# جلسه سیزدهم

## ترمودینامیک و مکانیک آماری

**محمدرضا مظفری**
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه
دانشگاه قم
مهر ۹۹

# مفاهیمی در فیزیک حرارت

## مطالب و عناوین:

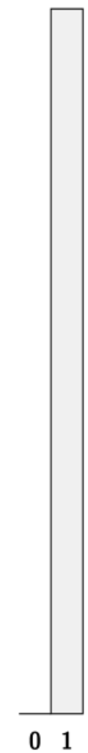
- مبانی آماری فیزیک حرارت
- ریاضیات مفید
- گرما
- احتمال
- **دما و فاکتور بولتزمن**
- توزیع ماکسول بولتزمن
- فشار
- اثر افیوژن مولکولی
- پویش آزاد متوسط و برخوردها
- انرژی و قانون اول ترمودینامیک
- فرایندهای همدما و بی‌دررو
- ماشین‌های حرارتی و قانون دوم ترمودینامیک
- آنتروپی

# دما و فاکتور بولتزمن

**مثال۱:** برای بررسی ماهیت آماری توزیع بولتزمن، قصد داریم یک **بازی** انجام دهیم که در آن مقدار انرژی در یک شبکه توزیع می شود.

- از نظر آماری پیکربندی مقابل یک پیکربندی غیرمحتمل و بعید است زیرا چنین حالتی فقط با یک میکروحالت همراه است. یعنی

$$\Omega = 1$$




| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

شبکه

$20 \times 20$

هر نقطه از شبکه در ابتدا حاوی یک مقدار انرژی واحد است.

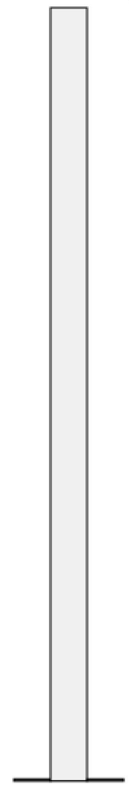


محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

# دما و فاکتور بولتزمن

**مثال۱:** برای بررسی ماهیت آماری توزیع بولتزمن، قصد داریم یک **بازی** انجام دهیم که در آن مقدار انرژی در یک شبکه توزیع می شود.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

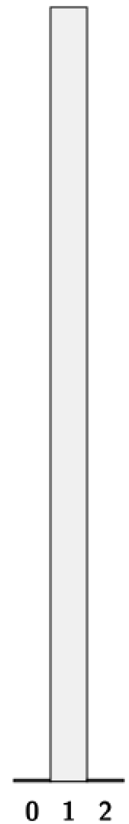



- حالا، نقطه‌ای شبکه را به صورت تصادفی انتخاب کرده و مقدار انرژی را از آن نقطه از شبکه برداشته و نقطه دیگری از شبکه که بطور تصادفی انتخاب کرده‌ایم، می‌دهیم.

# دما و فاکتور بولتزمن

**مثال۱:** برای بررسی ماهیت آماری توزیع بولتزمن، قصد داریم یک **بازی** انجام دهیم که در آن مقدار انرژی در یک شبکه توزیع می شود.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |



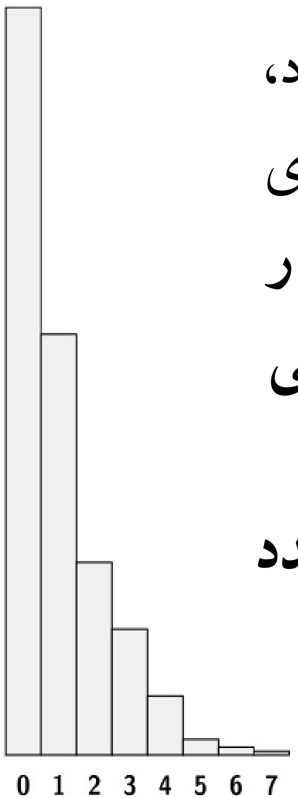

- پس از یک تکرار ، از آنجا که 400 راه برای انتخاب مکانی از شبکه که مقدار انرژی از آن حذف شده است وجود دارد، و سپس 399 راه برای انتخاب مکانی از شبکه که مقدار انرژی به آن اضافه می شود.

