جلسه چهاردهم

بخش اول

ترمودینامیک و مکانیک آماری

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه
دانشگاه قم
مهر ۹۹

مفاهیمی در فیزیک حرارت

مطالب و عناوین:

- مبانی آماری فیزیک حرارت
- ریاضیات مفید
- گرما
- احتمال
- دما و فاکتور بولتزمن
- توزیع ماکسول بولتزمن
- فشار
- اثر افیوژن مولکولی
- پویش آزاد متوسط و برخوردها
- انرژی و قانون اول ترمودینامیک
- فرایندهای همدما و بی‌دررو
- ماشین‌های حرارتی و قانون دوم ترمودینامیک
- آنتروپی

توزیع ماکسول بولتزمن

نظریه جنبشی گازها

- در این فصل قصد داریم نتایج توزیع بولتزمن را برای مسئله **حرکت مولکول ها در یک گاز** اعمال کنیم.
- در حال حاضر، **از هرگونه حرکت چرخشی یا ارتعاشی مولکول ها صرفنظر می‌کنیم و فقط حرکت انتقالی** را در نظر می گیریم.
- اندازه مولکولی بسیار کمتر از جداسازی بین مولکولی است ، بنابراین ما تصور می کنیم که **مولکول ها بیشتر وقت خود را صرف چرخیدن در اطراف می کنند و به ندرت به یکدیگر برخورد می‌کنند.**
- از هرگونه **نیروی بین مولکولی چشم پوشی** خواهیم کرد. **مولکول ها بدلیل برخورد می توانند انرژی را با یکدیگر مبادله کنند.**

توزیع ماکسول بولتزمن

- تابع توزیع سرعت در جهت x بصورت کسری از مولکولها که با سرعتی بین v_x و $v_x + \mathrm{d}v_x$ بصورت $g(v_x)\mathrm{d}v_x$ داده می‌شود.
- تابع توزیع سرعت متناسب با یک فاکتور بولتزمن است، یعنی e به توان انرژی مربوطه که در این حالت $\frac{1}{2}mv_x^2$، تقسیم بر k_BT.

$$g(v_x) \propto e^{-mv_x^2/2k_BT}$$

- نرمال‌سازی تابع توزیع سرعت

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(v_x)\mathrm{d}v_x = 1$$

توزیع ماکسول بولتزمن

- نرمال‌سازی تابع توزیع سرعت

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(v_x)\mathrm{d}v_x = 1 \\ g(v_x) = g_0 e^{-mv_x^2/2k_BT} \end{cases} \Longrightarrow g_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-mv_x^2/2k_BT}\mathrm{d}v_x = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-mv_x^2/2k_BT}\mathrm{d}v_x = \sqrt{\frac{2\pi k_BT}{m}}$$

$$g_0 = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_BT}} \Longrightarrow \boxed{g(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_BT}}e^{-mv_x^2/2k_BT}}$$

توزیع ماکسول بولتزمن

- مقادیر چشم داشتی

$$g(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} e^{-m v_x^2/2k_B T}$$

$$\langle v_x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v_x g(v_x) \mathrm{d}v_x = 0$$

$$\langle |v_x| \rangle = 2\int_0^{\infty} v_x g(v_x) \mathrm{d}v_x = 2\sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \int_0^{\infty} v_x e^{-m v_x^2/2k_B T} \mathrm{d}v_x = \sqrt{\frac{2k_B T}{m\pi}}$$

$$\int_0^{\infty} v_x e^{-m v_x^2/2k_B T} \, \mathrm{d}v_x = \frac{k_B T}{m}$$

توزیع ماکسول بولتزمن

- مقادیر چشم داشتی

$$g(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} e^{-mv_x^2/2k_B T}$$

$$\langle v_x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v_x g(v_x) \mathrm{d}v_x = 0 \qquad \langle |v_x| \rangle = 2\int_0^{\infty} v_x g(v_x) \mathrm{d}v_x = \sqrt{\frac{2k_B T}{m\pi}}$$

$$\langle v_x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 g(v_x) \mathrm{d}v_x = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \int_0^{\infty} v_x^2 e^{-mv_x^2/2k_B T} \mathrm{d}v_x = \frac{k_B T}{m}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 e^{-mv_x^2/2k_B T} \mathrm{d}v_x = \frac{1}{2} \frac{2k_B T}{m} \sqrt{\frac{2\pi k_B T}{m}} = \frac{k_B T}{m} \sqrt{\frac{2\pi k_B T}{m}}$$

