جلسه هفتم

بخش اول

ترمودینامیک و مکانیک آماری

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه
دانشگاه قم
مهر ۹۹

مفاهیمی در فیزیک حرارت

مطالب و عناوین:

- مبانی آماری فیزیک حرارت
- ریاضیات مفید
- گرما
- **احتمال**
- دما و فاکتور بولتزمن
- توزیع ماکسول بولتزمن
- فشار
- اثر افیوژن مولکولی
- پویش آزاد متوسط و برخوردها
- انرژی و قانون اول ترمودینامیک
- فرایندهای همدما و بی‌دررو
- ماشین‌های حرارتی و قانون دوم ترمودینامیک
- آنتروپی

احتمال

توزیع دوتایی یک توزیع احتمالی مهم در فیزیک است که بر اساس آزمایشی با دو نتیجه ممکن قرار داده می‌شود. یک نتیجه با احتمال

$$p$$

اتفاق می‌افتد و نتیجه‌ی دیگر با احتمال

$$q = 1 - p$$

اتفاق می‌افتد. یک مثال از چنین توزیعی **پرتاب یک سکه** است که یک نتیجه خط و دیگری شیر است.

$$(x+y)^n = \sum_k^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

از مباحث ریاضی فیزیک داریم

احتمال

اگر $\quad x = p, \qquad y = q = 1 - p$

$$(p+q)^n = \sum_k^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

سمت چپ اتحاد بالا $\quad (p+q)^n = (p+1-p)^n = 1$

$$1 = \sum_k^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_k^n p(n,k)$$

$$p(n,k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$ تابع توزیع گسسته

$$\langle k\rangle =?, \qquad \sigma_k^2 =?$$

$$\langle k\rangle = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} kp^k q^{n-k}$$

$$kp^k = p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}p^k$$

$$\langle k\rangle = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} kp^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}p^k q^{n-k}$$

$$\langle k\rangle = p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

احتمال

$$\langle k\rangle =?, \qquad \sigma_k^2 =?$$

$$\langle k\rangle = p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}}_{=(p+q)^n}$$

$$\langle k\rangle = p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}(p+q)^n = np(p+q)^{n-1}, \qquad p+q=1$$

$$\boxed{\langle k\rangle = np}$$

$$\langle k \rangle = np, \qquad \sigma_k^2 = ?$$

$$\langle k^2 \rangle = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 p^k q^{n-k}$$

$$k^2 p^k = p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}p^k\right)$$

$$\langle k^2 \rangle = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}p^k\right) q^{n-k}$$

احتمال

$$\langle k \rangle = np, \qquad \sigma_k^2 = ?$$

$$\langle k^2 \rangle = p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}}_{=(p+q)^n}\right)$$

$$\langle k^2 \rangle = p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}(p+q)^n\right) = p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(np(p+q)^{n-1}\right)$$

$$\langle k^2 \rangle = np(p+q)^{n-1} + n(n-1)p^2(p+q)^{n-2}$$

احتمال

$$\langle k \rangle = np, \qquad \sigma_k^2 = ?$$

$$\langle k^2 \rangle = np(p+q)^{n-1} + n(n-1)p^2(p+q)^{n-2}, \qquad p+q=1$$

$$\boxed{\langle k^2 \rangle = np + n(n-1)p^2}$$

$$\sigma_k^2 = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2 = np + n(n-1)p^2 - n^2p^2$$

