جلسه هفتم

بخش دوم

ترمودینامیک و مکانیک آماری

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه
دانشگاه قم
مهر ۹۹

مفاهیمی در فیزیک حرارت

مطالب و عناوین:

- مبانی آماری فیزیک حرارت
- ریاضیات مفید
- گرما
- احتمال
- دما و فاکتور بولتزمن
- توزیع ماکسول بولتزمن
- فشار
- اثر افیوژن مولکولی
- پویش آزاد متوسط و برخوردها
- انرژی و قانون اول ترمودینامیک
- فرایندهای همدما و بی‌دررو
- ماشین‌های حرارتی و قانون دوم ترمودینامیک
- آنتروپی

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

احتمال

توزیع نمایی یک توزیع پیوسته است

$$p(x)\mathrm{d}x = Ae^{-x/\lambda}\mathrm{d}x, \quad x, x+\mathrm{d}x, \quad x \geq 0$$

که A و λ کمیتهای ثابتی هستند. از توزیع نمایی و توزیع پواسون برای توصیف فرآیندهای مشابه استفاده می‌شود. برای توزیع نمایی ، x زمان واقعی بین رویدادهایی مثل واپاشی‌های متوالی رادیواکتیو ، برخوردهای مولکولی و ... است.

$$\int_0^\infty p(x)\mathrm{d}x = 1, \qquad \langle x \rangle = \int_0^\infty xp(x)\mathrm{d}x$$

احتمال

توزیع نمایی یک توزیع پیوسته است

$$p(x)\mathrm{d}x = Ae^{-x/\lambda}\mathrm{d}x, \quad x, x+\mathrm{d}x, \quad x \geq 0$$

که A و λ کمیتهای ثابتی هستند.

$$1 = \int_0^\infty p(x)\mathrm{d}x$$

$$1 = \int_0^\infty p(x)\mathrm{d}x = A\int_0^\infty e^{-x/\lambda}\mathrm{d}x = A\left[-\lambda e^{-x/\lambda}\right]_0^\infty$$

$$1 = A\lambda \Rightarrow A = \frac{1}{\lambda}$$

احتمال

توزیع نمایی یک توزیع پیوسته است

$$p(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}e^{-x/\lambda}\mathrm{d}x, \quad x, x+\mathrm{d}x, \quad x \geq 0$$

که λ کمیت ثابتی هستند.

$$\int_0^\infty p(x)\mathrm{d}x = 1, \qquad \langle x \rangle = \int_0^\infty xp(x)\mathrm{d}x$$

$$\langle x \rangle = \int_0^\infty x\frac{1}{\lambda}e^{-x/\lambda}\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty xe^{-x/\lambda}\mathrm{d}x$$

x	$e^{-x/\lambda}$
1	$-\lambda e^{-x/\lambda}$
0	$+\lambda^2 e^{-x/\lambda}$

$$\langle x \rangle = \frac{1}{\lambda}\left[(-\lambda x - \lambda^2)e^{-x/\lambda}\right]_0^\infty = \lambda$$

احتمال

توزیع نمایی یک توزیع پیوسته است

$$p(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}e^{-x/\lambda}\mathrm{d}x, \quad x, x+\mathrm{d}x, \quad x \geq 0$$

که λ مقدار متوسط توزیع است.

$$\int_0^\infty p(x)\mathrm{d}x = 1, \qquad \langle x \rangle = \int_0^\infty xp(x)\mathrm{d}x = \lambda$$

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

$$\langle x^2 \rangle = \int_0^\infty x^2 p(x)\mathrm{d}x$$

احتمال

توزیع نمایی یک توزیع پیوسته است

$$p(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}e^{-x/\lambda}\mathrm{d}x, \quad x, x+\mathrm{d}x, \quad x \geq 0$$

که λ مقدار متوسط توزیع است.

$$\int_0^\infty p(x)\mathrm{d}x = 1, \qquad \langle x \rangle = \int_0^\infty x p(x)\mathrm{d}x = \lambda$$

$$\langle x^2 \rangle = \int_0^\infty x^2 \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda}\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty x^2 e^{-x/\lambda}\mathrm{d}x$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{\lambda}\left[(-\lambda x^2 - 2\lambda^2 x - 2\lambda^3)e^{-x/\lambda}\right]_0^\infty = 2\lambda^2$$

x^2		$e^{-x/\lambda}$
$2x$	$+$	$-\lambda e^{-x/\lambda}$
2	$-$	$+\lambda^2 e^{-x/\lambda}$
0	$+$	$-\lambda^3 e^{-x/\lambda}$

احتمال

توزیع نمایی یک توزیع پیوسته است

$$p(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}e^{-x/\lambda}\mathrm{d}x, \quad x, x+\mathrm{d}x, \quad x \geq 0$$

که λ مقدار متوسط توزیع است.