توزیع ماکسول بولتزمن

- مقادیر چشم داشتی

$$g(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} e^{-mv_x^2/2k_BT}$$

$$\langle v_x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v_x g(v_x) \mathrm{d}v_x = 0$$

$$\langle |v_x| \rangle = 2\int_{0}^{\infty} v_x g(v_x) \mathrm{d}v_x = \sqrt{\frac{2k_BT}{m\pi}}$$

$$\langle v_x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 g(v_x) \mathrm{d}v_x = \frac{k_BT}{m}$$

توزیع ماکسول بولتزمن

- مقادیر چشم داشتی

$g(v_z) = \sqrt{\dfrac{m}{2\pi k_B T}} e^{-mv_z^2/2k_B T}$	$g(v_y) = \sqrt{\dfrac{m}{2\pi k_B T}} e^{-mv_y^2/2k_B T}$
$\langle v_z \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v_z g(v_z) \mathrm{d}v_z = 0$	$\langle v_y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v_y g(v_y) \mathrm{d}v_y = 0$
$\langle \lvert v_z \rvert \rangle = 2\int_0^{\infty} v_z g(v_z) \mathrm{d}v_z = \sqrt{\dfrac{2k_B T}{m\pi}}$	$\langle \lvert v_y \rvert \rangle = 2\int_0^{\infty} v_y g(v_y) \mathrm{d}v_y = \sqrt{\dfrac{2k_B T}{m\pi}}$
$\langle v_z^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v_z^2 g(v_z) \mathrm{d}v_z = \dfrac{k_B T}{m}$	$\langle v_y^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v_y^2 g(v_y) \mathrm{d}v_y = \dfrac{k_B T}{m}$

توزیع ماکسول بولتزمن

- **توزیع سرعتها در دوبعد:** کسری از مولکولها با سرعتی بین (v_x, v_y) و $(v_x + \mathrm{d}v_x, v_y + \mathrm{d}v_y)$ بصورت زیر داده می‌شود،

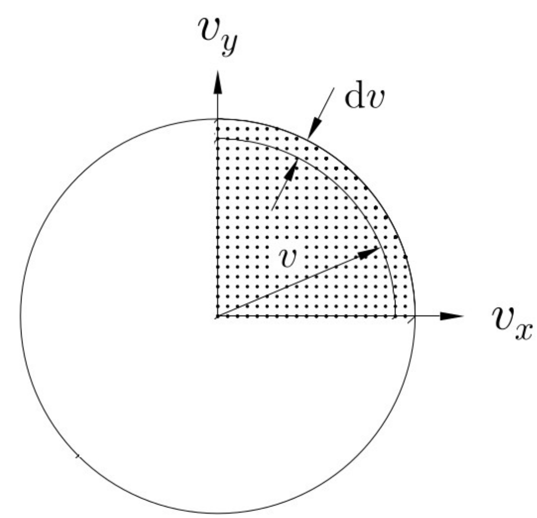
$$g(v_x)\mathrm{d}v_x g(v_y)\mathrm{d}v_y$$

$$\propto e^{-mv_x^2/2k_BT}\mathrm{d}v_x e^{-mv_y^2/2k_BT}\mathrm{d}v_y$$

$$\propto e^{-m(v_x^2+v_y^2)/2k_BT}\mathrm{d}v_x\mathrm{d}v_y$$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2$$

$$\propto e^{-mv^2/2k_BT}\mathrm{d}v_x\mathrm{d}v_y$$



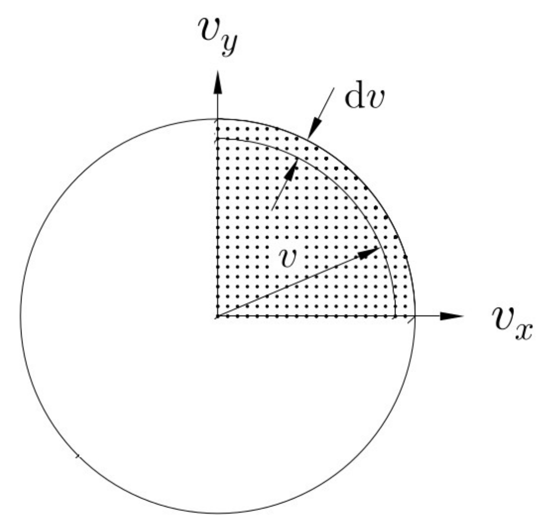
توزیع ماکسول بولتزمن

- **توزیع سرعتها در دوبعد:** کسری از مولکولها با سرعتی بین (v_x, v_y) و $(v_x + \mathrm{d}v_x, v_y + \mathrm{d}v_y)$ بصورت زیر داده می‌شود،