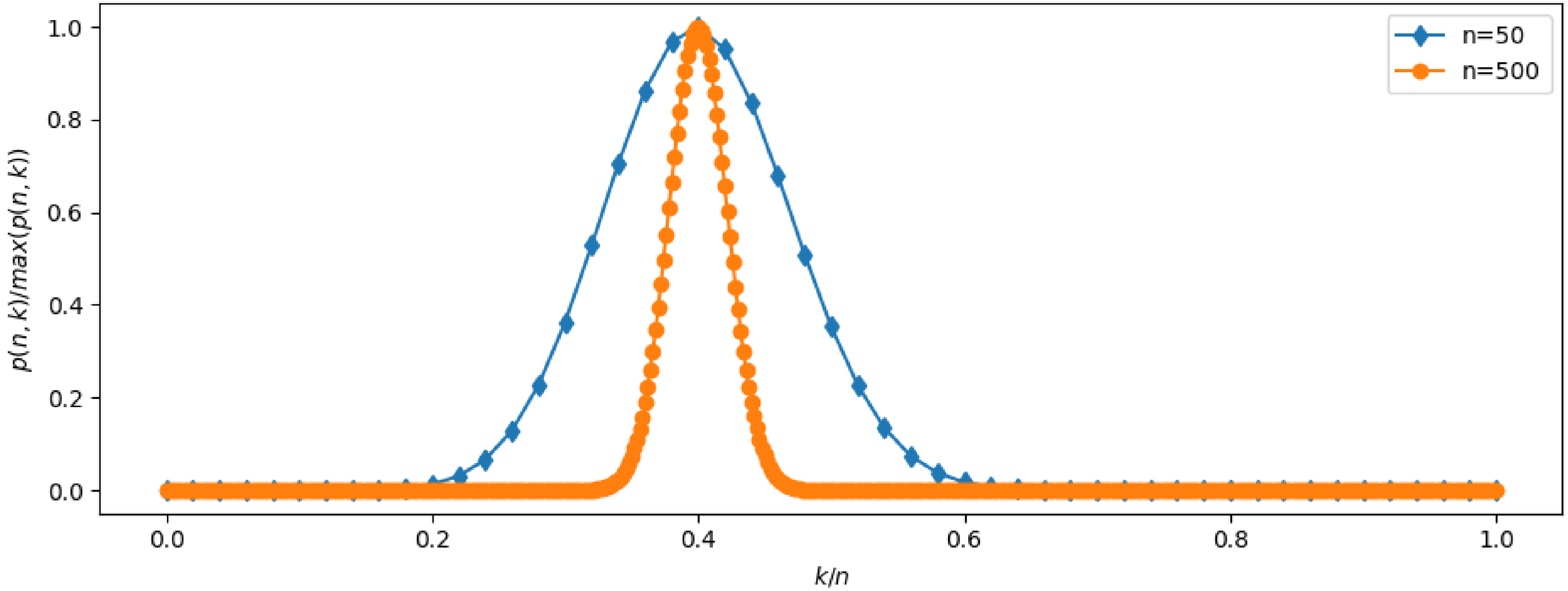
$$\sigma_k^2 = np(1-p) = npq$$

$$\boxed{\langle k \rangle = np, \qquad \sigma_k^2 = np(1-p) = npq}$$

احتمال

$$\langle k \rangle = np, \qquad \sigma_k^2 = np(1-p) = npq$$

$$p(n,k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \qquad p = q = \frac{1}{2}$$



احتمال

$$\langle k \rangle = np, \qquad \sigma_k^2 = np(1-p) = npq$$

$$p(n,k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \qquad p = q = \frac{1}{2}$$

