جلسه سوم

ترمودینامیک و مکانیک آماری

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه
دانشگاه قم
مهر ۹۹

مفاهیمی در فیزیک حرارت

مطالب و عناوین:

- مبانی آماری فیزیک حرارت
- **ریاضیات مفید**
- گرما
- احتمال
- دما و فاکتور بولتزمن
- توزیع ماکسول بولتزمن
- فشار
- اثر افیوژن مولکولی
- پویش آزاد متوسط و برخوردها
- انرژی و قانون اول ترمودینامیک
- فرایندهای همدما و بی‌دررو
- ماشین‌های حرارتی و قانون دوم ترمودینامیک
- آنتروپی

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

ریاضیات مفید

یکی از پر کاربردترین انتگرالها در مسائل ترمودینامیک انتگرال فاکتوریل است،

$$n! = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x, \qquad n > 0$$

بررسی درستی انتگرال فاکتوریل به روش استقرا

گام اول

$$n = 0 : \quad 0! = \int_0^\infty e^{-x}\mathrm{d}x$$

می‌دانیم : $\quad 0! = 1$ و $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\mathrm{d}x = -\{e^{-x}\}_0^\infty = -(0-1) = 1$

ریاضیات مفید

یکی از پرکاربردترین انتگرالها در مسائل ترمودینامیک انتگرال **فاکتوریل** است،

$$n! = \int_0^\infty x^n e^{-x}\, \mathrm{d}x$$

بررسی درستی انتگرال فاکتوریل به روش استقرا

گام دوم

اگر $\quad n = k : \quad k! = \int_0^\infty x^k e^{-x} \mathrm{d}x$

آنگاه $\quad n = k+1 : \quad (k+1)! = \int_0^\infty x^{(k+1)} e^{-x} \mathrm{d}x$

ریاضیات مفید

یکی از پرکاربردترین انتگرالها در مسائل ترمودینامیک انتگرال **فاکتوریل** است،

$$n! = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

بررسی درستی انتگرال فاکتوریل به روش استقرا

$$(k+1)! = \int_0^\infty x^{(k+1)} e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^{(k+1)} e^{-x} = (k+1)x^k e^{-x} - x^{(k+1)} e^{-x}$$

$$\mathrm{d}[x^{(k+1)} e^{-x}] = (k+1)x^k e^{-x}\mathrm{d}x - x^{(k+1)} e^{-x}\mathrm{d}x$$

ریاضیات مفید

یکی از پرکاربردترین انتگرالها در مسائل ترمودینامیک انتگرال **فاکتوریل** است،

$$n! = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

بررسی درستی انتگرال فاکتوریل به روش استقرا

$$(k+1)! = \int_0^\infty x^{(k+1)} e^{-x} \mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}[x^{(k+1)}e^{-x}] = (k+1)x^k e^{-x}\mathrm{d}x - x^{(k+1)}e^{-x}\mathrm{d}x$$

$$\int_0^\infty \mathrm{d}[x^{(k+1)}e^{-x}] = \int_0^\infty (k+1)x^k e^{-x}\mathrm{d}x - \int_0^\infty x^{(k+1)}e^{-x}\mathrm{d}x$$

ریاضیات مفید

یکی از پرکاربردترین انتگرالها در مسائل ترمودینامیک انتگرال **فاکتوریل** است،

$$n! = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

بررسی درستی انتگرال فاکتوریل به روش استقرا

$$\int_0^\infty \mathrm{d}[x^{(k+1)}e^{-x}] = \int_0^\infty (k+1)x^k e^{-x}\mathrm{d}x - \int_0^\infty x^{(k+1)}e^{-x}\mathrm{d}x$$

$$[x^{(k+1)}e^{-x}]_0^\infty = (k+1)\int_0^\infty x^k e^{-x}\mathrm{d}x - \int_0^\infty x^{(k+1)}e^{-x}\mathrm{d}x$$

$$[x^{(k+1)}e^{-x}]_0^\infty = 0$$

ریاضیات مفید

یکی از پرکاربردترین انتگرالها در مسائل ترمودینامیک انتگرال **فاکتوریل** است،

$$n! = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

بررسی درستی انتگرال فاکتوریل به روش استقرا

$$0 = (k+1)\int_0^\infty x^k e^{-x}\mathrm{d}x - \int_0^\infty x^{(k+1)} e^{-x}\mathrm{d}x$$