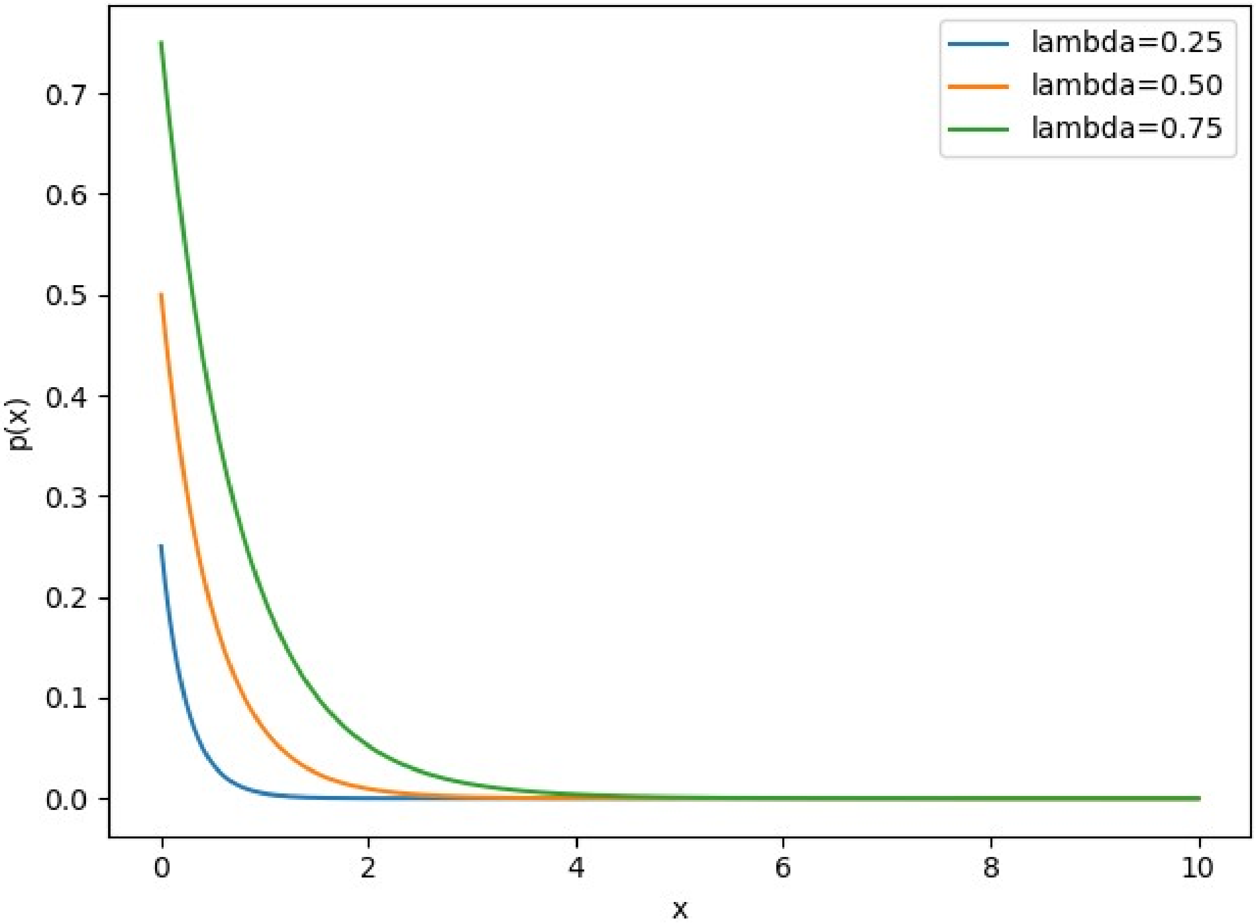
$$\int_0^\infty p(x)\mathrm{d}x = 1, \qquad \langle x\rangle = \int_0^\infty xp(x)\mathrm{d}x = \lambda$$

$$\langle x^2\rangle = \int_0^\infty x^2p(x)\mathrm{d}x = 2\lambda^2$$

$$\sigma_x^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = 2\lambda^2 - \lambda^2 = \lambda^2, \quad \sigma_x = \lambda$$

احتمال

توزیع نمایی یک توزیع پیوسته است



$$p(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}e^{-x/\lambda}\mathrm{d}x$$

$$x, x + \mathrm{d}x$$

$$x \geq 0$$

که λ مقدار متوسط توزیع است.