$$\text{پهنا} = \frac{\sigma_k}{\langle k \rangle}$$

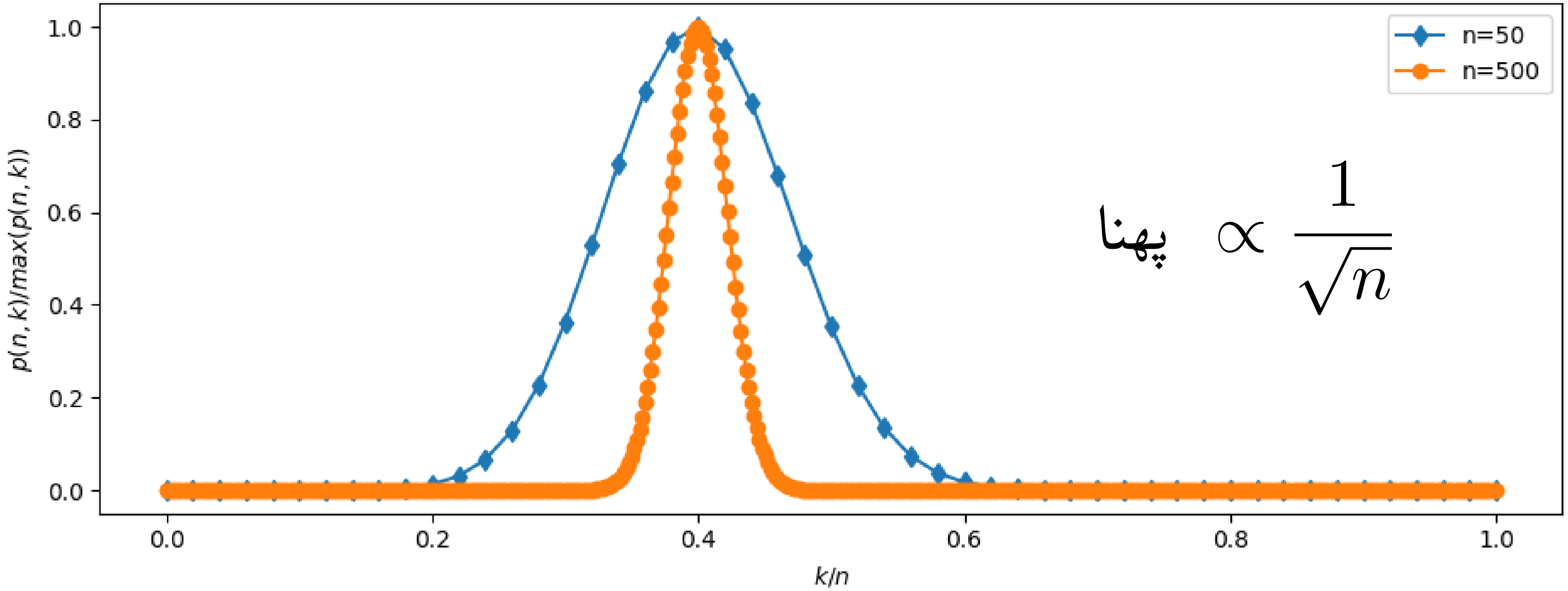
$$\text{پهنا} = \frac{\sigma_k}{\langle k \rangle} = \frac{\sqrt{np(1-p)}}{np} = \sqrt{\frac{1-p}{np}} = \sqrt{\frac{1}{n}}\sqrt{\frac{1-p}{p}}$$

$$\text{پهنا} \propto \frac{1}{\sqrt{n}}$$

احتمال

$$\langle k \rangle = np, \qquad \sigma_k^2 = np(1-p) = npq$$

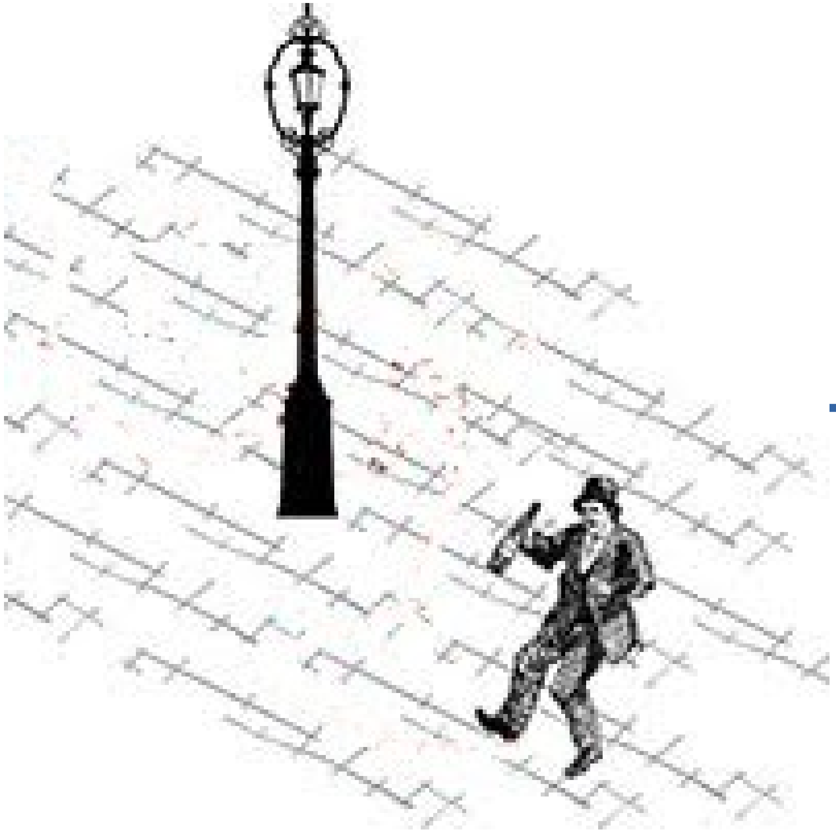
$$p(n,k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \qquad p = q = \frac{1}{2}$$



