^2}$$

بصورت یک گزارش

$$a_1 \pm s_{ma_1}$$

روش کمترین مربعات

مثال ۱: سرعت یک ذره‌ای بصورت تابعی از زمان را در نظر بگیرید. داده ها به شرح زیر است:

$t(s)$	$v(m/s)$
1	0.45
2	0.81
3	0.91
4	1.01
5	1.36
6	1.56
7	1.65
8	1.85
9	2.17

$$a_0 = \frac{\left(\sum_i^9 t_i^2\right)\left(\sum_i^9 v_i\right) - \left(\sum_i^9 t_i\right)\left(\sum_i^9 t_i v_i\right)}{9\left(\sum_i^9 t_i^2\right) - \left(\sum_i^9 t_i\right)^2} = 0.30527778 = 0.305 \text{ m/s}$$

روش کمترین مربعات

مثال ۱: سرعت یک ذره‌ای بصورت تابعی از زمان را در نظر بگیرید. داده ها به شرح زیر است:

$t(s)$	$v(m/s)$
1	0.45
2	0.81
3	0.91
4	1.01
5	1.36
6	1.56
7	1.65
8	1.85
9	2.17

$$a_1 = \frac{9\left(\sum_i^9 t_i v_i\right) - \left(\sum_i^9 t_i\right)\left(\sum_i^9 v_i\right)}{9\left(\sum_i^9 t_i^2\right) - \left(\sum_i^9 t_i\right)^2} = 0.2005 = 0.201 \text{ m/s}^2$$

روش کمترین مربعات

مثال ۱: سرعت یک ذره‌ای بصورت تابعی از زمان را در نظر بگیرید. داده ها به شرح زیر است:

$t(s)$	$v(m/s)$
1	0.45
2	0.81
3	0.91
4	1.01
5	1.36
6	1.56
7	1.65
8	1.85
9	2.17

$$s_v = \sqrt{\frac{1}{9-2}\sum_i^9 (a_0 + a_1 t_i - v_i)^2} = 0.074967189 = 0.075 \text{ m/s}$$

روش کمترین مربعات

مثال ۱: سرعت یک ذره‌ای بصورت تابعی از زمان را در نظر بگیرید. داده ها به شرح زیر است:

$t(s)$	$v(m/s)$
1	0.45
2	0.81
3	0.91
4	1.01
5	1.36
6	1.56
7	1.65
8	1.85
9	2.17

$$s_{mv} = \frac{s_v}{\sqrt{9}} = 0.024989063 = 0.025 \text{ m/s}$$

بنابراین

$$v_i \pm s_{mv} = v_i \pm 0.025 \text{ m/s}$$

روش کمترین مربعات

مثال ۱: سرعت یک ذره‌ای بصورت تابعی از زمان را در نظر بگیرید. داده ها به شرح زیر است:

$t(s)$	$v(m/s)$
1	0.45
2	0.81
3	0.91
4	1.01
5	1.36
6	1.56
7	1.65
8	1.85
9	2.17

$$s_{ma_0} = \sqrt{s_{mv}^2 \frac{\sum_i^9 t_i^2}{9\left(\sum_i^9 t_i^2\right) - \left(\sum_i^9 t_i\right)^2}}$$

$$s_{ma_0} = 0.018154133 = 0.018$$

بصورت یک گزارش

$$a_0 \pm s_{ma_0} = 0.305 \pm 0.018 \text{ m/s}$$

روش کمترین مربعات

مثال ۱: سرعت یک ذره‌ای بصورت تابعی از زمان را در نظر بگیرید. داده ها به شرح زیر است:

$t(s)$	$v(m/s)$
1	0.45
2	0.81
3	0.91
4	1.01
5	1.36
6	1.56
7	1.65
8	1.85
9	2.17

$$s_{ma_1} = \sqrt{s_{mv}^2 \frac{9}{9\left(\sum_i^9 t_i^2\right) - \left(\sum_i^9 t_i\right)^2}}$$

$$s_{ma_1} = 0.0032260741 = 0.003$$

بصورت یک گزارش

$$a_1 \pm s_{ma_1} = 0.201 \pm 0.003 \text{ m/s}^2$$

روش کمترین مربعات

مثال ۲: مسافت طی شده توسط یک جسم را به عنوان تابعی از زمان در نظر بگیرید.