$$\propto e^{-mv^2/2k_BT}\mathrm{d}v_x\mathrm{d}v_y$$

$$\mathrm{d}v_x\mathrm{d}v_y\mathrm{d}v_z = \pi v\mathrm{d}v$$

$$\propto e^{-mv^2/2k_BT}\pi v\mathrm{d}v$$



تعریف: کسری از مولکولها با سرعتی بین v و $v + \mathrm{d}v$ در دوبعد بصورت زیر داده می‌شود،

$$f(v)\mathrm{d}v \propto \pi v e^{-mv^2/2k_BT}\mathrm{d}v$$

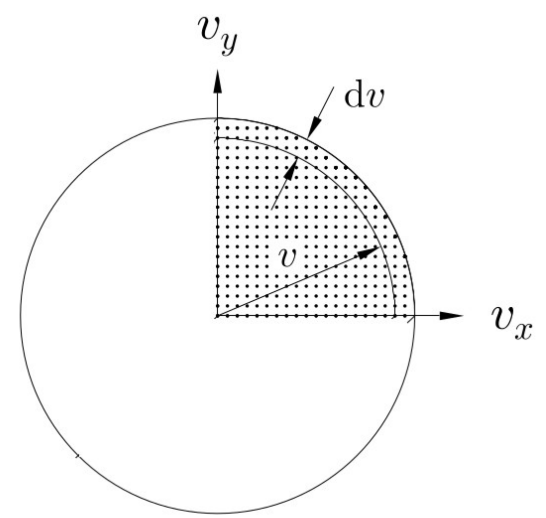
توزیع ماکسول بولتزمن

- نرمال سازی تابع توزیع سرعت

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty f(v)\mathrm{d}v = 1 \\ f(v) = f_0 \pi v e^{-mv^2/2k_BT} \end{cases} \Longrightarrow f_0\pi \int_0^\infty v e^{-mv^2/2k_BT}\mathrm{d}v = 1$$

$$f_0\pi\left(\frac{k_BT}{m}\right) = 1 \Rightarrow f_0 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{m}{k_BT}\right)$$

$$\int_0^\infty v e^{-mv^2/2k_BT}\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\frac{2k_BT}{m} = \frac{k_BT}{m}$$



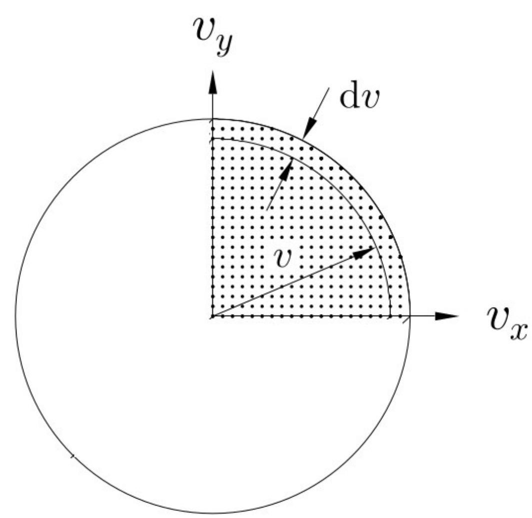
توزیع ماکسول بولتزمن

- نرمال سازی تابع توزیع سرعت

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty f(v)\mathrm{d}v = 1 \\ f(v) = f_0 \pi v e^{-mv^2/2k_BT} \end{cases} \Longrightarrow f_0\pi \int_0^\infty v e^{-mv^2/2k_BT}\mathrm{d}v = 1$$