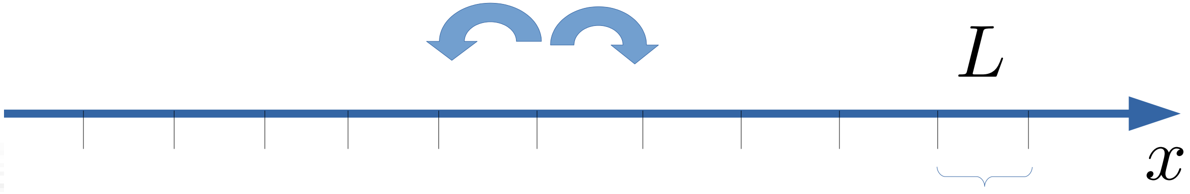
پهنا $\propto \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

احتمال

$$\langle k \rangle = np, \quad \langle k^2 \rangle = np + n(n-1)p^2, \quad \sigma_k^2 = np(1-p) = npq$$



$$p = \frac{1}{2}$$



k : قدم به طرف راست

$n-k$: قدم به طرف چپ

$$x = kL - (n-k)L$$

احتمال

$$\langle k\rangle = np, \quad \langle k^2\rangle = np + n(n-1)p^2, \quad \sigma_k^2 = np(1-p) = npq$$

$$p = \frac{1}{2}$$

$$x = kL - (n-k)L = 2kL - nL$$

$$\langle x\rangle = 2\langle k\rangle L - nL$$

$$\langle k\rangle = np = n\frac{1}{2}$$

$$\langle x\rangle = nL - nL = 0$$

احتمال

$$\langle k\rangle = np, \quad \langle k^2\rangle = np + n(n-1)p^2, \quad \sigma_k^2 = np(1-p) = npq$$

$$p = \frac{1}{2}$$

$$x = kL - (n-k)L = 2kL - nL$$

$$\langle k\rangle = np = n\frac{1}{2}, \quad \langle x\rangle = 0$$

$$\langle x^2\rangle = 4\langle k^2\rangle L^2 - 4\langle k\rangle nL^2 + n^2L^2$$

$$\langle k^2\rangle = np + n(n-1)p^2 = n\frac{1}{2} + n(n-1)\frac{1}{4}$$

احتمال

$$\langle k\rangle = np, \quad \langle k^2\rangle = np + n(n-1)p^2, \quad \sigma_k^2 = np(1-p) = npq$$

$$p = \frac{1}{2}$$

$$x = kL - (n-k)L = 2kL - nL$$

$$\langle k\rangle = np = n\frac{1}{2}, \quad \langle x\rangle = 0$$

$$\langle k^2\rangle = n\frac{1}{2} + n(n-1)\frac{1}{4} = n(n+1)\frac{1}{4}$$

$$\langle x^2\rangle = 4\langle k^2\rangle L^2 - 4\langle k\rangle nL^2 + n^2L^2 = n(n+1)L^2 - 2n^2L^2 + n^2L^2$$

