

جلسه ششم

ترمودینامیک و مکانیک آماری

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه
دانشگاه قم
مهر ۹۹

مفاهیمی در فیزیک حرارت

مطالب و عناوین:

- مبانی آماری فیزیک حرارت
- ریاضیات مفید
- گرما
- احتمال
- دما و فاکتور بولتزمن
- توزیع ماکسول بولتزمن
- فشار
- اثر افیوژن مولکولی
- پویش آزاد متوسط و برخوردها
- انرژی و قانون اول ترمودینامیک
- فرایندهای همدمای و بی‌دررو
- ماشین‌های حرارتی و قانون دوم ترمودینامیک
- آنتروپی

احتمال

* در فیزیک اغلب ما به مطالعه سیستمهایی علاقمند هستیم که شامل **تعداد زیادی از ذرات** است.

* در چنین سیستمهایی با **تعداد ذرات زیاد**، بررسی رفتار ایزوله ذرات امکانپذیر نیست و فقط مطالعه رفتار جمعی و متوسط **آماري** ذرات امکانپذیر است.

* در بررسی **آماري** سیستمها، کمیتهای قابل اندازه گیری با **احتمال** مشخص می شوند.

* **احتمال** در سیستمهای آماری با **افت و خیز** همراه است. وقتی **احتمالها افت و خیز** کمی دارند که نه تنها **تعداد ذرات زیاد** باشد بلکه ناحیه تحت مطالعه هم به اندازه کافی بزرگ باشد.

* **تعداد ذرات زیاد و ناحیه تحت مطالعه بزرگ** حدی را به نام حد ترمودینامیک در مطالعه سیستم ذرات فراهم می‌کند که اعتبار مطالعه در مکانیک آماری می‌باشد.

* در ادامه قصد داریم بعضی از مفاهیم پایه‌ی تئوری احتمال را بررسی کنیم،

* توزیع احتمالاتی گسسته

* توزیع احتمالاتی پیوسته

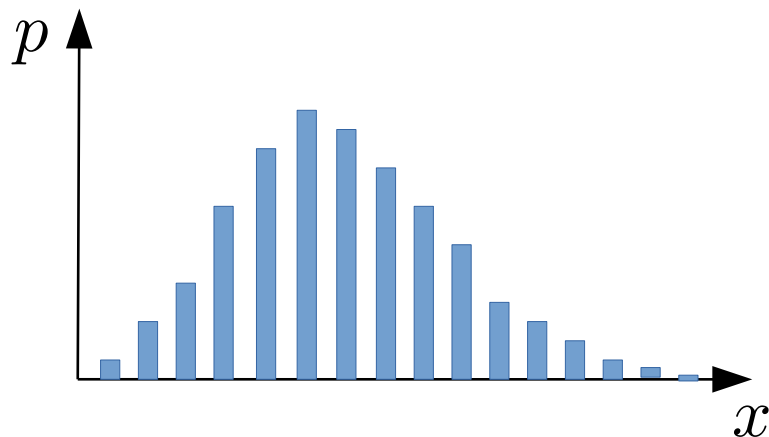
* مقدار متوسط

* واریانس و انحراف معیار

احتمال

x	$x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$
p	$p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_n$