احتمال

x	1	2	3	4	5	6
p_x	p_0	p_0	p_0	p_0	p_0	p_0

$$\sum_{x=1}^{6} p_x = 1, \qquad \langle x \rangle = \sum_{x=1}^{6} x p_x, \qquad \langle x^2 \rangle = \sum_{x=1}^{6} x^2 p_x$$

$$\sum_{x=1}^{6} p_x = 6p_0$$

$$\hat{p}_x = \frac{p_x}{\sum_{x=1}^{6} p_x}$$

x	1	2	3	4	5	6
p_x	p_0	p_0	p_0	p_0	p_0	p_0
$\hat{p}_x$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

احتمال

x	1	2	3	4	5	6
$\hat{p}_x$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$\sum_{x=1}^{6}\hat{p}_x = 1, \qquad \langle x\rangle = \sum_{x=1}^{6} x\hat{p}_x, \qquad \langle x^2\rangle = \sum_{x=1}^{6} x^2\hat{p}_x$$

$$\langle x\rangle = \sum_{x=1}^{6} x\hat{p}_x = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6}$$

$$\langle x^2\rangle = \sum_{x=1}^{6} x^2\hat{p}_x = \frac{1}{6}\left(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2\right) = \frac{91}{6}$$

احتمال

x	1	2	3	4	5	6
$\hat{p}_x$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$\sum_{x=1}^{6} \hat{p}_x = 1, \quad \langle x \rangle = \sum_{x=1}^{6} x\hat{p}_x = \frac{21}{6}, \quad \langle x^2 \rangle = \sum_{x=1}^{6} x^2 \hat{p}_x = \frac{91}{6}$$

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

$$\sigma_x^2 = \frac{91}{6} - \frac{441}{36} = \frac{105}{36} = 2.92, \quad \sigma_x = 1.71$$

احتمال

n متغییر تصادفی مستقل

X_1 متغییر تصادفی اول

X_2 متغییر تصادفی دوم

...

X_n متغییر تصادفی n ام

فرض می‌کنیم

$$\begin{cases} \langle X_1\rangle = \langle X\rangle & \langle X_2\rangle = \langle X\rangle \qquad \langle X_n\rangle = \langle X\rangle \\ \langle X_1^2\rangle = \langle X^2\rangle & \langle X_2^2\rangle = \langle X^2\rangle \qquad \langle X_n^2\rangle = \langle X^2\rangle \\ \sigma_{X_1}^2 = \sigma_X^2 & \sigma_{X_2}^2 = \sigma_X^2 \qquad \sigma_{X_n}^2 = \sigma_X^2 \end{cases}$$

n متغییر تصادفی مستقل

فرض می‌کنیم

$$\overbrace{\left\{\begin{array}{lll} \langle X_1\rangle = \langle X\rangle & \langle X_2\rangle = \langle X\rangle & \langle X_n\rangle = \langle X\rangle \\ \langle X_1^2\rangle = \langle X^2\rangle & \langle X_2^2\rangle = \langle X^2\rangle & \langle X_n^2\rangle = \langle X^2\rangle \\ \sigma_{X_1}^2 = \sigma_X^2 & \sigma_{X_2}^2 = \sigma_X^2 & \sigma_{X_n}^2 = \sigma_X^2 \end{array}\right.}$$

تعریف متغییر تصادفی جدید $Y = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$

$$\langle Y\rangle, \quad \langle Y^2\rangle, \quad \sigma_Y^2$$

احتمال

n متغیر تصادفی مستقل

فرض می‌کنیم

$$\begin{cases} \langle X_1\rangle = \langle X\rangle & \langle X_2\rangle = \langle X\rangle & \langle X_n\rangle = \langle X\rangle \\ \langle X_1^2\rangle = \langle X^2\rangle & \langle X_2^2\rangle = \langle X^2\rangle & \langle X_n^2\rangle = \langle X^2\rangle \\ \sigma^2_{X_1} = \sigma^2_X & \sigma^2_{X_2} = \sigma^2_X & \sigma^2_{X_n} = \sigma^2_X \end{cases}$$