با توجه به شرط گام دوم استقرا : $\int_0^\infty x^k e^{-x}\mathrm{d}x = k!$

ریاضیات مفید

یکی از پرکاربردترین انتگرالها در مسائل ترمودینامیک انتگرال **فاکتوریل** است،

$$n! = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

بررسی درستی انتگرال فاکتوریل به روش استقرا

$$0 = (k+1)k! - \int_0^\infty x^{(k+1)} e^{-x} \mathrm{d}x$$

$$(k+1)k! = \int_0^\infty x^{(k+1)} e^{-x} \mathrm{d}x$$ نهایتا $$(k+1)! = \int_0^\infty x^{(k+1)} e^{-x} \mathrm{d}x$$

ریاضیات مفید

یکی از دیگر از انتگرالها در مسائل ترمودینامیک **تابع گاما** است،

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{(n-1)} e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

با استفاده از انتگرال فاکتوریل می‌توان انتگرال بالا را بصورت زیر نوشت

$$\int_0^\infty x^{(n-1)} e^{-x}\,\mathrm{d}x = (n-1)!$$

بنابراین : $\Gamma(n) = (n-1)! \xrightarrow{n \to n+1} \Gamma(n+1) = n!$

$$n! = n(n-1)! \Rightarrow \Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

ریاضیات مفید

یکی از دیگر از انتگرالها در مسائل ترمودینامیک **تابع گاما** است،

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{(n-1)} e^{-x}\, \mathrm{d}x$$

z	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	4
$\Gamma(z)$	$\frac{4\sqrt{\pi}}{3}$	$-2\sqrt{\pi}$	$\sqrt{\pi}$	1	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$	1	$\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$	2	6

z	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	4
$\Gamma(z)$	$\frac{4\sqrt{\pi}}{3}$	$-2\sqrt{\pi}$	$\sqrt{\pi}$	1	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$	1	$\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$	2	6

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

ریاضیات مفید

یکی از دیگر از انتگرالها در مسائل ترمودینامیک **تابع گاما** است،

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{(n-1)} e^{-x}\, \mathrm{d}x$$

z	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	4
$\Gamma(z)$	$\frac{4\sqrt{\pi}}{3}$	$-2\sqrt{\pi}$	$\sqrt{\pi}$	1	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$	1	$\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$	2	6

$$\Gamma(\frac{3}{2}) = \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}} e^{-x}\, \mathrm{d}x = \int_0^\infty \sqrt{x} e^{-x}\, \mathrm{d}x$$

$$x = y^2, \quad \mathrm{d}x = 2y\mathrm{d}y : \qquad \int_0^\infty \sqrt{x} e^{-x}\, \mathrm{d}x = 2\int_0^\infty y^2 e^{-y^2}\, \mathrm{d}y$$

ریاضیات مفید

یکی از دیگر از انتگرالها در مسائل ترمودینامیک **تابع گاما** است،

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{(n-1)} e^{-x}\, \mathrm{d}x$$

z	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	4
$\Gamma(z)$	$\frac{4\sqrt{\pi}}{3}$	$-2\sqrt{\pi}$	$\sqrt{\pi}$	1	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$	1	$\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$	2	6

$$\Gamma(\frac{3}{2}) = \int_0^\infty \sqrt{x} e^{-x}\, \mathrm{d}x = 2\int_0^\infty y^2 e^{-y^2}\, \mathrm{d}y$$

