جلسه چهارم

ترمودینامیک و مکانیک آماری

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه
دانشگاه قم
مهر ۹۹

مفاهیمی در فیزیک حرارت

مطالب و عناوین:

- مبانی آماری فیزیک حرارت
- ریاضیات مفید
- گرما
- احتمال
- دما و فاکتور بولتزمن
- توزیع ماکسول بولتزمن
- فشار
- اثر افیوژن مولکولی
- پویش آزاد متوسط و برخوردها
- انرژی و قانون اول ترمودینامیک
- فرایندهای همدما و بی‌دررو
- ماشین‌های حرارتی و قانون دوم ترمودینامیک
- آنتروپی

ریاضیات مفید

$$n! = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{(n-1)} e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

z	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	4
$\Gamma(z)$	$\frac{4\sqrt{\pi}}{3}$	$-2\sqrt{\pi}$	$\sqrt{\pi}$	1	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$	1	$\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$	2	6

ریاضیات مفید

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\, x^2}\, \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\int_{0}^{\infty} x e^{-\alpha\, x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\alpha}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha\, x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$$

$$\int_{0}^{\infty} x^3 e^{-\alpha\, x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\alpha^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-\alpha\, x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}$$

$$\int_{0}^{\infty} x^5 e^{-\alpha\, x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha^3}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

ریاضیات مفید

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-x_0)^2}\mathrm{d}x = ?$$

$$x - x_0 = y \Rightarrow \mathrm{d}x = \mathrm{d}y \qquad x \to \pm\infty \Rightarrow y \to \pm\infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\mathrm{d}y = \sqrt{\pi} \Rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-x_0)^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-(x-x_0)^2}\mathrm{d}x = ?$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (y+x_0)e^{-y^2}\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} ye^{-y^2}\mathrm{d}y + x_0\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\mathrm{d}y = x_0\sqrt{\pi}$$

ریاضیات مفید

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-x_0)^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-(x-x_0)^2}\mathrm{d}x = x_0\sqrt{\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-(x-x_0)^2}\mathrm{d}x = ?$$

$$x - x_0 = y \Rightarrow \mathrm{d}x = \mathrm{d}y \qquad x \to \pm\infty \Rightarrow y \to \pm\infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (y+x_0)^2 e^{-y^2}\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} (y^2 + 2x_0y + x_0^2)e^{-y^2}\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y^2e^{-y^2}\mathrm{d}y + 2x_0\int_{-\infty}^{\infty} ye^{-y^2}\mathrm{d}y + x_0^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\mathrm{d}y$$

ریاضیات مفید

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-x_0)^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-(x-x_0)^2}\mathrm{d}x = x_0\sqrt{\pi}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-(x-x_0)^2}\mathrm{d}x = ?$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-y^2}\mathrm{d}y + 2x_0 \int_{-\infty}^{\infty} \cancelto{0}{y e^{-y^2}}\mathrm{d}y + x_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\mathrm{d}y$$