احتمال

$$\langle k\rangle = np, \quad \langle k^2\rangle = np + n(n-1)p^2, \quad \sigma_k^2 = np(1-p) = npq$$

$$p = \frac{1}{2}$$

$$x = kL - (n-k)L = 2kL - nL$$

$$\langle x\rangle = 0$$

$$\langle x^2\rangle = nL^2$$

$$\sigma_x^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = nL^2$$

$$\sigma_x = \sqrt{n}L$$

احتمال

توزیع پواسون برای **رویدادهای خیلی نادر** بکار گرفته می‌شود که بطور مستقل اتفاق می‌افتند و متوسط آن‌ها در دوره تحت بررسی تغییر نمی‌کند.

- نقص‌های مادرزادی در هر سال
- تصادفهای جاده‌ای در یک محور خاص در سال
- تعداد دفعات فعال شدن دستگاه Geiger در دقیقه

تابع توزیع گسسته

$$p(x) = e^{-m}\frac{m^x}{x!}$$

$x = 0, 1, 2, \cdots$

m یک مقدار خاص است!

احتمال

توزیع پواسون برای **رویدادهای خیلی نادر** بکار گرفته می‌شود که بطور مستقل اتفاق می‌افتند و متوسط آن‌ها در دوره تحت بررسی تغییر نمی‌کند.

تابع توزیع گسسته

$$p(x) = e^{-m}\frac{m^x}{x!}$$

$$x = 0, 1, 2, \cdots$$

m یک مقدار خاص است!

$$\sum_{x=0}^{\infty} p(x) = 1, \qquad \langle x \rangle = \sum_{x=0}^{\infty} x p(x)$$

احتمال

توزیع پواسون برای **رویدادهای خیلی نادر** بکار گرفته می‌شود که بطور مستقل اتفاق می‌افتند و متوسط آن‌ها در دوره تحت بررسی تغییر نمی‌کند.

$$p(x) = e^{-m}\frac{m^x}{x!}$$ تابع توزیع گسسته

m یک مقدار خاص است! $x = 0, 1, 2, \cdots$

$$\sum_{x=0}^{\infty} p(x) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{-m}\frac{m^x}{x!} = e^{-m}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{m^x}{x!} = e^{-m}e^{m} = 1$$

احتمال

توزیع پواسون برای **رویدادهای خیلی نادر** بکار گرفته می‌شود که بطور مستقل اتفاق می‌افتند و متوسط آن‌ها در دوره تحت بررسی تغییر نمی‌کند.

تابع توزیع گسسته

$$p(x) = e^{-m}\frac{m^x}{x!}$$

$$x = 0, 1, 2, \cdots$$

m یک مقدار خاص است!

$$\sum_{x=0}^{\infty} p(x) = 1$$

$$\langle x \rangle = \sum_{x=0}^{\infty} x p(x)$$

احتمال

توزیع پواسون برای **رویدادهای خیلی نادر** بکار گرفته می‌شود که بطور مستقل اتفاق می‌افتند و متوسط آن‌ها در دوره تحت بررسی تغییر نمی‌کند.

تابع توزیع گسسته	$p(x) = e^{-m}\dfrac{m^x}{x!}$
$x = 0, 1, 2, \cdots$	m یک مقدار خاص است!

$$\langle x \rangle = \sum_{x=0}^{\infty} x p(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x e^{-m}\frac{m^x}{x!} = e^{-m}\sum_{x=0}^{\infty} x\frac{m^x}{x!}$$

احتمال

توزیع پواسون برای **رویدادهای خیلی نادر** بکار گرفته می‌شود که بطور مستقل اتفاق می‌افتند و متوسط آن‌ها در دوره تحت بررسی تغییر نمی‌کند.