$$\sum_i^n p_i = 1$$



مقدار متوسط x : $\langle x \rangle = \sum_i^n x_i p_i$

مقدار متوسط x^2 : $\langle x^2 \rangle = \sum_i^n x_i^2 p_i$

مقدار متوسط $f(x)$: $\langle f(x) \rangle = \sum_i^n f(x_i) p_i$

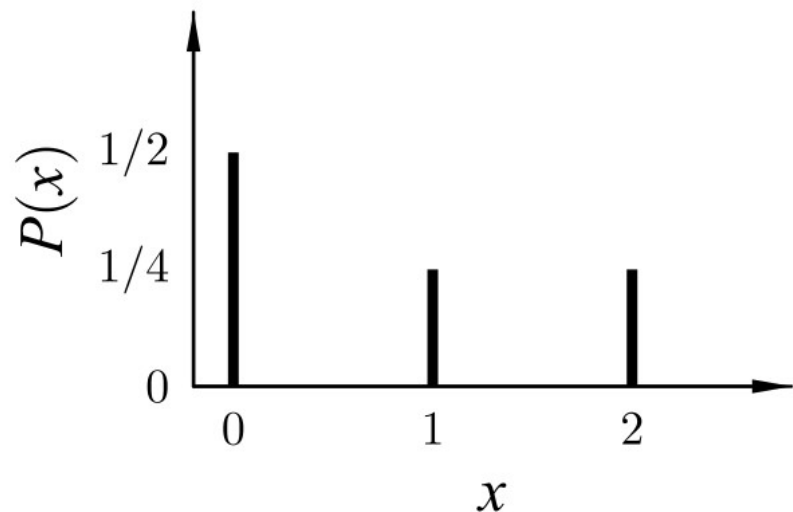
احتمال

مثال

x	0	1	2
p	1/2	1/4	1/4

$$\sum_i^3 p_i = 1$$

$$\sum_i^3 p_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$



$$\langle x \rangle = \sum_i^3 x_i p_i$$

$$\sum_i^3 x_i p_i = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\langle x \rangle = \frac{3}{4}$$