$$f_0 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{m}{k_BT}\right)$$

$$f(v) = \left(\frac{m}{k_BT}\right) v e^{-mv^2/2k_BT}$$



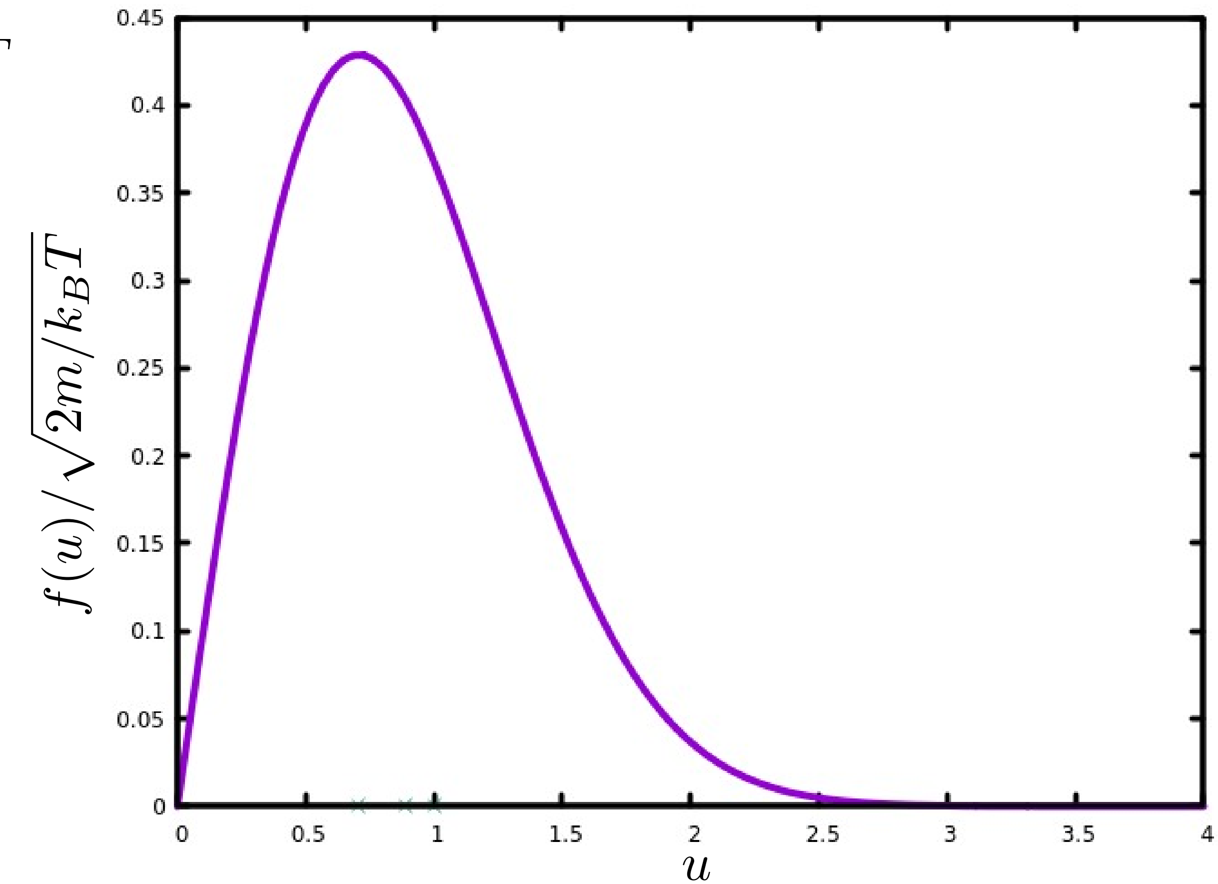
توزیع ماکسول بولتزمن

- تابع توزیع سرعت

$$f(v) = \left(\frac{m}{k_B T}\right) v e^{-mv^2/2k_B T}$$

$$u = \frac{v}{\sqrt{\frac{2k_B T}{m}}}$$

$$f(u) = \sqrt{\frac{2m}{k_B T}} u e^{-u^2}$$



توزیع ماکسول بولتزمن

- مقادیر چشمداشتی

$$f(v) = \left(\frac{m}{k_B T}\right) v e^{-mv^2/2k_B T}$$

$$\langle v \rangle = \int_0^\infty v f(v) \mathrm{d}v = \left(\frac{m}{k_B T}\right) \int_0^\infty v^2 e^{-mv^2/2k_B T} \mathrm{d}v$$

$$\int_0^\infty v^2 e^{-mv^2/2k_B T} \mathrm{d}v = \frac{1}{2} \frac{k_B T}{m} \sqrt{\frac{2\pi k_B T}{m}}$$

$$\langle v \rangle = \left(\frac{m}{k_B T}\right) \times \frac{1}{2} \frac{k_B T}{m} \sqrt{\frac{2\pi k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{\pi k_B T}{2m}}$$