$$\Omega = 400 \times 399 = 19600$$

# دما و فاکتور بولتزمن

**مثال۱:** برای بررسی ماهیت آماری توزیع بولتزمن، قصد داریم یک **بازی** انجام دهیم که در آن مقدار انرژی در یک شبکه توزیع می شود.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 5 | 1 | 4 | 0 | 1 | 1 | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 | 1 | 0 |
| 0 | 3 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 0 | 0 | 1 | 2 | 4 | 1 | 0 | 3 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 4 | 3 | 4 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 4 | 0 | 1 | 0 | 2 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 4 | 0 | 1 | 0 | 2 | 2 | 1 | 3 | 1 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 2 | 0 | 6 | 0 | 3 | 1 | 3 | 0 | 2 | 1 | 1 | 0 |
| 2 | 2 | 4 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 3 | 2 |
| 3 | 0 | 0 | 2 | 1 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 3 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 | 0 | 4 | 1 | 0 | 1 | 0 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | 2 | 2 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 3 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 3 | 2 | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 | 0 | 3 |
| 5 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 3 | 0 | 3 |
| 1 | 1 | 0 | 3 | 0 | 0 | 1 | 4 | 1 | 0 | 2 | 0 | 0 | 6 | 3 | 0 | 1 | 0 | 1 | 3 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 2 | 0 | 0 | 4 | 1 | 3 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 | 0 |
| 1 | 4 | 1 | 0 | 3 | 0 | 2 | 1 | 1 | 0 | 3 | 1 | 1 | 0 | 3 | 1 | 3 | 0 | 2 | 0 |
| 5 | 0 | 3 | 1 | 7 | 2 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 |
| 0 | 0 | 5 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 2 | 2 | 1 | 0 | 4 | 3 | 3 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 4 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |




- اگر این فرآیند را چندین بار تکرار شود، توزیع یا نمودار فراوانی مقادیر انرژی منجر به شکل مقابل می‌شود. **نمودار فراوانی، بسیار شبیه توزیع نمایی بولتزمن است.**
- در این مدل، درجه حرارت برابر است **عدد نهایی انرژی در بازی است.**



محمدرضا مظفری

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

# دما و فاکتور بولتزمن

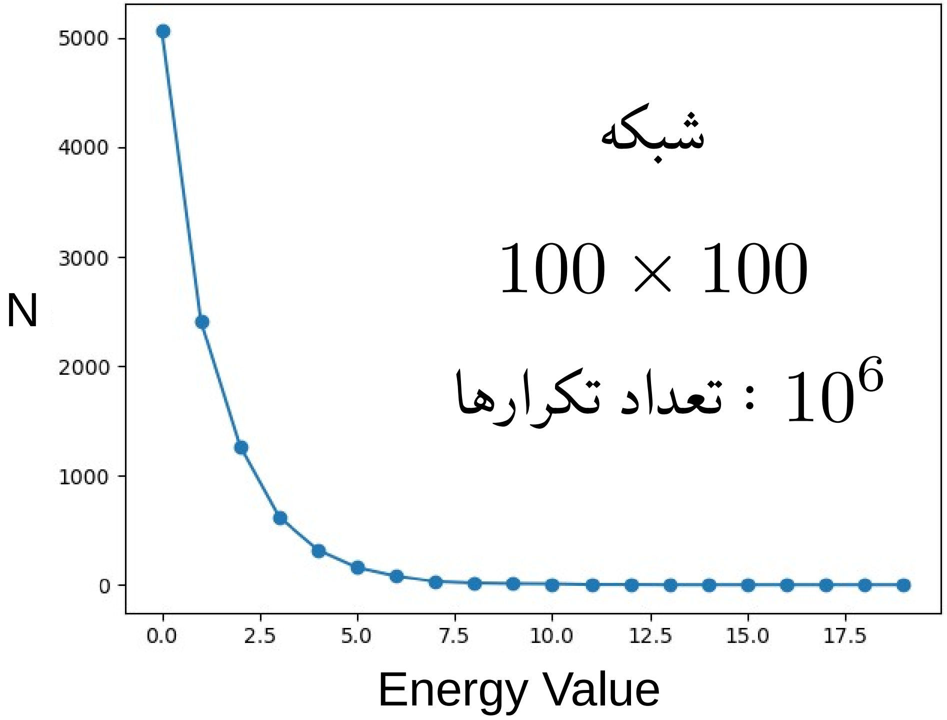
**مثال۱:** برای بررسی ماهیت آماری توزیع بولتزمن، قصد داریم یک **بازی** انجام دهیم که در آن مقدار انرژی در یک شبکه توزیع می شود.