تابع گوسی : e^{-y^2} انتگرال گوسی : $\int_0^\infty y^2 e^{-y^2}\, \mathrm{d}y$

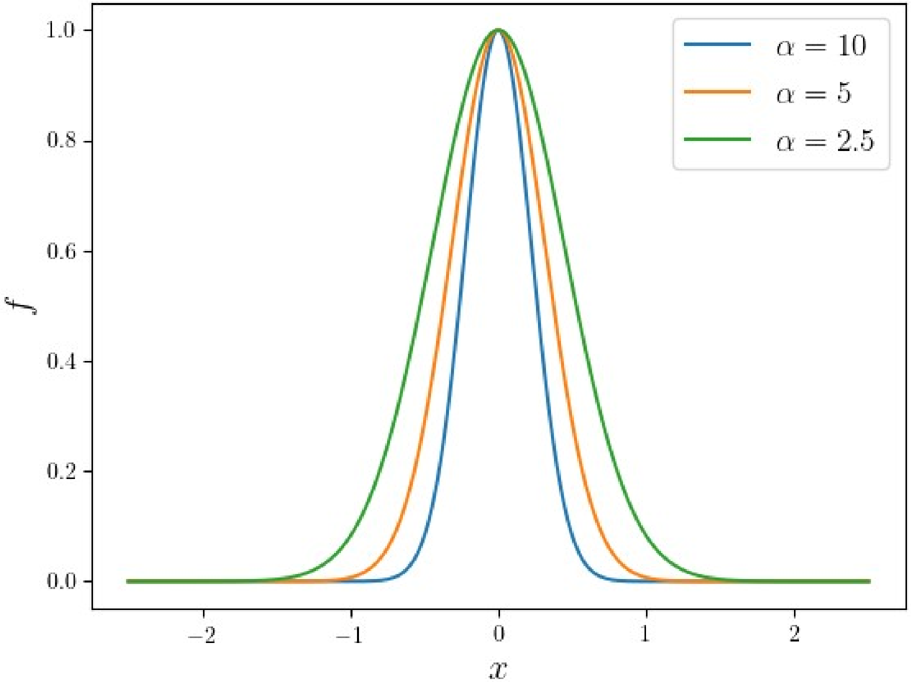
ریاضیات مفید

تابع گوسی

$$f = e^{-\alpha x^2}$$

$$\text{ابعاد :}\quad [\alpha] = \frac{1}{[x^2]}$$

توابع گاوسی به طور گسترده ای در آمار برای توصیف توزیع های طبیعی ، در پردازش سیگنال برای تعریف فیلترهای گاوسی ، در پردازش تصویر که در آن توابع گاوسی دو بعدی برای برای بررسی تاری گوسی و در ریاضیات برای حل معادلات گرما و معادلات انتشار استفاده می شود.