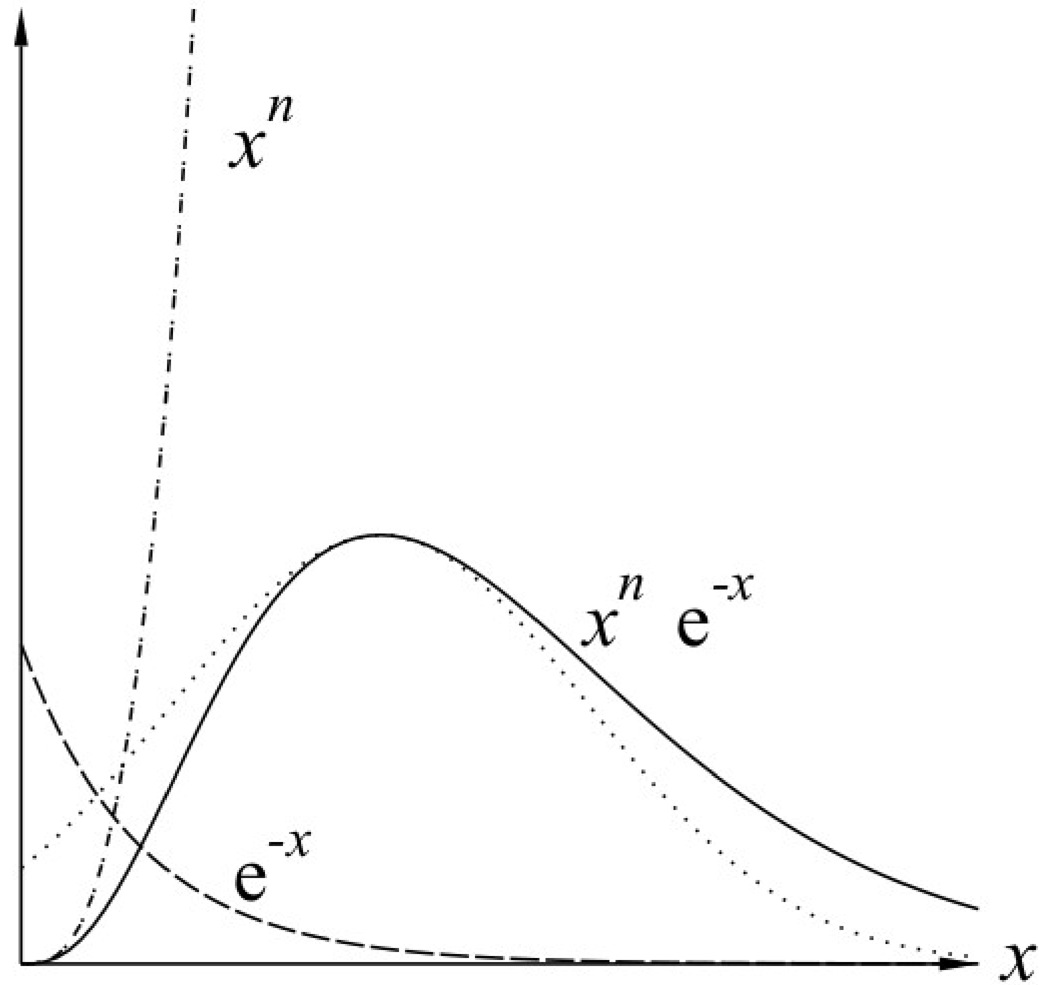
$$= \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-y^2}\mathrm{d}y + x_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\mathrm{d}y = \sqrt{\pi}\left(\frac{1}{2} + x_0\right)$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-(x-x_0)^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\left(\frac{1}{2} + x_0\right)}$$

محمدرضا مظفری

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

ریاضیات مفید



$$n! = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

وقتی n عدد بزرگی است : $\ln n! = ?$

تعریف $e^{f(x)} = x^n e^{-x}$

$$\ln e^{f(x)} = \ln(x^n e^{-x})$$

$$f(x) = n \ln x - x$$

ریاضیات مفید

$$n! = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

وقتی n عدد بزرگی است : $\ln n! = ?$

$$e^{f(x)} = x^n e^{-x} \qquad f(x) = n\ln x - x$$

برای پیدا کردن نقطه ماکزیمم $\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{f(x)} = 0$

$$e^{f(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) = 0} \Rightarrow \frac{n}{x} - 1 = 0 \Rightarrow x = n$$

ریاضیات مفید

$$n! = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$\ln n! = ?$: وقتی n عدد بزرگی است

$$e^{f(x)} = x^n e^{-x} \qquad\qquad f(x) = n \ln x - x$$

بسط تابع $f(x)$ حول نقطه $x = n$

$$f(x) = f(n) + \cancelto{0}{\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)_{x=n}} (x-n) + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=n} (x-n)^2 + \cdots$$

$$f(x) = f(n) + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=n} (x-n)^2 + \cdots, \qquad \left(\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=n} = ?$$

ریاضیات مفید

$$n! = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$\ln n! = ?$: وقتی n عدد بزرگی است

$$e^{f(x)} = x^n e^{-x} \qquad\qquad f(x) = n\ln x - x$$

بسط تابع $f(x)$ حول نقطه $x = n$

$$f(x) = f(n) + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=n}(x-n)^2 + \cdots$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{n}{x} - 1, \qquad \left(\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=n} = \left(-\frac{n}{x^2}\right)_{x=n} = -\frac{1}{n}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

ریاضیات مفید

$$n! = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$\ln n! = ?$: وقتی n عدد بزرگی است

$$e^{f(x)} = x^n e^{-x} \qquad\qquad f(x) = n\ln x - x$$

بسط تابع $f(x)$ حول نقطه $x = n$

$$f(x) = f(n) + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=n}(x-n)^2 + \cdots\,, \qquad \left(\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=n} = -\frac{1}{n}$$

$$f(x) = n\ln n - n - \frac{1}{2n}(x-n)^2 + \cdots\,,$$

ریاضیات مفید

$$n! = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

وقتی n عدد بزرگی است : $\ln n! = ?$

$$e^{f(x)} = x^n e^{-x}, \qquad f(x) = n\ln n - n - \frac{1}{2n}(x-n)^2 + \cdots$$