$t(s)$	$t^2(s)$	$x(m)$
1	1	0.20
2	4	0.43
3	9	0.81
4	16	1.57
5	25	2.43
6	36	3.81
7	49	4.80
8	64	6.39

$$a_0 = \frac{\left(\sum_i^8 t_i^4\right)\left(\sum_i^8 x_i\right) - \left(\sum_i^8 t_i^2\right)\left(\sum_i^8 t_i^2 x_i\right)}{8\left(\sum_i^8 t_i^4\right) - \left(\sum_i^8 t_i^2\right)^2} = 0.0315 = 0.03 \text{ m}$$

روش کمترین مربعات

مثال ۲: مسافت طی شده توسط یک جسم را به عنوان تابعی از زمان در نظر بگیرید.

$t(s)$	$t^2(s)$	$x(m)$
1	1	0.20
2	4	0.43
3	9	0.81
4	16	1.57
5	25	2.43
6	36	3.81
7	49	4.80
8	64	6.39

$$a_1 = \frac{8\left(\sum_i^8 t_i^2 x_i\right) - \left(\sum_i^8 t_i^2\right)\left(\sum_i^8 x_i\right)}{8\left(\sum_i^8 t_i^4\right) - \left(\sum_i^8 t_i^2\right)^2} = 0.098519608 = 0.1\ \mathrm{m/s}^2$$

روش کمترین مربعات

مثال ۲: مسافت طی شده توسط یک جسم را به عنوان تابعی از زمان در نظر بگیرید.

$t(s)$	$t^2(s)$	$x(m)$
1	1	0.20
2	4	0.43
3	9	0.81
4	16	1.57
5	25	2.43
6	36	3.81
7	49	4.80
8	64	6.39

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{8-2}\sum_i^8 (a_0 + a_1 t_i^2 - x_i)^2} = 0.11601985 = 0.12 \text{ m}$$

روش کمترین مربعات

مثال ۲: مسافت طی شده توسط یک جسم را به عنوان تابعی از زمان در نظر بگیرید.

$t(s)$	$t^2(s)$	$x(m)$
1	1	0.20
2	4	0.43
3	9	0.81
4	16	1.57
5	25	2.43
6	36	3.81
7	49	4.80
8	64	6.39

$$s_{mx} = \frac{s_x}{\sqrt{8}} = 0.04101921 = 0.04 \text{ m}$$

بنابراین

$$x_i \pm s_{mx} = x_i \pm 0.04 \text{ m}$$

روش کمترین مربعات

مثال ۲: مسافت طی شده توسط یک جسم را به عنوان تابعی از زمان در نظر بگیرید.

$t(s)$	$t^2(s)$	$x(m)$
1	1	0.20
2	4	0.43
3	9	0.81
4	16	1.57
5	25	2.43
6	36	3.81
7	49	4.80
8	64	6.39

$$s_{ma_0} = \sqrt{s_{mx}^2 \frac{\sum_i^8 t_i^4}{8\left(\sum_i^8 t_i^4\right) - \left(\sum_i^8 t_i^2\right)^2}}$$

$$s_{ma_0} = 0.022733039 = 0.02$$

بصورت یک گزارش

$$a_0 \pm s_{ma_0} = 0.03 \pm 0.02 \text{ m}$$

روش کمترین مربعات

مثال ۲: مسافت طی شده توسط یک جسم را به عنوان تابعی از زمان در نظر بگیرید.