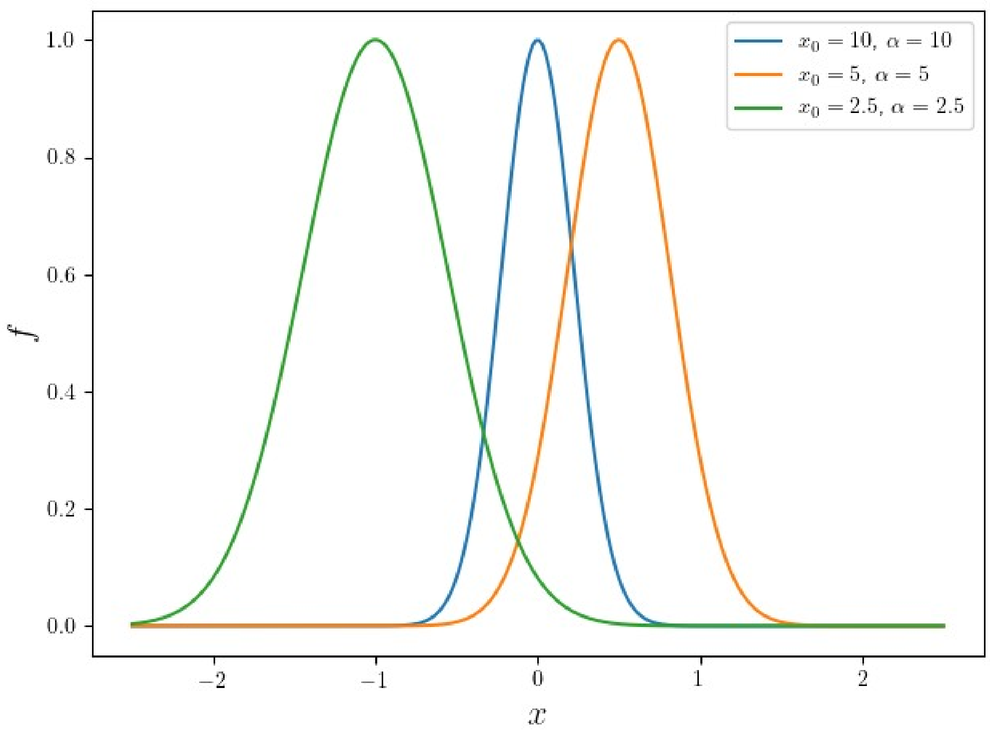
ریاضیات مفید

تابع گوسی

$$f = e^{-\alpha\,(x-x_0)^2}$$

ابعاد : $[x_0] = [x]$

توابع گاوسی به طور گسترده ای در آمار برای توصیف توزیع های طبیعی ، در پردازش سیگنال برای تعریف فیلترهای گاوسی ، در پردازش تصویر که در آن توابع گاوسی دو بعدی برای برای بررسی تاری گوسی و در ریاضیات برای حل معادلات گرما و معادلات انتشار استفاده می شود.