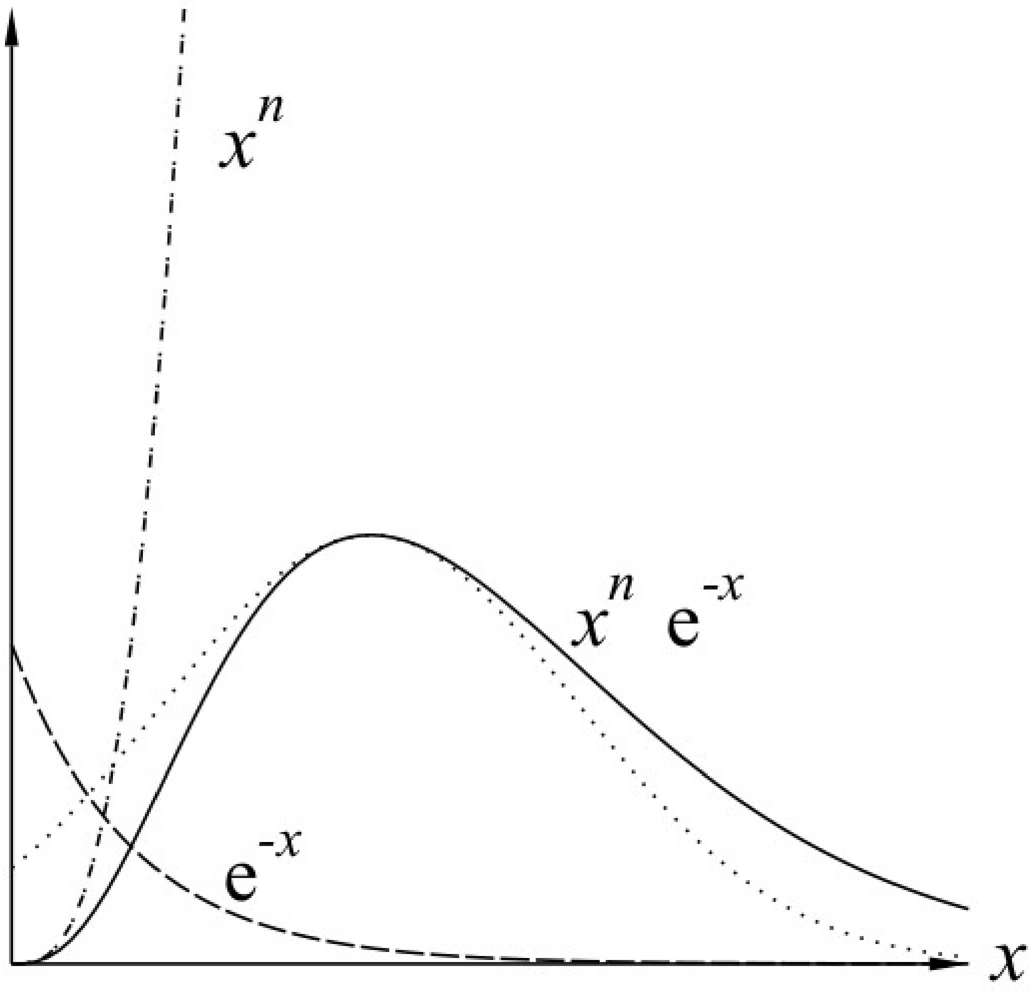
$$e^{f(x)} = e^{n\ln n - n} e^{-\frac{(x-n)^2}{2n} + \cdots}$$

$$n! = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty e^{f(x)}\,\mathrm{d}x = e^{n\ln n - n}\int_0^\infty e^{-\frac{(x-n)^2}{2n} + \cdots}\,\mathrm{d}x$$

$$n! \sim e^{n\ln n - n}\int_0^\infty e^{-\frac{(x-n)^2}{2n}}\,\mathrm{d}x$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

ریاضیات مفید



$$n! = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$\ln n! = ?$: وقتی n عدد بزرگی است

$$f(x) = n\ln n - n$$
$$-\frac{1}{2n}(x-n)^2 + \cdots$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

ریاضیات مفید

$$n! = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

وقتی n عدد بزرگی است : $\ln n! = ?$

$$e^{f(x)} = x^n e^{-x}, \qquad f(x) = n\ln n - n - \frac{1}{2n}(x-n)^2 + \cdots$$

$$e^{f(x)} = e^{n\ln n - n} e^{-\frac{(x-n)^2}{2n} + \cdots}$$

$$n! = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty e^{f(x)}\,\mathrm{d}x = e^{n\ln n - n}\int_0^\infty e^{-\frac{(x-n)^2}{2n}+\cdots}\,\mathrm{d}x$$

$$n! \sim e^{n\ln n - n}\int_0^\infty e^{-\frac{(x-n)^2}{2n}}\,\mathrm{d}x$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