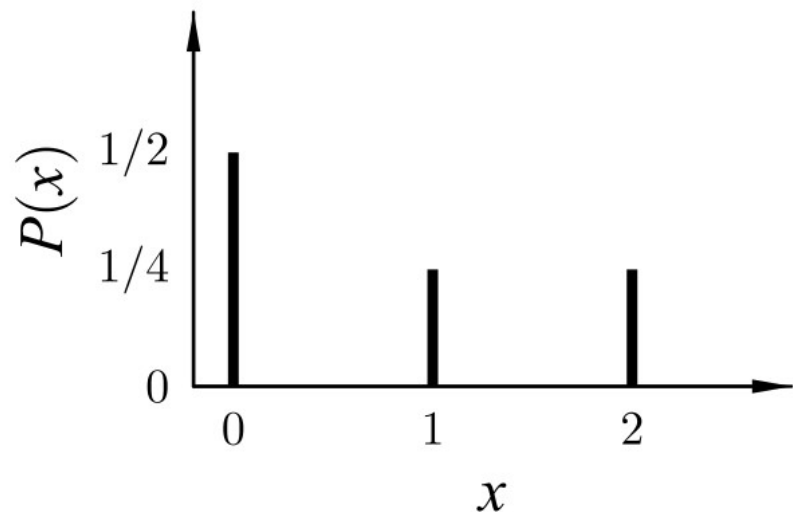
احتمال

مثال

x	0	1	2
p	1/2	1/4	1/4

$$\sum_i^3 p_i = 1$$

$$\sum_i^3 p_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$



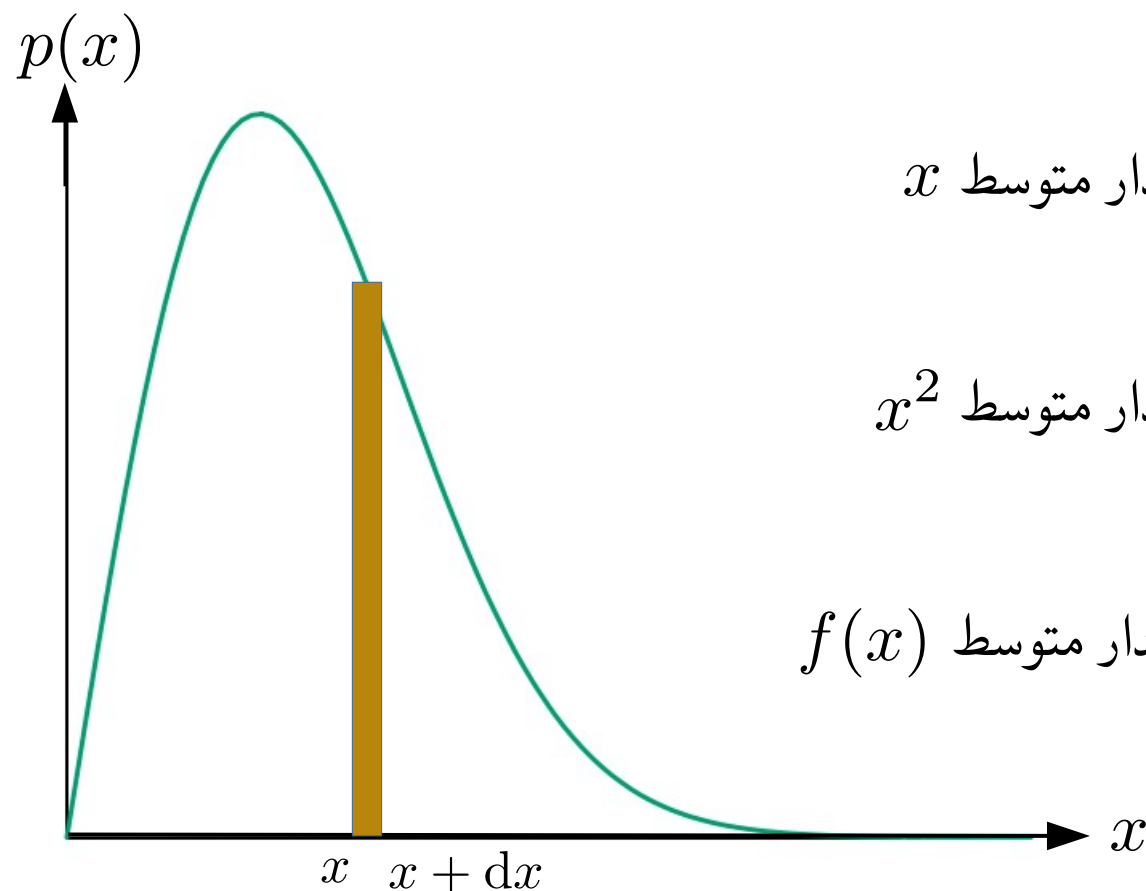
$$\langle x^2 \rangle = \sum_i^3 x_i^2 p_i$$

$$\sum_i^3 x_i^2 p_i = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{5}{4}$$