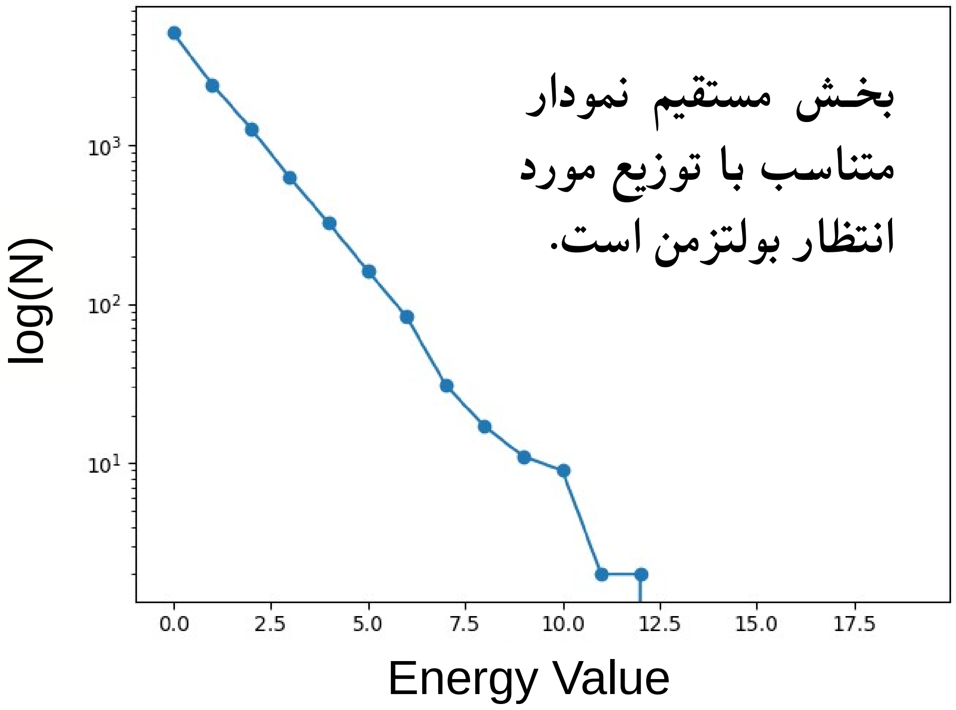
- اگر در آرایش اولیه به جای یک مقدار انرژی در هر نقطه شبکه، دو مقدار انرژی در هر نقطه شبکه داشته باشیم، پس از تکرارهای زیاد، آرایشی مانند شکل مقابل بدست می آید.
- از آنجا که آرایش اولیه انرژی بیشتری دارد، حالت نهایی توزیع بولتزمن با دمای بالاتر است.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 8 | 0 | 4 | 1 | 0 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 4 | 0 | 1 | 2 | 0 | 3 | 1 | 9 | 4 |
| 15 | 1 | 3 | 0 | 2 | 1 | 3 | 2 | 8 | 2 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 5 | 1 | 8 | 2 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 5 | 4 | 2 | 3 | 2 | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 4 | 0 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 3 | 0 | 2 | 0 | 1 | 10 | 2 | 5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 | 2 | 0 |
| 2 | 1 | 6 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 2 | 0 | 3 | 2 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| 0 | 0 | 0 | 10 | 1 | 0 | 5 | 2 | 0 | 2 | 4 | 0 | 0 | 3 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 3 |
| 0 | 1 | 4 | 2 | 2 | 0 | 0 | 4 | 5 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 3 | 1 | 1 | 3 | 1 | 0 |
| 3 | 1 | 3 | 0 | 3 | 1 | 0 | 7 | 1 | 4 | 3 | 2 | 0 | 6 | 0 | 3 | 2 | 1 | 4 | 1 |
| 0 | 0 | 7 | 0 | 2 | 2 | 0 | 0 | 9 | 0 | 2 | 7 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 5 | 1 | 1 | 5 | 1 | 0 | 4 | 9 | 1 | 1 | 1 | 0 | 5 | 1 | 3 | 2 | 2 | 4 | 2 |
| 1 | 1 | 11 | 4 | 2 | 0 | 7 | 0 | 1 | 0 | 2 | 2 | 7 | 0 | 5 | 2 | 0 | 6 | 0 | 3 |
| 5 | 0 | 5 | 3 | 0 | 0 | 0 | 7 | 0 | 1 | 1 | 8 | 0 | 0 | 3 | 9 | 1 | 7 | 3 | 0 |
| 4 | 0 | 2 | 0 | 0 | 2 | 2 | 0 | 2 | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 2 | 1 | 2 | 5 | 1 | 2 | 3 | 1 | 0 | 7 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 4 | 0 |
| 1 | 1 | 3 | 2 | 4 | 0 | 2 | 0 | 2 | 12 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 5 | 0 | 2 |
| 3 | 0 | 0 | 2 | 1 | 4 | 2 | 0 | 6 | 2 | 1 | 0 | 3 | 7 | 6 | 1 | 3 | 1 | 0 | 12 |
| 9 | 0 | 0 | 1 | 5 | 1 | 2 | 2 | 1 | 3 | 3 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 3 | 0 | 9 | 8 |
| 6 | 1 | 3 | 0 | 4 | 3 | 2 | 0 | 1 | 2 | 6 | 2 | 0 | 2 | 2 | 1 | 0 | 0 | 4 | 3 |
| 0 | 14 | 2 | 2 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 0 | 3 | 0 | 6 | 0 | 1 | 0 | 0 | 3 | 8 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 3 | 1 | 2 | 2 | 4 | 2 | 1 | 0 | 1 | 1 | 3 |