ریاضیات مفید

$$n! = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$\ln n! = ?$: وقتی n عدد بزرگی است

$$e^{f(x)} = x^n e^{-x}, \qquad f(x) = n\ln n - n - \frac{1}{2n}(x-n)^2 + \cdots$$

$$e^{f(x)} = e^{n\ln n - n} e^{-\frac{(x-n)^2}{2n} + \cdots}$$

$$n! \sim e^{n\ln n - n}\int_0^\infty e^{-\frac{(x-n)^2}{2n}}\,\mathrm{d}x$$

داریم $\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$

$$n! \sim e^{n\ln n - n}\frac{1}{2}\sqrt{2\pi n}$$

ریاضیات مفید

$$n! = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$\ln n! = ?$: وقتی n عدد بزرگی است

$$e^{f(x)} = x^n e^{-x}, \qquad f(x) = n\ln n - n - \frac{1}{2n}(x-n)^2 + \cdots$$

$$e^{f(x)} = e^{n\ln n - n} e^{-\frac{(x-n)^2}{2n} + \cdots}$$

$$n! \sim e^{n\ln n - n}\frac{\sqrt{2\pi n}}{2}$$

$$\ln n! \sim n\ln n - n + \ln\sqrt{2n\pi} - \ln 2, \qquad \boxed{\ln n! \sim n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln 2n\pi}$$

ریاضیات مفید

$$n! = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$\ln n! = ?$: وقتی n عدد بزرگی است

$$e^{f(x)} = x^n e^{-x}, \qquad f(x) = n\ln n - n - \frac{1}{2n}(x-n)^2 + \cdots$$

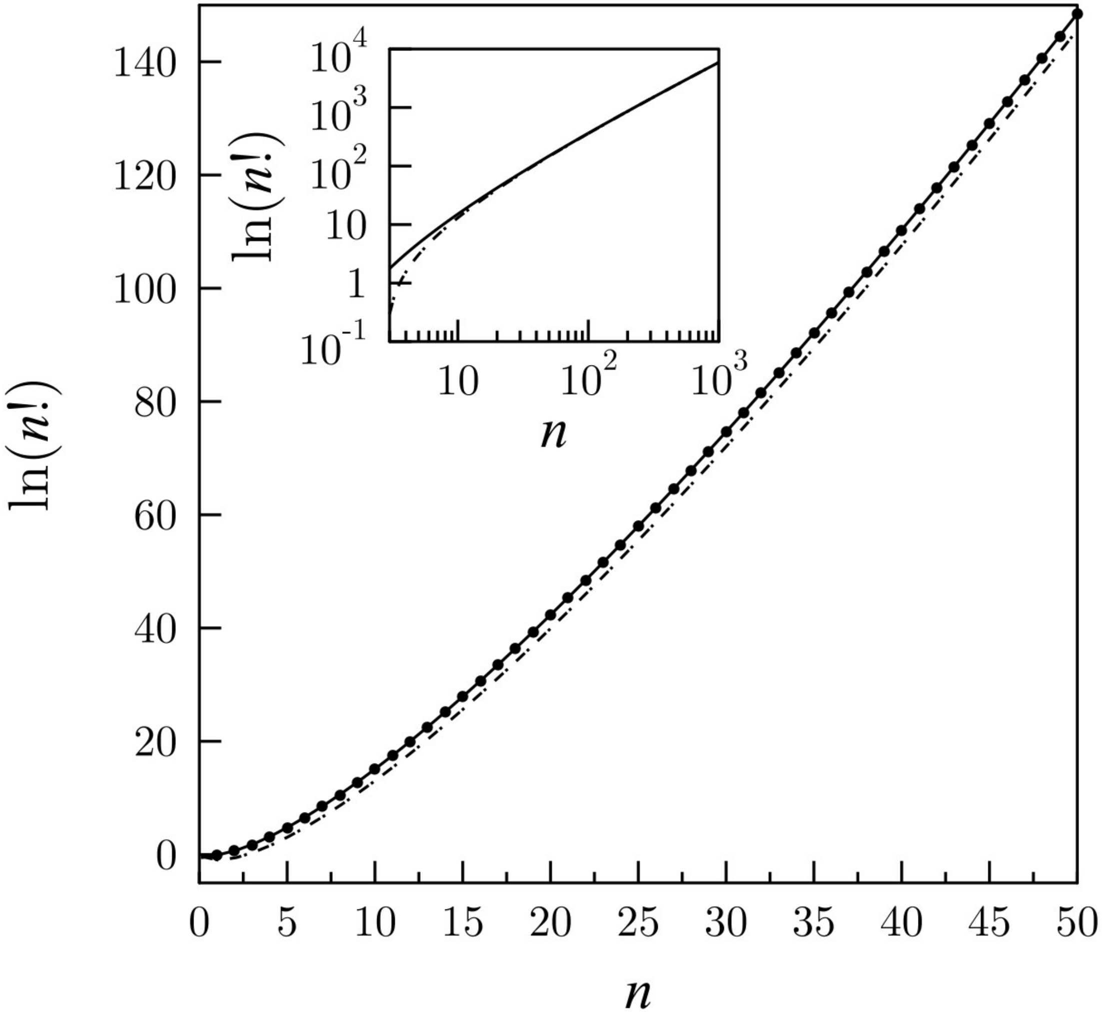
$$e^{f(x)} = e^{n\ln n - n} e^{-\frac{(x-n)^2}{2n} + \cdots}$$