$t(s)$	$t^2(s)$	$x(m)$
1	1	0.20
2	4	0.43
3	9	0.81
4	16	1.57
5	25	2.43
6	36	3.81
7	49	4.80
8	64	6.39

$$s_{ma_1} = \sqrt{s_{mx}^2 \frac{8}{8\left(\sum_i^8 t_i^4\right) - \left(\sum_i^8 t_i^2\right)^2}}$$

$$s_{ma_1} = 0.00068651998 = 0.001$$

بصورت یک گزارش

$$a_1 \pm s_{ma_1} = 0.100 \pm 0.001 \text{ m/s}^2$$

روش کمترین مربعات
کمینه کردن تابع

$$L(a_0, a_1, a_2) = \sum_i^n (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i)^2$$

وقتی معادله بهترین منحنی درجه دو باشد.
جهت کمینه سازی

$$\frac{\partial L}{\partial a_0} = 0 : \quad 2\sum_i^n (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i) = 0$$

$$\left(\sum_i^n 1\right) a_0 + \left(\sum_i^n x_i\right) a_1 + \left(\sum_i^n x_i^2\right) a_2 = \sum_i^n y_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial a_1} = 0 : \quad 2\sum_i^n x_i (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i) = 0$$

$$\left(\sum_i^n x_i\right) a_0 + \left(\sum_i^n x_i^2\right) a_1 + \left(\sum_i^n x_i^3\right) a_2 = \sum_i^n x_i y_i$$

روش کمترین مربعات

کمینه کردن تابع

$$L(a_0, a_1, a_2) = \sum_i^n (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i)^2$$

وقتی معادله بهترین منحنی درجه دو باشد.
جهت کمینه سازی

$$\frac{\partial L}{\partial a_2} = 0: \quad 2\sum_i^n x_i^2 (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i) = 0$$

$$\left(\sum_i^n x_i^2\right) a_0 + \left(\sum_i^n x_i^3\right) a_1 + \left(\sum_i^n x_i^4\right) a_2 = \sum_i^n x_i^2 y_i$$

روش کمترین مربعات

کمینه کردن تابع

$$L(a_0, a_1, a_2) = \sum_i^n (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i)^2$$

وقتی معادله بهترین منحنی درجه دو باشد.
جهت کمینه سازی

$$\left(\sum_i^n 1\right) a_0 + \left(\sum_i^n x_i\right) a_1 + \left(\sum_i^n x_i^2\right) a_2 = \sum_i^n y_i$$

$$\left(\sum_i^n x_i\right) a_0 + \left(\sum_i^n x_i^2\right) a_1 + \left(\sum_i^n x_i^3\right) a_2 = \sum_i^n x_i y_i$$

$$\left(\sum_i^n x_i^2\right) a_0 + \left(\sum_i^n x_i^3\right) a_1 + \left(\sum_i^n x_i^4\right) a_2 = \sum_i^n x_i^2 y_i$$

روش کمترین مربعات

کمینه کردن تابع

$$L(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i}^{n} (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i)^2$$

وقتی معادله بهترین منحنی درجه دو باشد.
جهت کمینه سازی

$$\begin{bmatrix} n & \sum_i^n x_i & \sum_i^n x_i^2 \\ \sum_i^n x_i & \sum_i^n x_i^2 & \sum_i^n x_i^3 \\ \sum_i^n x_i^2 & \sum_i^n x_i^3 & \sum_i^n x_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i^n y_i \\ \sum_i^n x_i y_i \\ \sum_i^n x_i^2 y_i \end{bmatrix}$$

بدست آوردن a_0، a_1 و a_2 از حل دستگاه معادلات خطی بالا.

مراجع

- The Art of Experimental Physics, Daryl W. Preston and Eric R. Dietz, John Wiley and Sons (1991).
- A Student's Guide to Data and Error Analysis, Herman J. C. Berendsen, Cambridge University Press (2011).
- Basic Concepts of Data and Error Analysis: With Introductions to Probability and Statistics and to Computer Methods, Panayiotis Nicos Kaloyerou, Springer (2018).