$p(x)dx, \quad x, x + dx$

$$\int p(x)dx = 1$$

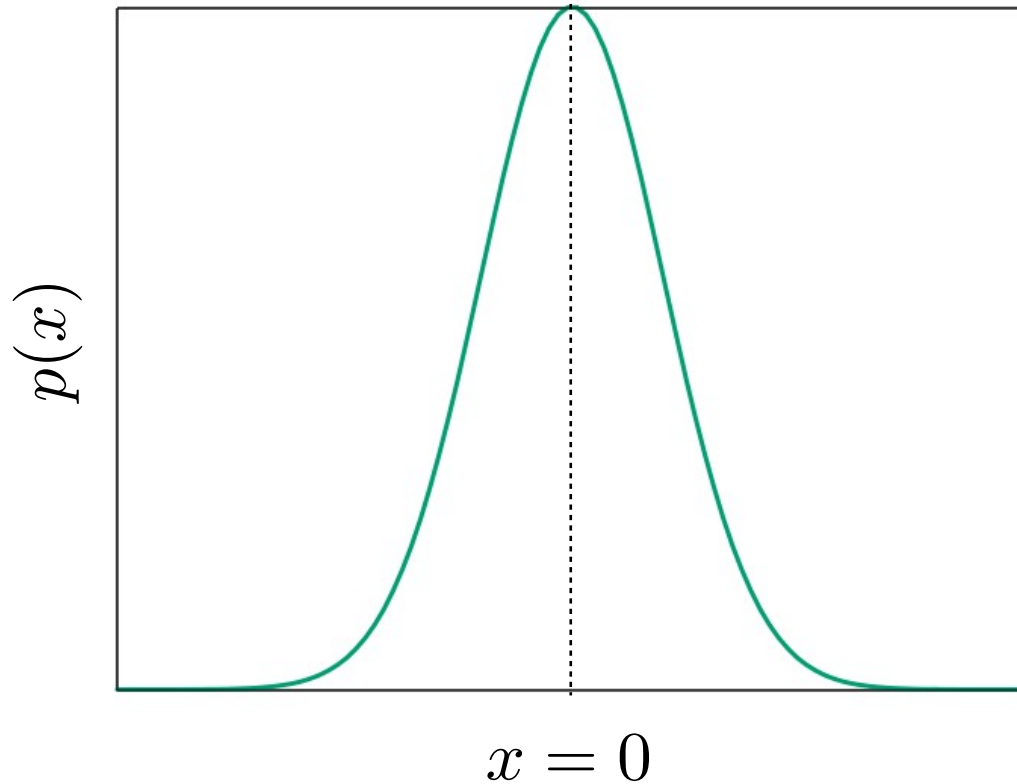


مقدار متوسط x : $\langle x \rangle = \int xp(x)dx$

مقدار متوسط x^2 : $\langle x^2 \rangle = \int x^2p(x)dx$

مقدار متوسط $f(x)$: $\langle f(x) \rangle = \int f(x)p(x)dx$

مثال



$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$p(x) = C e^{-x^2/2a^2}$$

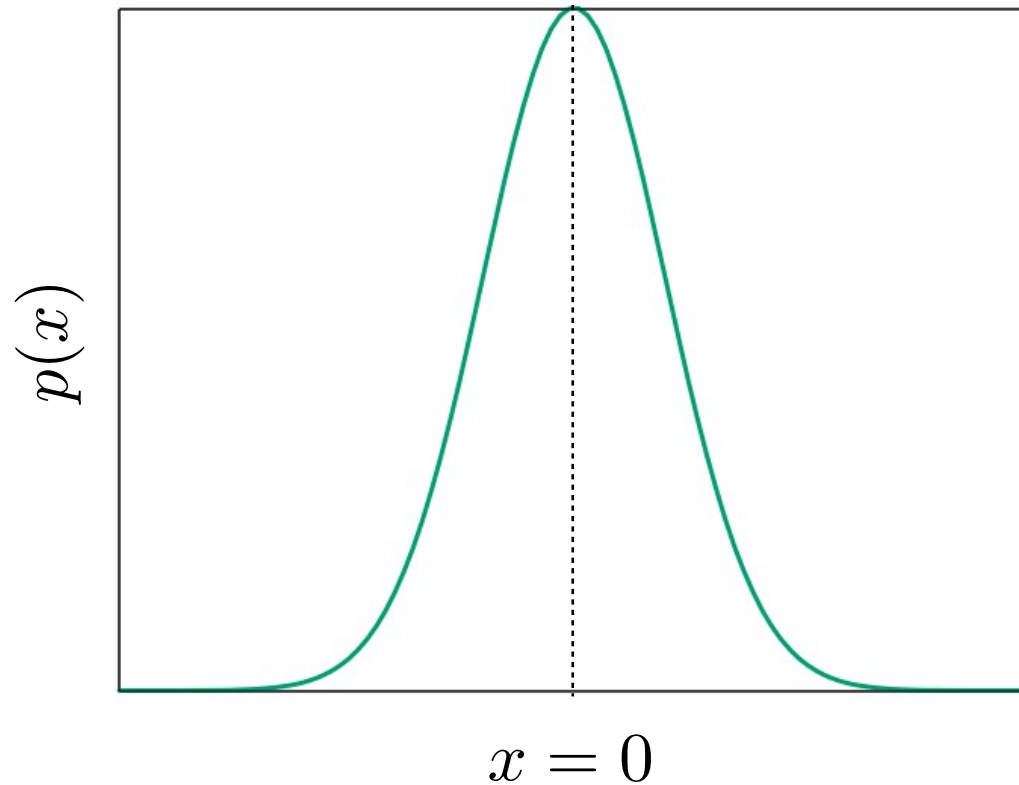
$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1$$

$$1 = C \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2a^2} dx$$

$$C = 1/\sqrt{2\pi a^2}$$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} e^{-x^2/2a^2}$$