$$n! \sim e^{n\ln n - n}\frac{\sqrt{2\pi n}}{2}$$

$$\ln n! \sim n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln 2n\pi, \qquad \boxed{\ln n! \sim n\ln n - n}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

ریاضیات مفید



$$n! = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$$\ln n! \sim n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln 2n\pi$$

$$\ln n! \sim n\ln n - n$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

ریاضیات مفید

برای سه متغییر $x,\ y,\ z$

$$x = x(y,z):\quad \mathrm{d}x = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \mathrm{d}y + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \mathrm{d}z$$

$$y = y(z,x):\quad \mathrm{d}y = \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \mathrm{d}x$$

$$z = z(x,y):\quad \mathrm{d}z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \mathrm{d}y$$

قضیه

reciprocal

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = 1 \quad \text{یا} \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \frac{1}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z}$$

ریاضیات مفید

برای سه متغیر $x,\ y,\ z$

$$x = x(y,z): \quad \mathrm{d}x = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \mathrm{d}y + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \mathrm{d}z$$

$$y = y(z,x): \quad \mathrm{d}y = \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \mathrm{d}x$$

$$z = z(x,y): \quad \mathrm{d}z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \mathrm{d}y$$

قضیه

reciprocity

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y = 0$$

یا

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$

ریاضیات مفید

$$\mathrm{d}x = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \mathrm{d}y + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}y = \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}x = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left[\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \mathrm{d}x\right] + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}x = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \mathrm{d}z$$

ریاضیات مفید

$$\mathrm{d}x = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \mathrm{d}y + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}y = \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}x = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}x = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y\right] \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \mathrm{d}x$$

ریاضیات مفید

$$\mathrm{d}x = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \mathrm{d}y + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}y = \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}x = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y\right] \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \mathrm{d}x$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = 1}$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y = 0}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

ریاضیات مفید

$$\mathrm{d}x = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \mathrm{d}y + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}y = \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}x = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y\right] \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \mathrm{d}x$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \frac{1}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z}} \qquad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = -\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y$$

ریاضیات مفید

$$\mathrm{d}x = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \mathrm{d}y + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}y = \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}x = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y\right] \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \mathrm{d}x$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \frac{1}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z}} \qquad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = -\frac{1}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y}$$

ریاضیات مفید

$$\mathrm{d}x = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \mathrm{d}y + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}y = \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}x = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y\right] \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \mathrm{d}x$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \frac{1}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z}$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$

ریاضیات مفید

$$f = f(x,y)$$

$$\mathrm{d}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}f = \underbrace{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \hat{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \hat{j}\right]}_{=\nabla f} \cdot \underbrace{(\hat{i}\mathrm{d}x + \hat{j}\mathrm{d}y)}_{=\mathrm{d}\vec{r}} \Rightarrow \mathrm{d}f = \nabla f \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$\nabla \times \nabla f = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

$$f = f(x, y)$$

$$\mathrm{d}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \mathrm{d}y = \nabla f \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$\nabla \times \nabla f = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

$$\oint \nabla f \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int \cancelto{0}{\nabla \times \nabla f} \cdot \mathrm{d}S$$

$\oint \mathrm{d}f = 0$ مشتقات کامل $f = f(x, y)$

ریاضیات مفید

$$f = f(x, y)$$

$$\mathrm{d}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \mathrm{d}y$$

$$\nabla \times \nabla f = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

$$\int_1^2 \mathrm{d}f = f(2) - f(1)$$