جلسه شانزدهم

ترمودینامیک و مکانیک آماری

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه
دانشگاه قم
مهر ۹۹

مفاهیمی در فیزیک حرارت

مطالب و عناوین:

- مبانی آماری فیزیک حرارت
- ریاضیات مفید
- گرما
- احتمال
- دما و فاکتور بولتزمن
- توزیع ماکسول بولتزمن
- فشار
- اثر افیوژن مولکولی
- پویش آزاد متوسط و برخوردها
- انرژی و قانون اول ترمودینامیک
- فرایندهای همدما و بی‌دررو
- ماشین‌های حرارتی و قانون دوم ترمودینامیک
- آنتروپی

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

فشار

مثال۱:

تعدادی از مولکولها بر واحد حجم که با سرعت v و $v+\mathrm{d}v$ در یک جهت مشخص از زاویه فضایی $\mathrm{d}\Omega$ بین زوایای θ و $\theta+\mathrm{d}\theta$ حرکت می‌کنند و در لحظه کوچک $\mathrm{d}t$ به یک دیوار به مساحت A ضربه می زنند برابر است با

$$Av\mathrm{d}t\cos\theta n f(v)\mathrm{d}v\frac{1}{2}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

حالا اگر توزیع بالا را بر واحد سطح و واحد زمان تقسیم کنیم تا مستقل از سطح و بازه زمانی شود، داریم

$$\frac{Av\mathrm{d}t\cos\theta n f(v)\mathrm{d}v\frac{1}{2}\sin\theta\mathrm{d}\theta}{A\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}nvf(v)\mathrm{d}v\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

فشار

مثال۱:

بدین ترتیب تعدادی از مولکولها بر واحد حجم که با سرعت v و $v+\mathrm{d}v$ در یک جهت مشخص از زاویه فضایی $\mathrm{d}\Omega$ بین زوایای θ و $\theta+\mathrm{d}\theta$ حرکت می‌کنند و به دیواری **بر واحد سطح** و **بر واحد زمان** ضربه می زنند برابر است با

$$\frac{1}{2}nvf(v)\mathrm{d}v\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

نشان دهید

$$\langle\cos\theta\rangle = 2/3$$

$$\langle\cos\theta\rangle = \frac{\frac{1}{2}n\left(\int_0^\infty vf(v)\mathrm{d}v\right)\left(\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\right)}{\frac{1}{2}n\left(\int_0^\infty vf(v)\mathrm{d}v\right)\left(\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\right)}$$

فشار

مثال۱:

نشان دهید

$$\langle \cos\theta \rangle = 2/3$$

$$\langle \cos\theta \rangle = \frac{\cancel{\frac{1}{2}n}\,\cancel{\left(\int_0^\infty v f(v)\mathrm{d}v\right)}\left(\int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos^2\theta \mathrm{d}\theta\right)}{\cancel{\frac{1}{2}n}\,\cancel{\left(\int_0^\infty v f(v)\mathrm{d}v\right)}\left(\int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta \mathrm{d}\theta\right)}$$

$$\langle \cos\theta \rangle = \frac{\int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos^2\theta \mathrm{d}\theta}{\int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta \mathrm{d}\theta} = \frac{\left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\pi/2}}{\left[-\frac{1}{2}\cos^2\theta\right]_0^{\pi/2}} = \frac{2}{3}$$

فشار

مثال۱:

بررسی کنید

$$\langle E\rangle = \langle \frac{1}{2}mv^2\rangle = ?$$

مولکولهایی که در حجم حرکت می‌کنند

$$\langle E\rangle = \langle \frac{1}{2}mv^2\rangle = \frac{1}{2}m\frac{\int_0^\infty v^2 f(v)\mathrm{d}v}{\int_0^\infty f(v)\mathrm{d}v}$$

مولکولهایی که به دیواره ضربه می‌زنند

$$\langle E\rangle = \langle \frac{1}{2}mv^2\rangle = \frac{1}{2}m\frac{\cancel{\tfrac{1}{2}}n\left(\int_0^\infty v^2 v f(v)\mathrm{d}v\right)\cancel{\left(\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\right)}}{\cancel{\tfrac{1}{2}}n\left(\int_0^\infty v f(v)\mathrm{d}v\right)\cancel{\left(\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\right)}}$$