تابع توزیع گسسته
$$p(x) = e^{-m}\frac{m^x}{x!}$$

$x = 0, 1, 2, \cdots$

m یک مقدار خاص است!

می‌دانیم
$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}e^z = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!} \Rightarrow e^z = \sum_{k=0}^{\infty}k\frac{z^{k-1}}{k!}$$

احتمال

توزیع پواسون برای **رویدادهای خیلی نادر** بکار گرفته می‌شود که بطور مستقل اتفاق می‌افتند و متوسط آن‌ها در دوره تحت بررسی تغییر نمی‌کند.

$$p(x) = e^{-m}\frac{m^x}{x!}$$

تابع توزیع گسسته

$$m = \langle x \rangle$$

$$x = 0, 1, 2, \cdots$$

$$\langle x \rangle = e^{-m}\sum_{x=0}^{\infty} x\frac{m^x}{x!} = e^{-m}\sum_{x=0}^{\infty} mx\frac{m^{x-1}}{x!} = me^{-m}\sum_{x=0}^{\infty} x\frac{m^{x-1}}{x!}$$

$$\langle x \rangle = me^{-m}e^{m} = m$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

احتمال

توزیع پواسون برای **رویدادهای خیلی نادر** بکار گرفته می‌شود که بطور مستقل اتفاق می‌افتند و متوسط آن‌ها در دوره تحت بررسی تغییر نمی‌کند.