# دما و فاکتور بولتزمن

**مثال۱**: برای بررسی ماهیت آماری توزیع بولتزمن، قصد داریم یک **بازی** انجام دهیم که در آن مقدار انرژی در یک شبکه توزیع می شود.



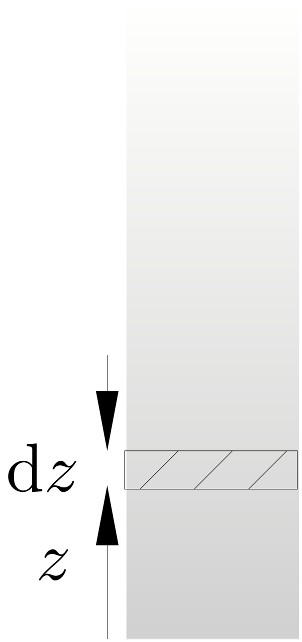



# دما و فاکتور بولتزمن

**مثال۲: اتمسفر همدما**

تخمین تعداد مولکولهای در یک اتمسفر همدما بصورت تابعی از ارتفاع

$$p = \frac{F}{A} : \qquad \mathrm{d}p = \frac{\mathrm{d}F}{A}$$




$$pV = Nk_BT$$

$$\mathrm{d}V = A\mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}N$$

$$\mathrm{d}F = -\mathrm{d}Nmg$$

$$\mathrm{d}p = \frac{\mathrm{d}F\mathrm{d}z}{\mathrm{d}V}$$

$$\mathrm{d}p = \frac{-\mathrm{d}Nmg\mathrm{d}z}{\mathrm{d}V} = -\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}V}mg\mathrm{d}z$$