مثال



$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} e^{-x^2/2a^2}$$

$$\langle x \rangle = \int x p(x) dx$$

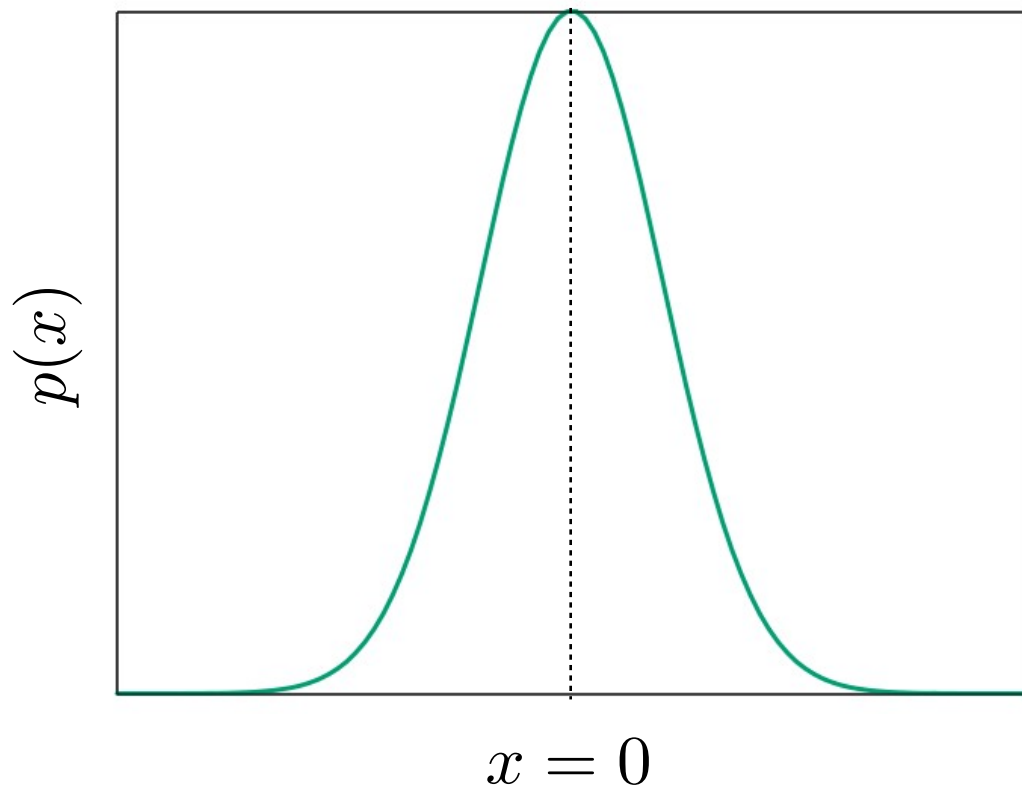
$$\langle x \rangle = \frac{1}{\sqrt{2a^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2/2a^2} dx$$

$$\langle x \rangle = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\alpha x^2} dx = 0$$

احتمال

مثال



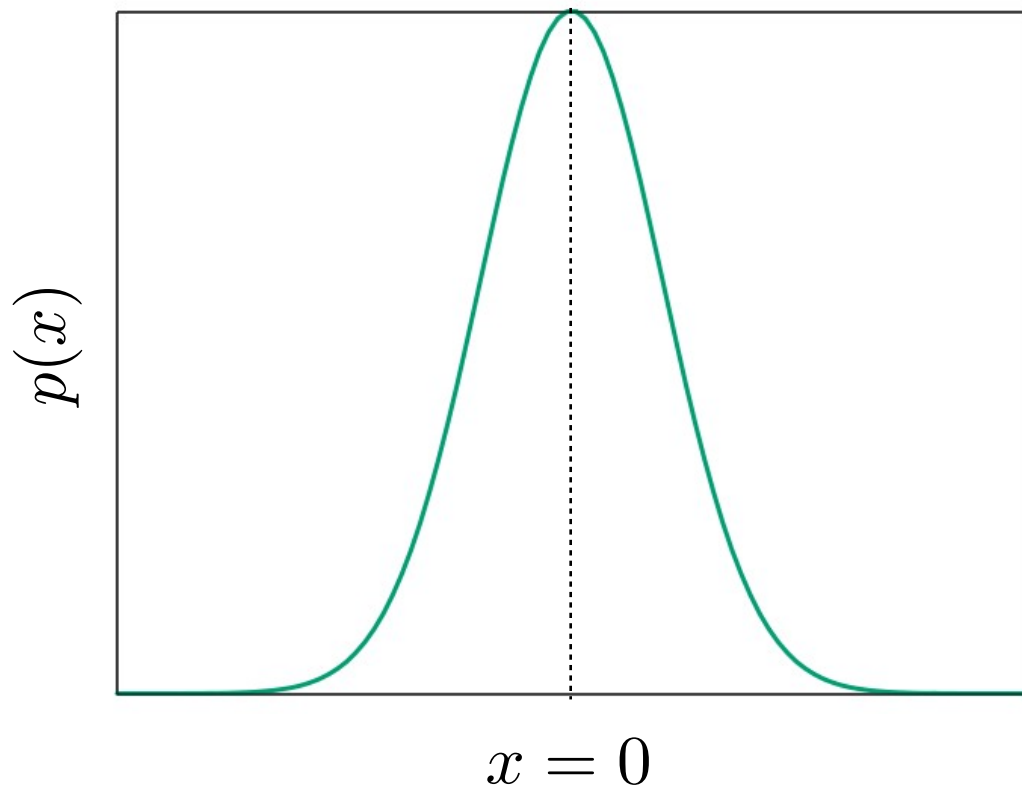
$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} e^{-x^2/2a^2}$$