فشار

مثال۱:

بررسی کنید

$$\langle E\rangle = \langle\frac{1}{2}mv^2\rangle = ?$$

مولکولهایی که در حجم حرکت می‌کنند

$$\langle E\rangle = \langle\frac{1}{2}mv^2\rangle = \frac{1}{2}m\frac{\int_0^\infty v^2 f(v)\mathrm{d}v}{\int_0^\infty f(v)\mathrm{d}v}$$

مولکولهایی که به دیواره ضربه می‌زنند

$$\langle E\rangle = \langle\frac{1}{2}mv^2\rangle = \frac{1}{2}m\frac{\int_0^\infty v^2 v f(v)\mathrm{d}v}{\int_0^\infty v f(v)\mathrm{d}v}$$

فشار

مثال۱:

بررسی کنید

$$\langle E\rangle = \langle \frac{1}{2}mv^2\rangle = ?$$

مولکولهایی که در حجم حرکت می‌کنند

$$\langle E\rangle = \langle \frac{1}{2}mv^2\rangle = \frac{1}{2}m\frac{\int_0^\infty v^2 f(v)\mathrm{d}v}{\int_0^\infty f(v)\mathrm{d}v}$$

$$f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2k_BT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2k_BT}$$

$$\langle E\rangle = \langle \frac{1}{2}mv^2\rangle = \frac{1}{2}m\frac{\int_0^\infty v^2 v^2 e^{-mv^2/2k_BT}\mathrm{d}v}{\int_0^\infty v^2 e^{-mv^2/2k_BT}\mathrm{d}v}$$

فشار

مثال۱:

بررسی کنید

$$\langle E\rangle = \langle \frac{1}{2}mv^2\rangle =?$$

مولکولهایی که در حجم حرکت می‌کنند

$$\langle E\rangle = \langle \frac{1}{2}mv^2\rangle = \frac{1}{2}m\frac{\int_0^\infty v^2 f(v)\mathrm{d}v}{\int_0^\infty f(v)\mathrm{d}v}$$

$$\int_0^\infty x^2 e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}, \quad \int_0^\infty x^4 e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}$$

$$\langle E\rangle = \langle \frac{1}{2}mv^2\rangle = \frac{1}{2}m\langle v^2\rangle = \frac{1}{2}m\frac{\int_0^\infty v^2 f(v)\mathrm{d}v}{\int_0^\infty f(v)\mathrm{d}v} = \frac{1}{2}m\frac{3k_BT}{m} = \frac{3}{2}k_BT$$

فشار

مثال۱:

بررسی کنید

$$\langle E\rangle = \langle \frac{1}{2}mv^2\rangle = ?$$

مولکولهایی که به دیواره ضربه می‌زنند

$$\langle E\rangle = \langle \frac{1}{2}mv^2\rangle = \frac{1}{2}m\frac{\int_0^\infty v^2 v f(v)\mathrm{d}v}{\int_0^\infty v f(v)\mathrm{d}v}$$

$$f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2k_BT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2k_BT}$$

$$\langle E\rangle = \langle \frac{1}{2}mv^2\rangle = \frac{1}{2}m\frac{\int_0^\infty v^2 v v^2 e^{-mv^2/2k_BT}\mathrm{d}v}{\int_0^\infty v v^2 e^{-mv^2/2k_BT}\mathrm{d}v}$$

فشار

مثال۱:

بررسی کنید

$$\langle E\rangle = \langle \frac{1}{2}mv^2\rangle = ?$$

مولکولهایی که به دیواره ضربه می‌زنند

$$\langle E\rangle = \langle \frac{1}{2}mv^2\rangle = \frac{1}{2}m\frac{\int_0^\infty v^2 v v^2 e^{-mv^2/2k_BT}\mathrm{d}v}{\int_0^\infty v v^2 e^{-mv^2/2k_BT}\mathrm{d}v}$$

$$\int_0^\infty x^2 e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\alpha^2}, \quad \int_0^\infty x^5 e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha^3}$$

$$\langle E\rangle = \langle \frac{1}{2}mv^2\rangle = \frac{1}{2}m\langle v^2\rangle = \frac{1}{2}m\frac{\int_0^\infty v^5 e^{-mv^2/2k_BT}\mathrm{d}v}{\int_0^\infty v^3 e^{-mv^2/2k_BT}\mathrm{d}v} = \frac{1}{2}m\frac{4k_BT}{m} = 2k_BT$$