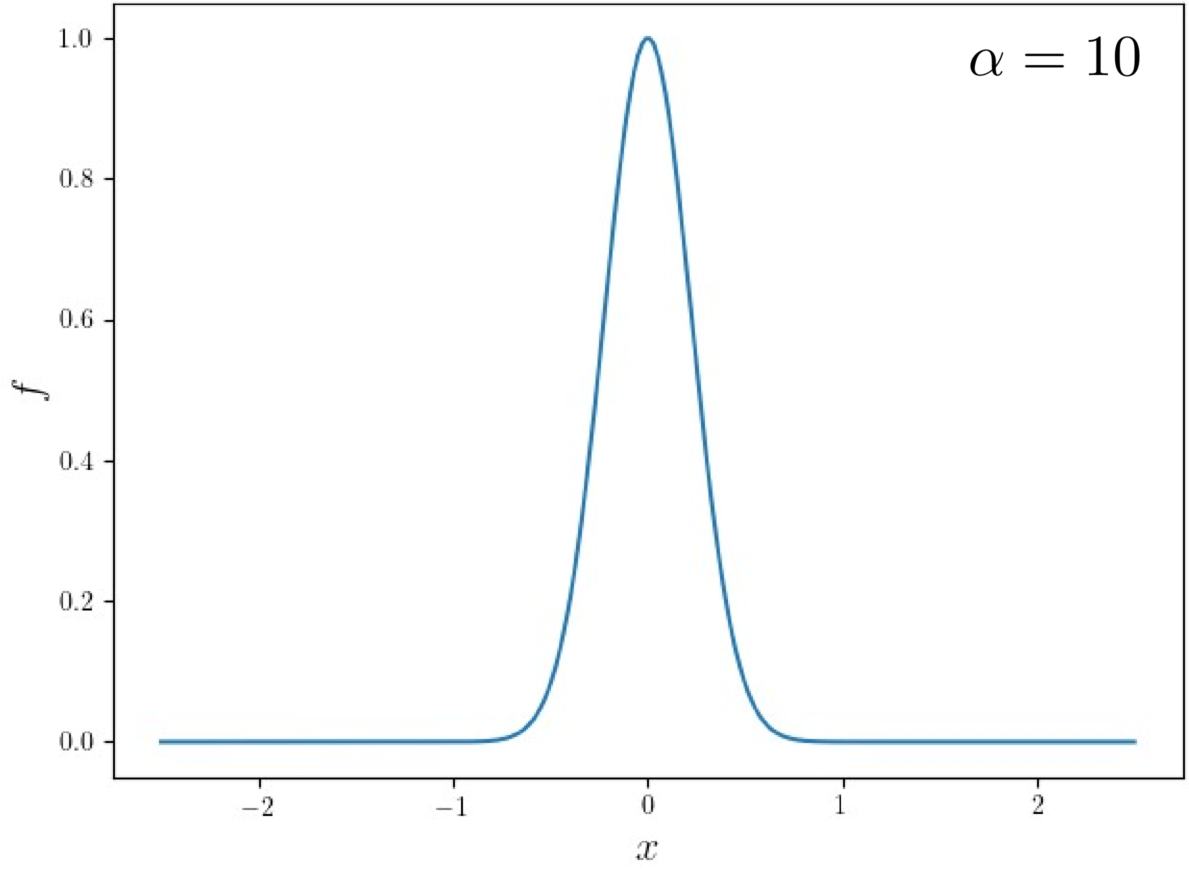


محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

ریاضیات مفید

انتگرال گوسی

$$f = e^{-\alpha\, x^2}$$



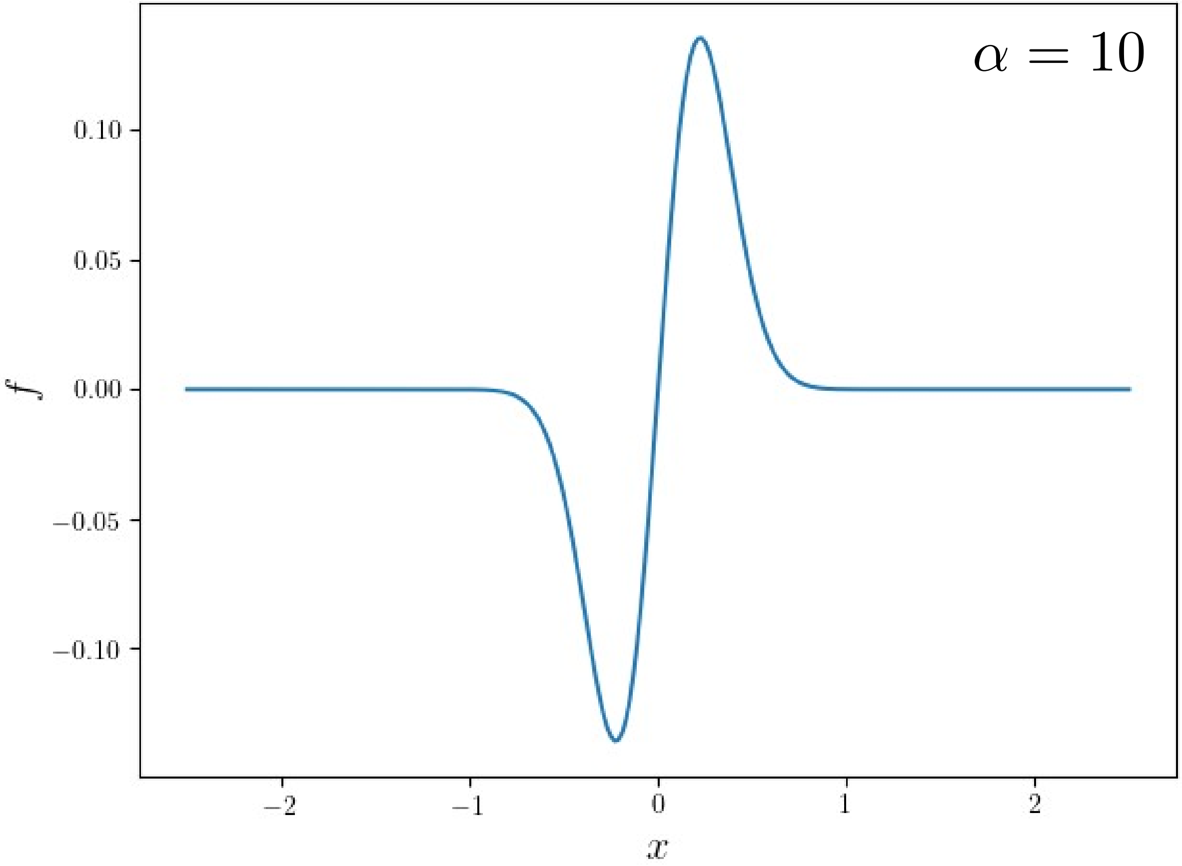
$$I[\alpha] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\, x^2}\, \mathrm{d}x$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\, x^2}\, \mathrm{d}x =$$

$$2\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha\, x^2}\, \mathrm{d}x$$