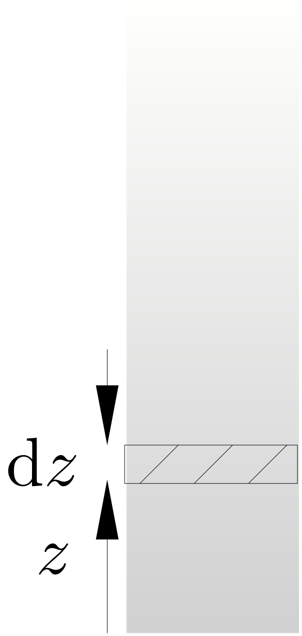
$$\mathrm{d}p = -nmg\mathrm{d}z, \qquad n = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}V}$$

# دما و فاکتور بولتزمن

**مثال۲: اتمسفر همدما**

تخمین تعداد مولکولهای در یک اتمسفر همدما بصورت تابعی از ارتفاع

$$\mathrm{d}p = -nmg\mathrm{d}z, \qquad n = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}V}$$




$$pV = Nk_BT$$

$$\mathrm{d}V = A\mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}N$$

$$\mathrm{d}F = -\mathrm{d}Nmg$$

$$pV = Nk_BT$$

$$p = nk_BT : \qquad \mathrm{d}p = \mathrm{d}n\, k_BT$$

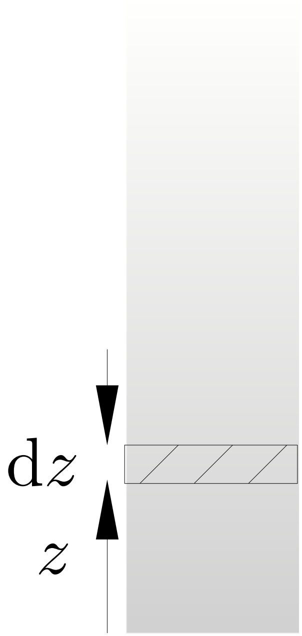
$$\begin{cases} \mathrm{d}p = -nmg\mathrm{d}z \\ \\ \mathrm{d}p = \mathrm{d}n\, k_BT \end{cases}$$

# دما و فاکتور بولتزمن

**مثال۲: اتمسفر همدما**

تخمین تعداد مولکولهای در یک اتمسفر همدما بصورت تابعی از ارتفاع

$$\begin{cases} \mathrm{d}p = -nmg\,\mathrm{d}z \\ \mathrm{d}p = \mathrm{d}n\, k_B T \end{cases}$$




$$pV = Nk_BT$$

$$\mathrm{d}V = A\mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}N$$

$$\mathrm{d}F = -\mathrm{d}Nmg$$

$$\mathrm{d}n\, k_B T = -nmg\,\mathrm{d}z$$

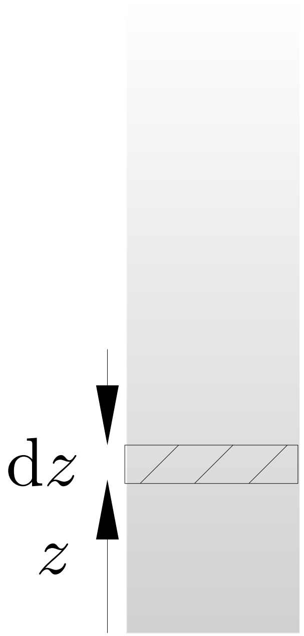
$$\frac{\mathrm{d}n}{n} = -\frac{mg}{k_BT}\mathrm{d}z$$