تعریف متغیر تصادفی جدید $\quad Y = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$

$$\langle Y\rangle = \frac{1}{n}\left(\langle X_1\rangle + \langle X_2\rangle + \cdots + \langle X_n\rangle\right) = \frac{1}{n}\left(n\langle X\rangle\right) = \langle X\rangle$$

$$\langle Y\rangle = \langle X\rangle$$

احتمال

n متغیر تصادفی مستقل

فرض می‌کنیم

$$\left\{\begin{array}{llcl}
\langle X_1\rangle = \langle X\rangle & \langle X_2\rangle = \langle X\rangle & & \langle X_n\rangle = \langle X\rangle \\
\langle X_1^2\rangle = \langle X^2\rangle & \langle X_2^2\rangle = \langle X^2\rangle & & \langle X_n^2\rangle = \langle X^2\rangle \\
\sigma_{X_1}^2 = \sigma_X^2 & \sigma_{X_2}^2 = \sigma_X^2 & & \sigma_{X_n}^2 = \sigma_X^2
\end{array}\right.$$

تعریف متغیر تصادفی جدید $\quad Y = \dfrac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$

$$\langle Y^2\rangle = \frac{1}{n^2}\left[\langle X_1^2\rangle + \langle X_2^2\rangle + \cdots + \langle X_n^2\rangle + 2\langle X_1\rangle(\langle X_2\rangle + \cdots + \langle X_n\rangle)\right.$$
$$\left. +2\langle X_2\rangle(\langle X_3\rangle + \cdots + \langle X_n\rangle) + \cdots + 2\langle X_{n-1}\rangle\langle X_n\rangle\right]$$

احتمال

$$\overbrace{\begin{cases} \langle X_1\rangle = \langle X\rangle & \langle X_2\rangle = \langle X\rangle & \qquad\qquad \langle X_n\rangle = \langle X\rangle \\ \langle X_1^2\rangle = \langle X^2\rangle & \langle X_2^2\rangle = \langle X^2\rangle & \qquad\qquad \langle X_n^2\rangle = \langle X^2\rangle \\ \sigma^2_{X_1} = \sigma^2_X & \sigma^2_{X_2} = \sigma^2_X & \qquad\qquad \sigma^2_{X_n} = \sigma^2_X \end{cases}}^{n \text{ متغییر تصادفی مستقل}}$$

فرض می‌کنیم

تعریف متغییر تصادفی جدید $\quad Y = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$

$$\langle Y^2\rangle = \frac{1}{n^2}\left[n\langle X^2\rangle + 2\langle X\rangle^2(n-1) + 2\langle X\rangle^2(n-2) + \cdots + 2\langle X\rangle^2\right]$$

$$\langle Y^2\rangle = \frac{1}{n^2}\left[n\langle X^2\rangle + 2\langle X\rangle^2(1 + 2 + \cdots + (n-1))\right]$$

احتمال

n متغیر تصادفی مستقل

$$\overbrace{\hphantom{\langle X_1\rangle = \langle X\rangle \quad \langle X_2\rangle = \langle X\rangle \quad \langle X_n\rangle = \langle X\rangle}}$$

فرض می‌کنیم
$$\begin{cases} \langle X_1\rangle = \langle X\rangle & \langle X_2\rangle = \langle X\rangle & \langle X_n\rangle = \langle X\rangle \\ \langle X_1^2\rangle = \langle X^2\rangle & \langle X_2^2\rangle = \langle X^2\rangle & \langle X_n^2\rangle = \langle X^2\rangle \\ \sigma_{X_1}^2 = \sigma_X^2 & \sigma_{X_2}^2 = \sigma_X^2 & \sigma_{X_n}^2 = \sigma_X^2 \end{cases}$$

تعریف متغیر تصادفی جدید $\quad Y = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$

$$\langle Y^2\rangle = \frac{1}{n^2}\left[n\langle X^2\rangle + 2\langle X\rangle^2(1 + 2 + \cdots + (n-1))\right]$$

$$\boxed{1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}} \xrightarrow{n \to n-1} \boxed{1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}}$$

n متغیر تصادفی مستقل

فرض می‌کنیم

$$\begin{cases} \langle X_1 \rangle = \langle X \rangle & \langle X_2 \rangle = \langle X \rangle & \cdots & \langle X_n \rangle = \langle X \rangle \\ \langle X_1^2 \rangle = \langle X^2 \rangle & \langle X_2^2 \rangle = \langle X^2 \rangle & \cdots & \langle X_n^2 \rangle = \langle X^2 \rangle \\ \sigma_{X_1}^2 = \sigma_X^2 & \sigma_{X_2}^2 = \sigma_X^2 & \cdots & \sigma_{X_n}^2 = \sigma_X^2 \end{cases}$$