$$\langle x^2 \rangle = \int x^2 p(x) dx$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2a^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2a^2} dx$$

$$\frac{d}{d\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{d}{d\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$$

مثال



$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} e^{-x^2/2a^2}$$

$$\langle x^2 \rangle = \int x^2 p(x) dx$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2a^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2a^2} dx$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2a^2}} \frac{1}{2} \sqrt{8\pi a^6} = a^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$$

* میزان انحراف تابع توزیع از مقدار متوسط را می‌توان بصورت کمیت خطی

$$x - \langle x \rangle$$

در نظر گرفت. ولی این تعریف مناسبی نیست چون متوسط از آن برابر صفر است،

$$\langle x - \langle x \rangle \rangle = \langle x \rangle - \langle x \rangle = 0$$

* میزان انحراف تابع توزیع از مقدار متوسط را می‌توان بصورت

$$|x - \langle x \rangle|$$

در نظر گرفت. که قدر مطلق رویه ریاضی ملال آوری و سختی را برای متوسط گیری دارد.

* میزان انحراف تابع توزیع از مقدار متوسط را می توان بصورت کمیت غیرخطی

$$(x - \langle x \rangle)^2$$

در نظر گرفت که مقدار متوسط از آن واریانس نامیده می شود،

$$\sigma_x^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$$

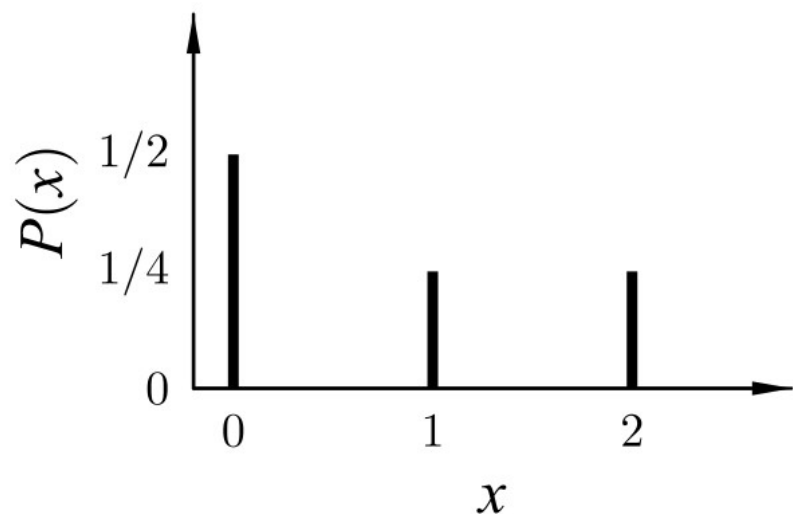
* رابطه شناخته تر برای محاسبه واریانس

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 - 2\langle x \rangle x + \langle x \rangle^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - 2\langle x \rangle \langle x \rangle + \langle x \rangle^2$$

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

* جذر واریانس انحراف معیار نامیده می شود.