# دما و فاکتور بولتزمن

**مثال۲: اتمسفر همدما**

تخمین تعداد مولکولهای در یک اتمسفر همدما بصورت تابعی از ارتفاع

$$\frac{\mathrm{d}n}{n} = -\frac{mg}{k_B T}\mathrm{d}z$$




$$pV = Nk_BT$$

$$\mathrm{d}V = A\mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}N$$

$$\mathrm{d}F = -\mathrm{d}Nmg$$

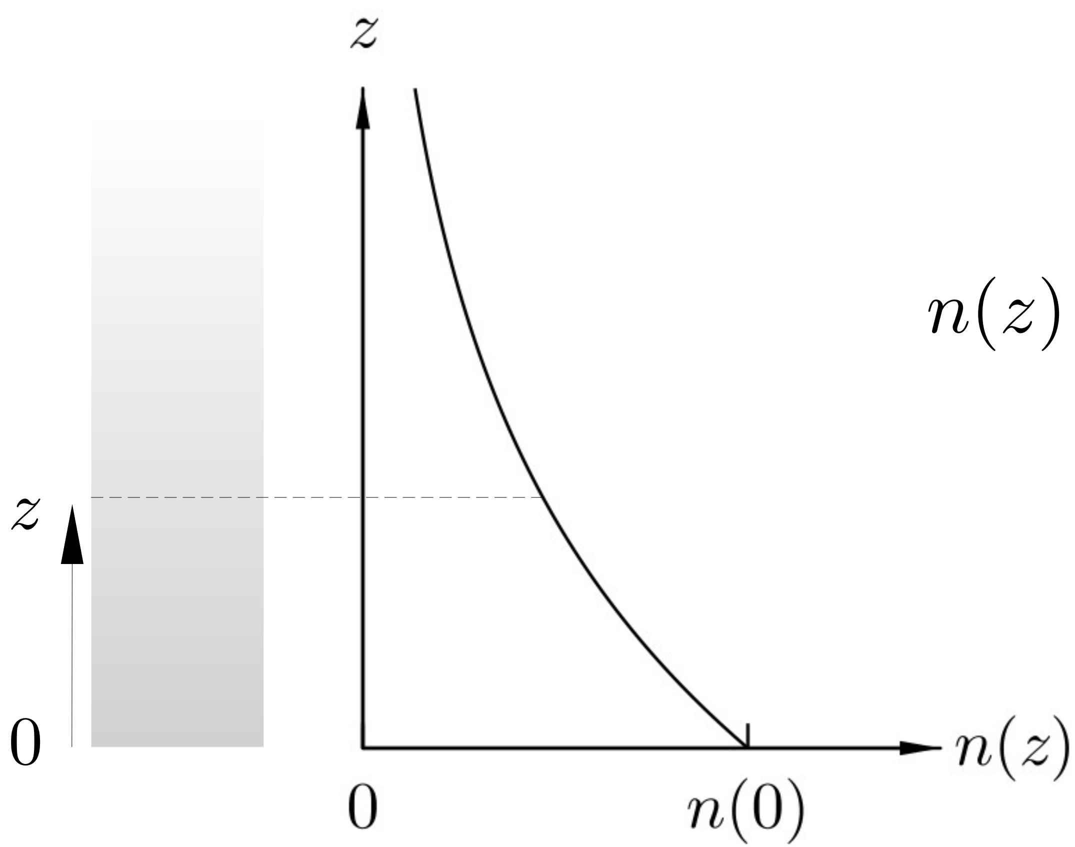
$$\int_{n_0}^{n}\frac{\mathrm{d}n}{n} = -\frac{mg}{k_BT}\int_0^z \mathrm{d}z$$

$$\ln\left(\frac{n}{n_0}\right) = -\frac{mg}{k_BT}z$$

$$n(z) = n_0 \exp(-mg/k_BT)$$

# دما و فاکتور بولتزمن

## مثال۲: اتمسفر همدما




$$n(z) = n_0 \exp(-mg/k_B T)$$

# دما و فاکتور بولتزمن

**مثال۳:** سیستم $n$ حالته

| | | |
|---|---|---|
| $\epsilon_n = n\epsilon$ | — | $\exp(-n\epsilon/k_BT)$ |
| $\vdots$ | | |
| $\epsilon_2 = 2\epsilon$ | — | $\exp(-2\epsilon/k_BT)$ |
| $\epsilon_1 = \epsilon$ | — | $\exp(-\epsilon/k_BT)$ |
| $\epsilon_0 = 0$ | — | $1$ |

$$Z = \sum_{i=0}^{n} e^{-\epsilon_i/k_BT}$$

$$Z = 1 + e^{-\epsilon/k_BT} + e^{-2\epsilon/k_BT} + \cdots + e^{-n\epsilon/k_BT}$$