توزیع ماکسول بولتزمن

- مقادیر چشمداشتی

$$f(v) = \left(\frac{m}{k_B T}\right) v e^{-mv^2/2k_B T}$$

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^\infty v^2 f(v) \mathrm{d}v = \left(\frac{m}{k_B T}\right) \int_0^\infty v^3 e^{-mv^2/2k_B T} \mathrm{d}v$$

$$\int_0^\infty v^3 e^{-mv^2/2k_B T} \mathrm{d}v = \frac{1}{2}\left(\frac{2k_B T}{m}\right)^2$$

$$\langle v^2 \rangle = \left(\frac{m}{k_B T}\right) \times \frac{1}{2}\left(\frac{2k_B T}{m}\right)^2 = \frac{2k_B T}{m}$$

توزیع ماکسول بولتزمن

2D

- مقادیر چشمداشتی

$$f(v)=\left(\frac{m}{k_BT}\right)ve^{-mv^2/2k_BT}$$

$$\boxed{\langle v\rangle=\sqrt{\frac{\pi k_BT}{2m}},\qquad \langle v^2\rangle=\frac{2k_BT}{m}}$$

$$v^2=v_x^2+v_y^2,\qquad \langle v^2\rangle=\langle v_x^2\rangle+\langle v_y^2\rangle$$

$$\langle v_x^2\rangle=\langle v_y^2\rangle=\frac{k_BT}{m}$$

$$\langle v^2\rangle=\langle v_x^2\rangle+\langle v_y^2\rangle=\frac{2k_BT}{m}$$

توزیع ماکسول بولتزمن

- مقادیر چشمداشتی

$$f(v) = \left(\frac{m}{k_B T}\right) v e^{-mv^2/2k_B T}$$

$$\boxed{\langle v \rangle = \sqrt{\frac{\pi k_B T}{2m}}, \qquad \langle v^2 \rangle = \frac{2k_B T}{m}}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2, \quad \frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle = \frac{1}{2}m\langle v_x^2 \rangle + \frac{1}{2}m\langle v_y^2 \rangle$$

$$\boxed{\langle E \rangle = \frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle = k_B T}$$

معادله حالت

توزیع ماکسول بولتزمن

- مقادیر چشمداشتی

$$f(v) = \left(\frac{m}{k_B T}\right) v e^{-mv^2/2k_B T}$$

$$\boxed{\langle v \rangle = \sqrt{\frac{\pi k_B T}{2m}}, \qquad \langle v^2 \rangle = \frac{2k_B T}{m}}$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}v}\Big|_{v=v_{\max}} = 0 : \qquad \left(\frac{m}{k_B T}\right)\left[1 - \frac{mv^2}{k_B T}\right] e^{-mv^2/2k_B T}\Big|_{v=v_{\max}} = 0$$

$$\boxed{v_{\max} = \sqrt{\frac{k_B T}{m}}}$$

توزیع ماکسول بولتزمن

2D

- مقادیر چشمداشتی

$$f(v) = \left(\frac{m}{k_B T}\right) v e^{-mv^2/2k_B T}$$

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{\pi k_B T}{2m}}, \qquad \langle v^2 \rangle = \frac{2k_B T}{m}, \qquad v_{\max} = \sqrt{\frac{k_B T}{m}}$$

root mean square: $v_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} \Rightarrow \boxed{v_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}}$

$$\boxed{v_{\max} < \langle v \rangle < v_{\mathrm{rms}}}$$

توزیع ماکسول بولتزمن

- تابع توزیع سرعت

$$f(u) = \sqrt{\frac{2m}{k_B T}}\, u e^{-u^2}$$

$$u_{\max} = \frac{v_{\max}}{\sqrt{\frac{2k_B T}{m}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\langle u \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\sqrt{\frac{2k_B T}{m}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$u_{\mathrm{rms}} = \frac{v_{\mathrm{rms}}}{\sqrt{\frac{2k_B T}{m}}} = 1$$