انتگرال گوسی

$$f = x e^{-\alpha\, x^2}$$



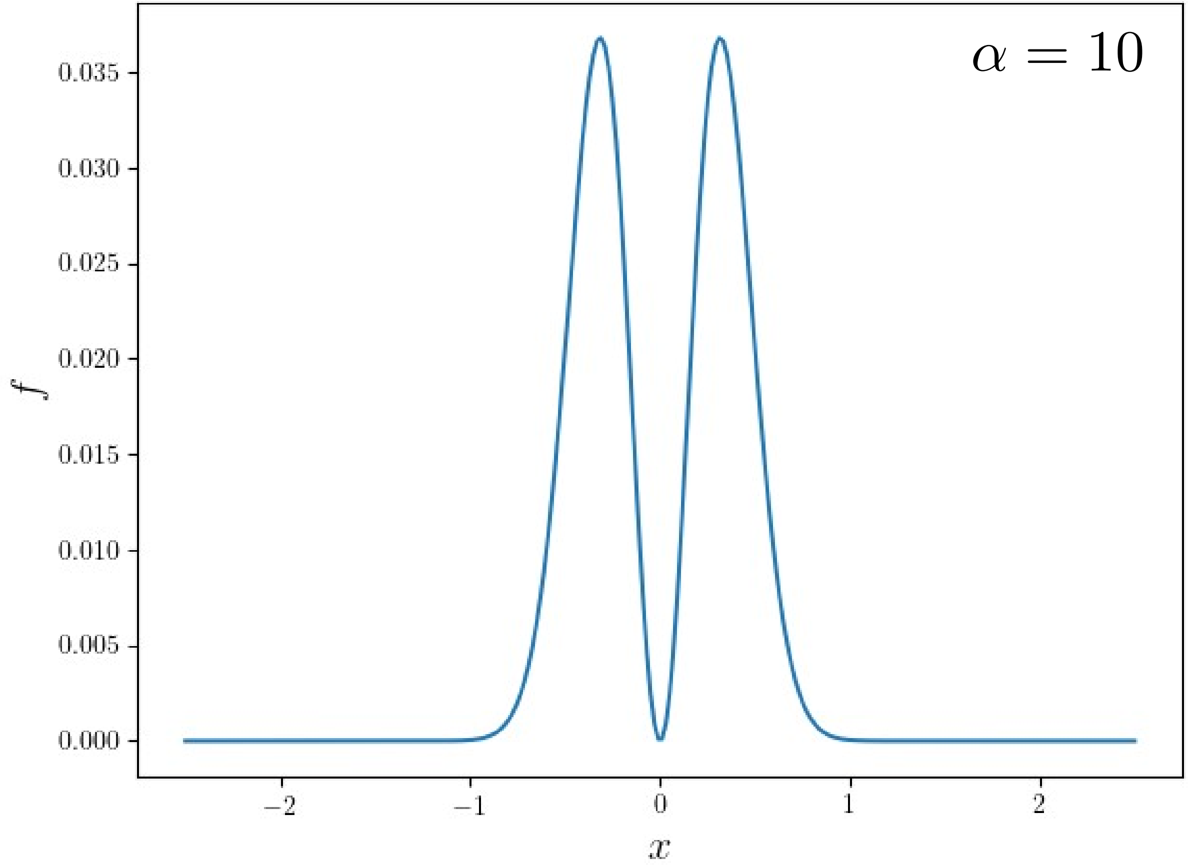
$$I[\alpha] = \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\alpha\, x^2}\, \mathrm{d}x$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\alpha\, x^2}\, \mathrm{d}x = 0$$

$$\int_{0}^{\infty} x e^{-\alpha\, x^2}\, \mathrm{d}x \neq 0$$

انتگرال گوسی

$$f = x^2 e^{-\alpha\, x^2}$$



$$I[\alpha] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha\, x^2}\, \mathrm{d}x$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha\, x^2}\, \mathrm{d}x =$$

$$2\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-\alpha\, x^2}\, \mathrm{d}x$$

ریاضیات مفید

انتگرال گوسی

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\, x^2}\, \mathrm{d}x$$

$$I^2 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\, x^2}\, \mathrm{d}x\right]^2 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\, x^2}\, \mathrm{d}x\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\, x^2}\, \mathrm{d}x\right]$$

$$I^2 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\, x^2}\, \mathrm{d}x\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\, y^2}\, \mathrm{d}y\right]$$