x	0	1	2
p	1/2	1/4	1/4



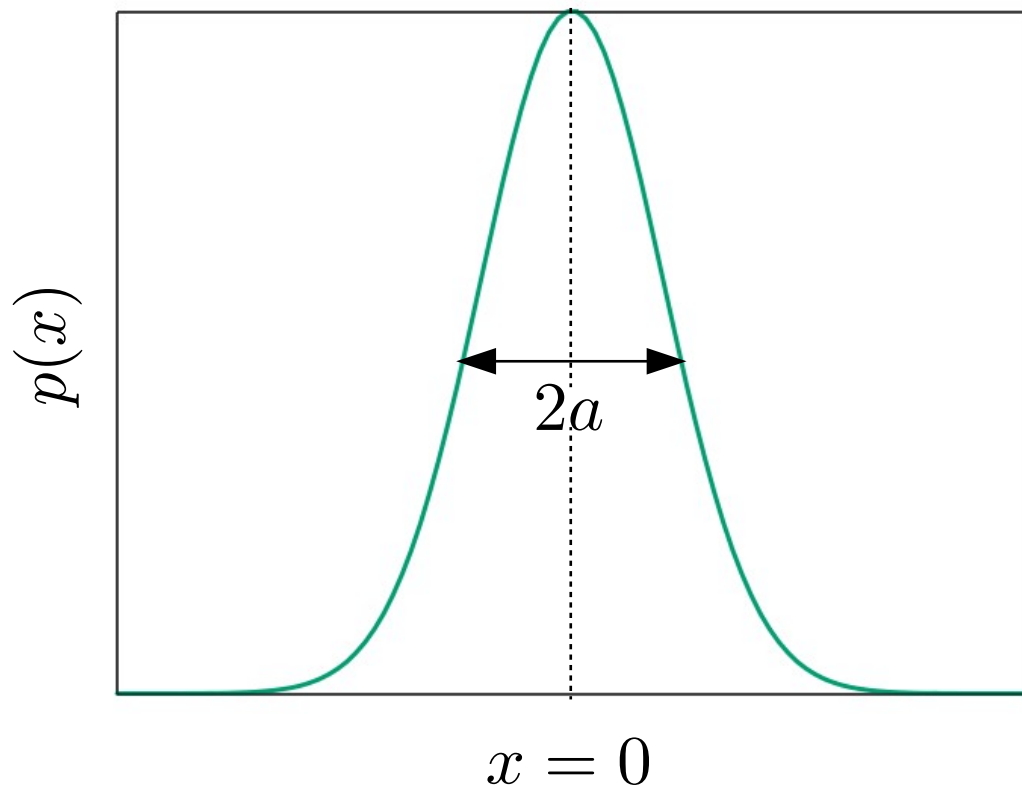
$$\langle x \rangle = \sum_i^3 x_i p_i = \frac{3}{4}$$

$$\langle x^2 \rangle = \sum_i^3 x_i^2 p_i = \frac{5}{4}$$

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

$$\sigma_x^2 = \frac{5}{4} - \frac{9}{16} = \frac{11}{16}$$

مثال



$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} e^{-x^2/2a^2}$$

$$\langle x \rangle = 0$$

$$\langle x^2 \rangle = a^2$$

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

$$\sigma_x = a$$

$$p(x)dx, \quad x, x + dx$$

$$y = ax + b \Rightarrow \sigma_y^2 = ? \quad \sigma_y^2 = \langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2$$

$$\langle y \rangle = \langle ax + b \rangle = a\langle x \rangle + b$$

$$\langle y^2 \rangle = \langle (ax + b)^2 \rangle = a^2\langle x^2 \rangle + 2ab\langle x \rangle + b^2$$

$$\sigma_y^2 = (a^2\langle x^2 \rangle + 2ab\langle x \rangle + b^2) - (a\langle x \rangle + b)^2$$

$$\sigma_y^2 = (a^2\langle x^2 \rangle + \cancel{2ab\langle x \rangle} + \cancel{b^2}) - (a^2\langle x \rangle^2 + \cancel{2ab\langle x \rangle} + \cancel{b^2})$$

$$\sigma_y^2 = a^2\langle x^2 \rangle - a^2\langle x \rangle^2 = a^2(\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2) \Rightarrow \sigma_y^2 = a^2\sigma_x^2$$

* برای دو متغیر مستقل x و y ،

$$p(x)dx, \quad x, x + dx$$

$$q(y)dy, \quad y, y + dy$$

$$\langle xy \rangle = ?$$

$$p(x)q(y)dxdy, \quad x, x + dx, \quad y, y + dy$$

$$\langle xy \rangle = \int \int xyp(x)q(y)dxdy$$

$$\langle xy \rangle = \left(\int xp(x)dx \right) \left(\int yp(y)dy \right) = \langle x \rangle \langle y \rangle$$

* فرض کنید n متغیر تصادفی مستقل، X_i ، با مقادیر متوسط $\langle X \rangle$ و واریانس σ_X^2 یکسان وجود دارد.