تابع توزیع گسسته

$$p(x) = e^{-m}\frac{m^x}{x!}$$

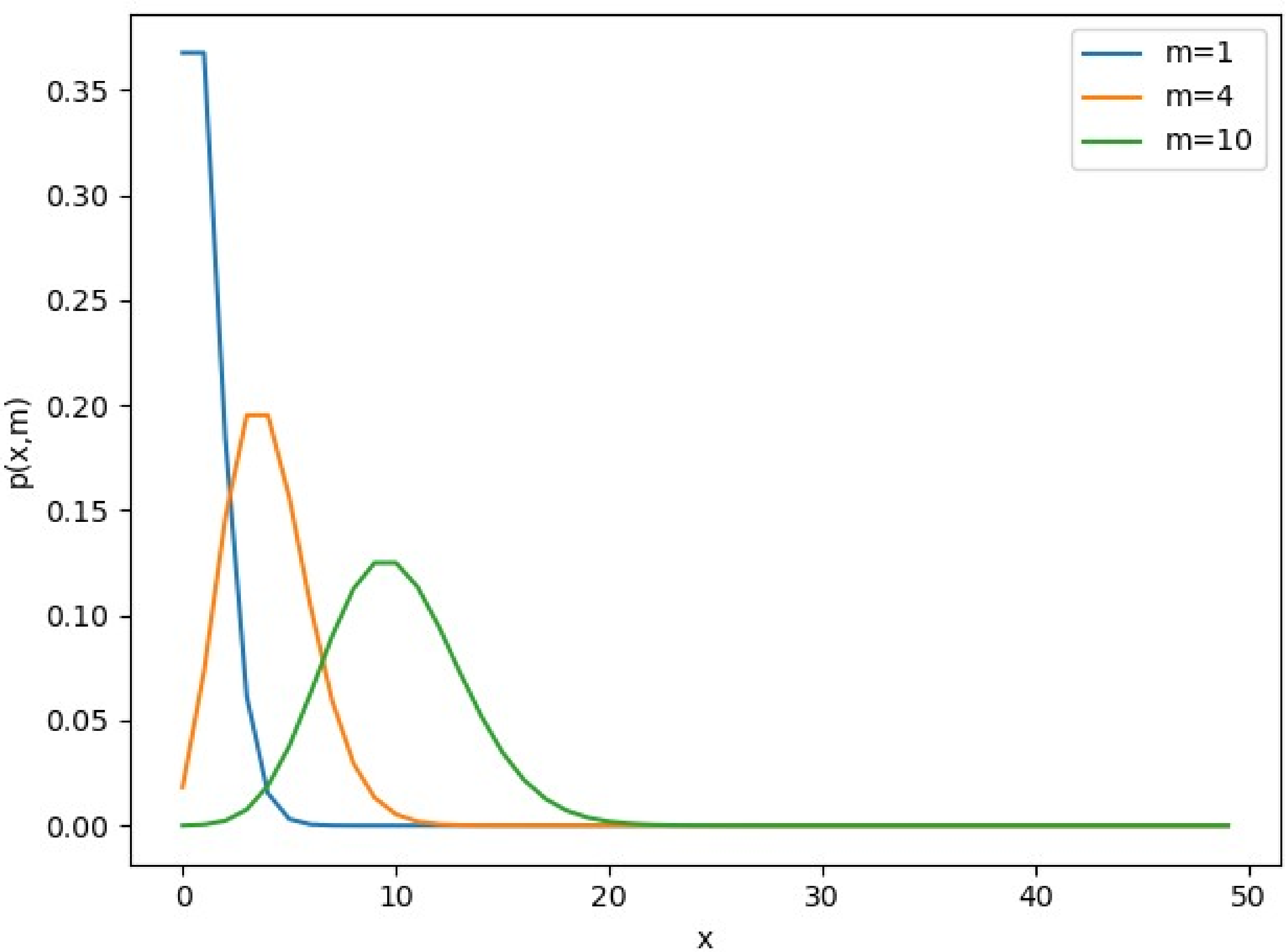
$$x = 0, 1, 2, \cdots$$

$$m = \langle x \rangle$$

$$\langle x \rangle = \sum_{x=0}^{\infty} x p(x) = m$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} p(x) = 1$$

احتمال



$$p(x) = e^{-m}\frac{m^x}{x!}$$

$$x = 0, 1, 2, \cdots$$

$$m = \langle x \rangle$$

احتمال

اولین مثال از یک توزیع پواسون به یک اتفاق نادر در ارتش آمریکا مربوط می‌شد. سربازانی که در اثر لگد اسب فوت می‌کردند!

Number of deaths per year per corps	Observed frequency
0	109
1	65
2	22
3	3
4	1
≥ 5	0
Total	200

اطلاعات ثبت شده برای تعداد فوتی‌های لگد اسب از ۱۰ لشگر ارتش آمریکا در ۲۰ سال بین ۱۸۷۵-۱۸۹۷ در جدول مقابل داده شده است،

- مقدار متوسط فوتی‌ها در سال
- مقایسه دفعات مشاهده شده با دفعات محاسبه شده از تابع توزیع پواسون

احتمال

اولین مثال از یک توزیع پواسون به یک اتفاق نادر در ارتش آمریکا مربوط می‌شد. سربازانی که در اثر لگد اسب فوت می‌کردند!

Number of deaths per year per corps	Observed frequency
0	109
1	65
2	22
3	3
4	1
≥ 5	0
Total	200

مقدار متوسط فوتی‌ها در سال

$$\langle x\rangle = \frac{0\times 109 + 1\times 65 + 2\times 22 + 3\times 3 + 4\times 1}{109+65+22+3+1}$$

$$\langle x\rangle = \frac{123}{200} = 0.615$$

احتمال

اولین مثال از یک توزیع پواسون به یک اتفاق نادر در ارتش آمریکا مربوط می‌شد. سربازانی که در اثر لگد اسب فوت می‌کردند!

Number of deaths per year per corps	Observed frequency	Calculated
0	109	$200 \times p(0) = 108.128$
1	65	$200 \times p(1) = 66.499$
2	22	$200 \times p(2) = 20.448$
3	3	$200 \times p(3) = 4.192$
4	1	$200 \times p(4) = 0.644$
≥ 5	0	$200 \times p(5) = 0.079$
Total	200	199.99

- **مقایسه دفعات مشاهده شده با دفعات محاسبه شده از تابع توزیع پواسون**

$$\langle x \rangle = m = 0.615$$

$$p(x) = e^{-0.615} \frac{0.615^x}{x!}$$