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\, x^2} e^{-\alpha\, y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x^2+y^2)}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

ریاضیات مفید

انتگرال گوسی

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\, x^2}\, \mathrm{d}x$$

$$I^2 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\, x^2}\, \mathrm{d}x\right]^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x^2+y^2)}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x^2+y^2)}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{2\pi} e^{-\alpha r^2}\, r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

انتگرال گوسی

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\, x^2}\, \mathrm{d}x$$

$$I^2 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\, x^2}\, \mathrm{d}x\right]^2 = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-\alpha r^2}\, r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$u = r^2, \quad \mathrm{d}u = 2r\mathrm{d}r$$

$$= \left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^{\infty} e^{-\alpha r^2}\, r\mathrm{d}r\right) = 2\pi\int_0^{\infty} e^{-\alpha u}\frac{\mathrm{d}u}{2}$$

$$= \pi[-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha u}]_0^{\infty} = \frac{\pi}{\alpha}$$

ریاضیات مفید

انتگرال گوسی

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\, x^2}\, \mathrm{d}x$$

$$I^2 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\, x^2}\, \mathrm{d}x\right]^2 = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-\alpha r^2}\, r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{\alpha}$$

$$I^2 = \frac{\pi}{\alpha} \Rightarrow I = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \Rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\, x^2}\, \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\, x^2}\, \mathrm{d}x = 2\int_0^{\infty} e^{-\alpha\, x^2}\, \mathrm{d}x \Rightarrow \boxed{\int_0^{\infty} e^{-\alpha\, x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}}$$

ریاضیات مفید

انتگرال گوسی

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = ?$$

$$\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = ?$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$$

ریاضیات مفید

انتگرال گوسی

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\, x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha\, x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha\, x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$$

$$\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-\alpha\, x^2}\,\mathrm{d}x = ?$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha\, x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha\, x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-\alpha\, x^2}\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int_{0}^{\infty} x^2 e^{-\alpha\, x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$$

ریاضیات مفید

انتگرال گوسی

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\, x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha\, x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha\, x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$$

$$\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-\alpha\, x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-\alpha\, x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}$$

$$\int_{0}^{\infty} x^4 e^{-\alpha\, x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

ریاضیات مفید

انتگرال گوسی

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\alpha\, x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{(2n)!}{n!2^{2n}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{2n+1}}}$$

$$n \geq 0$$

$$\int_{0}^{\infty} x^{2n} e^{-\alpha\, x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{(2n)!}{n!2^{2n+1}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{2n+1}}}$$

حالا برای **توانهای فرد**

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n+1} e^{-\alpha\, x^2}\, \mathrm{d}x = 0, \qquad \int_{0}^{\infty} x^{2n+1} e^{-\alpha\, x^2}\, \mathrm{d}x =?$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

انتگرال گوسی

$$\int_0^{\infty} x e^{-\alpha\, x^2}\,\mathrm{d}x = ?$$

$$u = x^2, \quad \mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{\infty} x e^{-\alpha\, x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} e^{-\alpha\, u}\frac{\mathrm{d}u}{2} = \frac{1}{2}[-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha\, u}]_0^{\infty} = \frac{1}{2\alpha}$$

$$\boxed{\int_0^{\infty} x e^{-\alpha\, x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\alpha}}$$

انتگرال گوسی

$$\int_0^\infty x^3 e^{-\alpha\, x^2}\,\mathrm{d}x = ?$$

$$\int_0^\infty x^5 e^{-\alpha\, x^2}\,\mathrm{d}x = ?$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\int_0^\infty x e^{-\alpha\, x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\frac{1}{2\alpha}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\int_0^\infty x^3 e^{-\alpha\, x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\frac{1}{2\alpha^2}$$

$$-\int_0^\infty x^3 e^{-\alpha\, x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2\alpha^2}$$

$$-\int_0^\infty x^5 e^{-\alpha\, x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\alpha^3}$$

$$\boxed{\int_0^\infty x^3 e^{-\alpha\, x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\alpha^2}}$$

$$\boxed{\int_0^\infty x^5 e^{-\alpha\, x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha^3}}$$