تعریف متغیر تصادفی جدید $\quad Y = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$

$$\langle Y^2 \rangle = \frac{1}{n^2}\left[n\langle X^2 \rangle + 2\langle X \rangle^2 \frac{(n-1)n}{2}\right] = \frac{1}{n^2}\left[n\langle X^2 \rangle + \langle X \rangle^2 (n-1)n\right]$$

احتمال

n متغیر تصادفی مستقل

فرض می‌کنیم

$$\left\{\begin{array}{lll} \langle X_1\rangle = \langle X\rangle & \langle X_2\rangle = \langle X\rangle & \langle X_n\rangle = \langle X\rangle \\ \langle X_1^2\rangle = \langle X^2\rangle & \langle X_2^2\rangle = \langle X^2\rangle & \langle X_n^2\rangle = \langle X^2\rangle \\ \sigma_{X_1}^2 = \sigma_X^2 & \sigma_{X_2}^2 = \sigma_X^2 & \sigma_{X_n}^2 = \sigma_X^2 \end{array}\right.$$

تعریف متغیر تصادفی جدید $\quad Y = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$

$$\langle Y\rangle = \langle X\rangle, \quad \langle Y^2\rangle = \frac{1}{n^2}\left[n\langle X^2\rangle + \langle X\rangle^2(n-1)n\right], \quad \sigma_Y^2$$

$$\overbrace{\text{فرض می‌کنیم}\left\{\begin{array}{lll} \langle X_1\rangle = \langle X\rangle & \langle X_2\rangle = \langle X\rangle & \langle X_n\rangle = \langle X\rangle \\ \langle X_1^2\rangle = \langle X^2\rangle & \langle X_2^2\rangle = \langle X^2\rangle & \langle X_n^2\rangle = \langle X^2\rangle \\ \sigma^2_{X_1} = \sigma^2_X & \sigma^2_{X_2} = \sigma^2_X & \sigma^2_{X_n} = \sigma^2_X \end{array}\right.}^{n \text{ متغیر تصادفی مستقل}}$$

تعریف متغیر تصادفی جدید $$Y = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$$

$$\sigma_Y^2 = \langle Y^2\rangle - \langle Y\rangle^2 = \frac{1}{n^2}\left[n\langle X^2\rangle + \langle X\rangle^2(n-1)n\right] - \langle X\rangle^2$$

$$\sigma_Y^2 = \langle Y^2\rangle - \langle Y\rangle^2 = \frac{1}{n}\langle X^2\rangle + \langle X\rangle^2(\cancel{1} - \frac{1}{n}) - \cancel{\langle X\rangle^2} = \frac{1}{n}\left(\langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2\right)$$

n متغییر تصادفی مستقل

فرض می‌کنیم

$$\langle X_1\rangle = \langle X\rangle \qquad \langle X_2\rangle = \langle X\rangle \qquad \langle X_n\rangle = \langle X\rangle$$

$$\langle X_1^2\rangle = \langle X^2\rangle \qquad \langle X_2^2\rangle = \langle X^2\rangle \qquad \langle X_n^2\rangle = \langle X^2\rangle$$

$$\sigma_{X_1}^2 = \sigma_X^2 \qquad \sigma_{X_2}^2 = \sigma_X^2 \qquad \sigma_{X_n}^2 = \sigma_X^2$$

تعریف متغییر تصادفی جدید $\quad Y = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$

$$\sigma_Y^2 = \langle Y^2\rangle - \langle Y\rangle^2 = \frac{1}{n}\left(\langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2\right) = \frac{1}{n}\sigma_x^2 \Rightarrow \sigma_Y = \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma_x$$

احتمال

n متغیر تصادفی مستقل

فرض می‌کنیم

$$\left\{\begin{array}{lll} \langle X_1\rangle = \langle X\rangle & \langle X_2\rangle = \langle X\rangle & \langle X_n\rangle = \langle X\rangle \\ \langle X_1^2\rangle = \langle X^2\rangle & \langle X_2^2\rangle = \langle X^2\rangle & \langle X_n^2\rangle = \langle X^2\rangle \\ \sigma_{X_1}^2 = \sigma_X^2 & \sigma_{X_2}^2 = \sigma_X^2 & \sigma_{X_n}^2 = \sigma_X^2 \end{array}\right.$$

$$Y = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) : \qquad \sigma_Y = \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma_x$$

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n : \qquad \sigma_Y = \sqrt{n}\sigma_x$$