اگر $\quad x = e^{-\epsilon/k_BT}, \quad x < 1$

$$Z = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$


محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

# دما و فاکتور بولتزمن

**مثال۳:** سیستم $n$ حالته

$$\begin{array}{lcl} \epsilon_n = n\epsilon & \text{———} & \exp(-n\epsilon/k_BT) \\ \vdots & & \\ \epsilon_2 = 2\epsilon & \text{———} & \exp(-2\epsilon/k_BT) \\ \epsilon_1 = \epsilon & \text{———} & \exp(-\epsilon/k_BT) \\ \epsilon_0 = 0 & \text{———} & 1 \end{array}$$

اگر $\quad x = e^{-\epsilon/k_BT}, \quad x < 1$

$$Z = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

$$\frac{1}{1-x} = \underbrace{1 + x + x^2 + \cdots + x^n}_{Z} + x^{n+1} + x^{n+2} + x^{n+3} + \cdots$$

$$\frac{1}{1-x} = Z + x^{n+1} + x^{n+2} + x^{n+3} + \cdots$$

$$\frac{1}{1-x} = Z + x^{n+1}(1 + x + x^2 + \cdots)$$

# دما و فاکتور بولتزمن

**مثال۳:** سیستم $n$ حالته

$$\begin{array}{lcl} \epsilon_n = n\epsilon & \text{———} & \exp(-n\epsilon/k_BT) \\ & \vdots & \\ \epsilon_2 = 2\epsilon & \text{———} & \exp(-2\epsilon/k_BT) \\ \epsilon_1 = \epsilon & \text{———} & \exp(-\epsilon/k_BT) \\ \epsilon_0 = 0 & \text{———} & 1 \end{array}$$

اگر $x = e^{-\epsilon/k_BT}, \quad x < 1$

$$Z = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

$$\frac{1}{1-x} = Z + x^{n+1}(1 + x + x^2 + \cdots)$$

$$\frac{1}{1-x} = Z + x^{n+1}\frac{1}{1-x}$$

$$Z = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

# دما و فاکتور بولتزمن

**مثال۳:** سیستم $n$ حالته

$$
\begin{array}{lcl}
\epsilon_n = n\epsilon & \text{———} & \exp(-n\epsilon/k_BT) \\
\vdots & & \\
\epsilon_2 = 2\epsilon & \text{———} & \exp(-2\epsilon/k_BT) \\
\epsilon_1 = \epsilon & \text{———} & \exp(-\epsilon/k_BT) \\
\epsilon_0 = 0 & \text{———} & 1
\end{array}
$$

اگر $x = e^{-\epsilon/k_BT} = e^{-\beta\epsilon}, \quad x < 1$

$$Z = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

$$E = -\frac{1}{Z}\frac{dZ}{\mathrm{d}\beta} = -\frac{1}{Z}\frac{dx}{\mathrm{d}\beta}\frac{dZ}{\mathrm{d}x} = -\frac{-\epsilon e^{-\beta\epsilon}}{Z}\frac{dZ}{\mathrm{d}x} = \frac{\epsilon x}{Z}\frac{dZ}{\mathrm{d}x}$$

$$E = \epsilon\left[-\frac{(n+1)x^{n+1}}{1 - x^{n+1}} + \frac{x}{1 - x}\right]$$

# دما و فاکتور بولتزمن

$$\begin{array}{lcl}
\epsilon_n = n\epsilon & \text{———} & \exp(-n\epsilon/k_BT) \\
 & \vdots & \\
\epsilon_2 = 2\epsilon & \text{———} & \exp(-2\epsilon/k_BT) \\
\epsilon_1 = \epsilon & \text{———} & \exp(-\epsilon/k_BT) \\
\epsilon_0 = 0 & \text{———} & 1
\end{array}$$