ریاضیات مفید

انتگرال گوسی

$$\boxed{\int_0^\infty x e^{-\alpha\, x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\alpha}}$$

$$\boxed{\int_0^\infty x^3 e^{-\alpha\, x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\alpha^2}}$$

$$\boxed{\int_0^\infty x^5 e^{-\alpha\, x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha^3}}$$

$$\vdots$$

$$\int_0^\infty x^{2n+1} e^{-\alpha\, x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{n!}{2\alpha^{n+1}}$$

$$n \geq 0$$

ریاضیات مفید

یکی از دیگر از انتگرالها در مسائل ترمودینامیک **تابع گاما** است،

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{(n-1)} e^{-x}\,\mathrm{d}x, \quad \Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

z	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	4
$\Gamma(z)$	$\frac{4\sqrt{\pi}}{3}$	$-2\sqrt{\pi}$	$\sqrt{\pi}$	1	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$	1	$\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$	2	6

$$\Gamma(\frac{3}{2}) = \int_0^\infty \sqrt{x}e^{-x}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^\infty y^2 e^{-y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$\boxed{\int_0^\infty x^2 e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

ریاضیات مفید

یکی از دیگر از انتگرالها در مسائل ترمودینامیک **تابع گاما** است،

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{(n-1)} e^{-x}\,\mathrm{d}x, \quad \Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

z	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	4
$\Gamma(z)$	$\frac{4\sqrt{\pi}}{3}$	$-2\sqrt{\pi}$	$\sqrt{\pi}$	1	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$	1	$\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$	2	6

$$\Gamma(\frac{3}{2}) = \int_0^\infty \sqrt{x}e^{-x}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^\infty y^2 e^{-y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$\Gamma(\frac{3}{2}) = 2\frac{\sqrt{\pi}}{4} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

ریاضیات مفید

یکی از دیگر از انتگرالها در مسائل ترمودینامیک **تابع گاما** است،

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{(n-1)} e^{-x}\, \mathrm{d}x, \qquad \Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

z	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	4
$\Gamma(z)$	$\frac{4\sqrt{\pi}}{3}$	$-2\sqrt{\pi}$	$\sqrt{\pi}$	1	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$	1	$\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$	2	6

$$\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

ریاضیات مفید

یکی از دیگر از انتگرالها در مسائل ترمودینامیک **تابع گاما** است،

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{(n-1)} e^{-x}\, \mathrm{d}x, \quad \Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

z	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	4
$\Gamma(z)$	$\frac{4\sqrt{\pi}}{3}$	$-2\sqrt{\pi}$	$\sqrt{\pi}$	1	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$	1	$\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$	2	6

$$\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) \Rightarrow \Gamma(\frac{1}{2}) = 2\Gamma(\frac{3}{2}) = \sqrt{\pi}$$

ریاضیات مفید

یکی از دیگر از انتگرالها در مسائل ترمودینامیک **تابع گاما** است،

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{(n-1)} e^{-x}\, \mathrm{d}x, \quad \Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

z	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	4
$\Gamma(z)$	$\frac{4\sqrt{\pi}}{3}$	$-2\sqrt{\pi}$	$\sqrt{\pi}$	1	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$	1	$\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$	2	6

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}\Gamma(-\frac{1}{2}) \Rightarrow \Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\Gamma(\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$$

ریاضیات مفید

یکی از دیگر از انتگرالها در مسائل ترمودینامیک **تابع گاما** است،

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{(n-1)} e^{-x}\,\mathrm{d}x, \quad \Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

z	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	4
$\Gamma(z)$	$\frac{4\sqrt{\pi}}{3}$	$-2\sqrt{\pi}$	$\sqrt{\pi}$	1	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$	1	$\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$	2	6

$$\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}\Gamma(-\frac{3}{2}) \Rightarrow \Gamma(-\frac{3}{2}) = -\frac{2}{3}\Gamma(-\frac{1}{2}) = \frac{4\sqrt{\pi}}{3}$$

ریاضیات مفید

یکی از دیگر از انتگرالها در مسائل ترمودینامیک **تابع گاما** است،