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \Rightarrow \sigma_Y^2 = ?$$

$$\sigma_Y^2 = \langle Y^2 \rangle - \langle Y \rangle^2$$

$$\langle Y \rangle = \langle X_1 \rangle + \langle X_2 \rangle + \cdots + \langle X_n \rangle = n\langle X \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle Y^2 \rangle &= \langle X_1^2 \rangle + \langle X_2^2 \rangle + \cdots + \langle X_n^2 \rangle + 2\langle X_1 \rangle(\langle X_2 \rangle + \cdots + \langle X_n \rangle) \\ &\quad + 2\langle X_2 \rangle(\langle X_3 \rangle + \cdots + \langle X_n \rangle) + \cdots + 2\langle X_{n-1} \rangle \langle X_n \rangle \end{aligned}$$

$$\langle Y^2 \rangle = n\langle X^2 \rangle + 2(n-1)\langle X \rangle^2 + 2(n-2)\langle X \rangle^2 + \cdots + 2\langle X \rangle^2$$

* فرض کنید n متغیر تصادفی مستقل، X_i ، با مقادیر متوسط $\langle X \rangle$ و واریانس σ_X^2 یکسان وجود دارد.

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \Rightarrow \sigma_Y^2 = ?$$

$$\sigma_Y^2 = \langle Y^2 \rangle - \langle Y \rangle^2$$

$$\langle Y \rangle = \langle X_1 \rangle + \langle X_2 \rangle + \cdots + \langle X_n \rangle = n\langle X \rangle$$

$$\langle Y^2 \rangle = n\langle X^2 \rangle + 2(n-1)\langle X \rangle^2 + 2(n-2)\langle X \rangle^2 + \cdots + 2\langle X \rangle^2$$

$$\begin{cases} \langle Y^2 \rangle = n\langle X^2 \rangle + 2(1 + 2 + \cdots + (n-1))\langle X \rangle^2 \\ 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} \end{cases} \Rightarrow \langle Y^2 \rangle = n\langle X^2 \rangle + n(n-1)\langle X \rangle^2$$

* فرض کنید n متغیر تصادفی مستقل، X_i ، با مقادیر متوسط $\langle X \rangle$ و واریانس σ_X^2 یکسان وجود دارد.

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \Rightarrow \sigma_Y^2 = ?$$

$$\sigma_Y^2 = \langle Y^2 \rangle - \langle Y \rangle^2$$

$$\langle Y \rangle = n\langle X \rangle \quad \langle Y^2 \rangle = n\langle X^2 \rangle + n(n-1)\langle X \rangle^2$$

$$\sigma_Y^2 = n\langle X^2 \rangle + n(n-1)\langle X \rangle^2 - n^2\langle X \rangle^2$$

$$\sigma_Y^2 = n\langle X^2 \rangle - n\langle X \rangle^2$$

$$\sigma_Y^2 = n(\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2) = n\sigma_X^2$$

احتمال

* فرض کنید n متغیر تصادفی مستقل، X_i ، با مقادیر متوسط $\langle X \rangle$ و واریانس σ_X^2 یکسان وجود دارد.

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \Rightarrow \sigma_Y^2 = ?$$

$$\sigma_Y^2 = n\sigma_X^2 \Rightarrow \sigma_Y = \sqrt{n}\sigma_X$$

کاربرد:

فرض کنید کمیت X را n بار اندازه‌گیری کنیم که هر بار خطای مستقل σ_X داشته باشد.

$$Y = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \Rightarrow \sigma_Y^2 = \frac{1}{n}\sigma_X^2$$

$$\sigma_Y = \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma_X$$