**مثال۳:** سیستم $n$ حالته

اگر $\quad x = e^{-\epsilon/k_BT} = e^{-\beta\epsilon}, \quad x < 1$

$$E = \epsilon\left[-\frac{(n+1)x^{n+1}}{1-x^{n+1}} + \frac{x}{1-x}\right]$$

$$E = \epsilon\left[-\frac{(n+1)e^{-(n+1)\beta\epsilon}}{1-e^{-(n+1)\beta\epsilon}} + \frac{e^{-\beta\epsilon}}{1-e^{-\beta\epsilon}}\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} E = \epsilon\frac{e^{-\beta\epsilon}}{1-e^{-\beta\epsilon}}$$

# دما و فاکتور بولتزمن

**مثال۴:** سیستم بینهایت حالته

$$\begin{array}{lcl} & \vdots & \\ \epsilon_2 = 2\epsilon & \text{———} & \exp(-2\epsilon/k_B T) \\ \epsilon_1 = \epsilon & \text{———} & \exp(-\epsilon/k_B T) \\ \epsilon_0 = 0 & \text{———} & 1 \end{array}$$

$$Z = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\epsilon_i/k_B T}$$

$$Z = 1 + e^{-\epsilon/k_B T} + e^{-2\epsilon/k_B T} + \cdots$$

اگر $x = e^{-\epsilon/k_B T} = e^{-\beta\epsilon}, \quad x < 1$

$$Z = 1 + x + x^2 + \cdots$$

# دما و فاکتور بولتزمن

$$\begin{array}{lcl} \epsilon_n = n\epsilon & \text{———} & \exp(-n\epsilon/k_BT) \\ \vdots & & \\ \epsilon_2 = 2\epsilon & \text{———} & \exp(-2\epsilon/k_BT) \\ \epsilon_1 = \epsilon & \text{———} & \exp(-\epsilon/k_BT) \\ \epsilon_0 = 0 & \text{———} & 1 \end{array}$$

**مثال۴:** سیستم بینهایت حالته

اگر $\quad x = e^{-\epsilon/k_BT} = e^{-\beta\epsilon}, \quad x < 1$

$$Z = 1 + x + x^2 + \cdots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$$

$$Z = \frac{1}{1-x}$$

$$E = -\frac{1}{Z}\frac{dZ}{\mathrm{d}\beta} = -\frac{1}{Z}\frac{dx}{\mathrm{d}\beta}\frac{dZ}{\mathrm{d}x} = -\frac{-\epsilon e^{-\beta\epsilon}}{Z}\frac{dZ}{\mathrm{d}x} = \frac{\epsilon x}{Z}\frac{dZ}{\mathrm{d}x}$$

# دما و فاکتور بولتزمن

**مثال۴:** سیستم بینهایت حالته

$$
\begin{array}{lcl}
\epsilon_n = n\epsilon & \text{———} & \exp(-n\epsilon/k_B T) \\
\vdots & & \\
\epsilon_2 = 2\epsilon & \text{———} & \exp(-2\epsilon/k_B T) \\
\epsilon_1 = \epsilon & \text{———} & \exp(-\epsilon/k_B T) \\
\epsilon_0 = 0 & \text{———} & 1
\end{array}
$$

اگر $x = e^{-\epsilon/k_B T} = e^{-\beta\epsilon}, \quad x < 1$

$$Z = \frac{1}{1-x}$$

$$E = \frac{\epsilon x}{Z}\frac{dZ}{\mathrm{d}x} = \epsilon x(1-x)\frac{1}{(1-x)^2} = \epsilon\frac{x}{1-x}$$

$$E = \epsilon\frac{e^{-\beta\epsilon}}{1-e^{-\beta\epsilon}}$$