فشار

مثال۱:

بررسی کنید

$$\langle E\rangle = \langle\frac{1}{2}mv^2\rangle = ?$$

مولکولهایی که در حجم حرکت می‌کنند

$$\langle E\rangle = \langle\frac{1}{2}mv^2\rangle = \frac{3}{2}k_BT$$

مولکولهایی که به دیواره ضربه می‌زنند

$$\langle E\rangle = \langle\frac{1}{2}mv^2\rangle = 2k_BT$$

مثال۲:

تعدادی از مولکولها بر واحد حجم که با سرعت v و $v+\mathrm{d}v$ در یک جهت مشخص از زاویه فضایی $\mathrm{d}\Omega$ بین زوایای θ و $\theta+\mathrm{d}\theta$ حرکت می‌کنند برابر است با

$$nf(v)\mathrm{d}v\frac{1}{2}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

اگر

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

نشان دهید

$$\langle v_x\rangle = \langle v_y\rangle = \langle v_z\rangle = 0$$

$$\langle v_x^2\rangle = \langle v_y^2\rangle = \langle v_z^2\rangle = \frac{1}{3}\langle v^2\rangle$$

مثال۲:

تعدادی از مولکولها بر واحد حجم که با سرعت v و $v + \mathrm{d}v$ در یک جهت مشخص از زاویه فضایی $\mathrm{d}\Omega$ بین زوایای θ و $\theta + \mathrm{d}\theta$ حرکت می‌کنند برابر است با

$$nf(v)\mathrm{d}v\frac{1}{2}\sin\theta\mathrm{d}\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\begin{cases} v_x = v\sin\theta\cos\phi \\ v_x = v\sin\theta\sin\phi \\ v_z = v\cos\theta \end{cases}$$

$$nf(v)\mathrm{d}v\frac{1}{2}\sin\theta\mathrm{d}\theta \longrightarrow nf(v)\mathrm{d}v\frac{1}{4\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

مثال۲:

تعدادی از مولکولها بر واحد حجم که با سرعت v و $v+\mathrm{d}v$ در یک جهت مشخص از زاویه فضایی $\mathrm{d}\Omega$ بین زوایای θ و $\theta+\mathrm{d}\theta$ حرکت می‌کنند برابر است با

$$nf(v)\mathrm{d}v\frac{1}{4\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi,\quad 0\leq\theta\leq\pi,\quad 0\leq\phi\leq 2\pi$$

$$\langle v_x\rangle=\frac{\frac{1}{4\pi}n\left(\int_0^\infty vf(v)\mathrm{d}v\right)\left(\int_0^\pi\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^{2\pi}\cos\phi\mathrm{d}\phi\right)}{\frac{1}{4\pi}n\left(\int_0^\infty f(v)\mathrm{d}v\right)\left(\int_0^\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\right)}$$

$$\int_0^{2\pi}\cos\phi\mathrm{d}\phi=0\Rightarrow\langle v_x\rangle=0$$

فشار

مثال۲:

تعدادی از مولکولها بر واحد حجم که با سرعت v و $v+\mathrm{d}v$ در یک جهت مشخص از زاویه فضایی $\mathrm{d}\Omega$ بین زوایای θ و $\theta+\mathrm{d}\theta$ حرکت می‌کنند برابر است با

$$nf(v)\mathrm{d}v\frac{1}{4\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi,\quad 0\leq\theta\leq\pi,\quad 0\leq\phi\leq 2\pi$$

$$\langle v_y\rangle=\frac{\frac{1}{4\pi}n\left(\int_0^\infty vf(v)\mathrm{d}v\right)\left(\int_0^\pi\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^{2\pi}\sin\phi\mathrm{d}\phi\right)}{\frac{1}{4\pi}n\left(\int_0^\infty f(v)\mathrm{d}v\right)\left(\int_0^\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\right)}$$

$$\int_0^{2\pi}\sin\phi\mathrm{d}\phi=0\Rightarrow\langle v_y\rangle=0$$

فشار

مثال۲:

تعدادی از مولکولها بر واحد حجم که با سرعت v و $v + \mathrm{d}v$ در یک جهت مشخص از زاویه فضایی $\mathrm{d}\Omega$ بین زوایای θ و $\theta + \mathrm{d}\theta$ حرکت می‌کنند برابر است با

$$nf(v)\mathrm{d}v\frac{1}{4\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

$$\langle v_z \rangle = \frac{\frac{1}{4\pi}n\left(\int_0^\infty vf(v)\mathrm{d}v\right)\left(\int_0^\pi \cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\right)}{\frac{1}{4\pi}n\left(\int_0^\infty f(v)\mathrm{d}v\right)\left(\int_0^\pi \sin\theta\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\right)}$$

$$\int_0^\pi \cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta = 0 \Rightarrow \langle v_z \rangle = 0$$

فشار

مثال۲:

تعدادی از مولکولها بر واحد حجم که با سرعت v و $v+\mathrm{d}v$ در یک جهت مشخص از زاویه فضایی $\mathrm{d}\Omega$ بین زوایای θ و $\theta+\mathrm{d}\theta$ حرکت می‌کنند برابر است با

$$nf(v)\mathrm{d}v\frac{1}{4\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi,\quad 0\leq\theta\leq\pi,\quad 0\leq\phi\leq 2\pi$$

$$\langle v_x^2\rangle=\frac{\frac{1}{4\pi}n\left(\int_0^\infty v^2f(v)\mathrm{d}v\right)\left(\int_0^\pi\sin^3\theta\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^{2\pi}\cos^2\phi\mathrm{d}\phi\right)}{\frac{1}{4\pi}n\left(\int_0^\infty f(v)\mathrm{d}v\right)\left(\int_0^\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\right)}$$

$$\int_0^\pi\sin^3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{4}{3},\quad\int_0^\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta=2,\quad\int_0^{2\pi}\cos^2\phi\mathrm{d}\phi=\pi,\quad\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi=2\pi$$

فشار

مثال۲:

تعدادی از مولکولها بر واحد حجم که با سرعت v و $v+\mathrm{d}v$ در یک جهت مشخص از زاویه فضایی $\mathrm{d}\Omega$ بین زوایای θ و $\theta+\mathrm{d}\theta$ حرکت می‌کنند برابر است با

$$nf(v)\mathrm{d}v\frac{1}{4\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi,\quad 0\le\theta\le\pi,\quad 0\le\phi\le 2\pi$$

$$\langle v_x^2\rangle=\frac{1}{3}\frac{\left(\int_0^\infty v^2 f(v)\mathrm{d}v\right)}{\left(\int_0^\infty f(v)\mathrm{d}v\right)}=\frac{1}{3}\frac{\int_0^\infty v^2v^2e^{-mv^2/2k_BT}\mathrm{d}v}{\int_0^\infty v^2e^{-mv^2/2k_BT}\mathrm{d}v}$$

$$\int_0^\infty x^2e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\alpha^2},\quad \int_0^\infty x^5e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha^3}$$

فشار

مثال۲:

تعدادی از مولکولها بر واحد حجم که با سرعت v و $v+\mathrm{d}v$ در یک جهت مشخص از زاویه فضایی $\mathrm{d}\Omega$ بین زوایای θ و $\theta+\mathrm{d}\theta$ حرکت می‌کنند برابر است با

$$nf(v)\mathrm{d}v\frac{1}{4\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi,\quad 0\leq\theta\leq\pi,\quad 0\leq\phi\leq 2\pi$$

$$\int_0^\infty x^2e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\alpha^2},\quad \int_0^\infty x^5e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha^3}$$

$$\langle v_x^2\rangle=\frac{1}{3}\frac{\int_0^\infty v^2v^2e^{-mv^2/2k_BT}\mathrm{d}v}{\int_0^\infty v^2e^{-mv^2/2k_BT}\mathrm{d}v}=\frac{k_BT}{m}$$

فشار

مثال۲:

تعدادی از مولکولها بر واحد حجم که با سرعت v و $v+\mathrm{d}v$ در یک جهت مشخص از زاویه فضایی $\mathrm{d}\Omega$ بین زوایای θ و $\theta+\mathrm{d}\theta$ حرکت می‌کنند برابر است با

$$nf(v)\mathrm{d}v\frac{1}{4\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi, \quad 0\leq\theta\leq\pi, \quad 0\leq\phi\leq 2\pi$$

$$\langle v_y^2\rangle = \frac{\frac{1}{4\pi}n\left(\int_0^\infty v^2 f(v)\mathrm{d}v\right)\left(\int_0^\pi \sin^3\theta\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^{2\pi}\sin^2\phi\mathrm{d}\phi\right)}{\frac{1}{4\pi}n\left(\int_0^\infty f(v)\mathrm{d}v\right)\left(\int_0^\pi \sin\theta\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\right)}$$

$$\int_0^\pi \sin^3\theta\mathrm{d}\theta = \frac{4}{3}, \quad \int_0^\pi \sin\theta\mathrm{d}\theta = 2, \quad \int_0^{2\pi}\sin^2\phi\mathrm{d}\phi = \pi, \quad \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi = 2\pi$$

مثال۲:

تعدادی از مولکولها بر واحد حجم که با سرعت v و $v+\mathrm{d}v$ در یک جهت مشخص از زاویه فضایی $\mathrm{d}\Omega$ بین زوایای θ و $\theta+\mathrm{d}\theta$ حرکت می‌کنند برابر است با

$$nf(v)\mathrm{d}v\frac{1}{4\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi,\quad 0\le\theta\le\pi,\quad 0\le\phi\le 2\pi$$

$$\langle v_y^2\rangle=\frac{1}{3}\frac{\left(\int_0^\infty v^2 f(v)\mathrm{d}v\right)}{\left(\int_0^\infty f(v)\mathrm{d}v\right)}=\frac{1}{3}\frac{\int_0^\infty v^2v^2e^{-mv^2/2k_BT}\mathrm{d}v}{\int_0^\infty v^2e^{-mv^2/2k_BT}\mathrm{d}v}$$

$$\int_0^\infty x^2e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\alpha^2},\quad \int_0^\infty x^5e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha^3}$$

فشار

مثال۲:

تعدادی از مولکولها بر واحد حجم که با سرعت v و $v+\mathrm{d}v$ در یک جهت مشخص از زاویه فضایی $\mathrm{d}\Omega$ بین زوایای θ و $\theta+\mathrm{d}\theta$ حرکت می‌کنند برابر است با

$$nf(v)\mathrm{d}v\frac{1}{4\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi, \quad 0\leq\theta\leq\pi, \quad 0\leq\phi\leq 2\pi$$

$$\int_0^\infty x^2 e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}, \quad \int_0^\infty x^4 e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}$$

$$\langle v_y^2\rangle = \frac{1}{3}\frac{\int_0^\infty v^2 v^2 e^{-mv^2/2k_BT}\mathrm{d}v}{\int_0^\infty v^2 e^{-mv^2/2k_BT}\mathrm{d}v} = \frac{k_BT}{m}$$

فشار

مثال۲:

تعدادی از مولکولها بر واحد حجم که با سرعت v و $v+\mathrm{d}v$ در یک جهت مشخص از زاویه فضایی $\mathrm{d}\Omega$ بین زوایای θ و $\theta+\mathrm{d}\theta$ حرکت می‌کنند برابر است با

$$nf(v)\mathrm{d}v\frac{1}{4\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi,\quad 0\leq\theta\leq\pi,\quad 0\leq\phi\leq 2\pi$$

$$\langle v_z^2\rangle=\frac{\frac{1}{4\pi}n\left(\int_0^\infty v^2 f(v)\mathrm{d}v\right)\left(\int_0^\pi\cos^2\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\right)}{\frac{1}{4\pi}n\left(\int_0^\infty f(v)\mathrm{d}v\right)\left(\int_0^\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\right)}$$

$$\int_0^\pi\cos^2\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{2}{3},\quad\int_0^\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta=2,\quad\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi=2\pi$$

فشار

مثال۲:

تعدادی از مولکولها بر واحد حجم که با سرعت v و $v+\mathrm{d}v$ در یک جهت مشخص از زاویه فضایی $\mathrm{d}\Omega$ بین زوایای θ و $\theta+\mathrm{d}\theta$ حرکت می‌کنند برابر است با

$$nf(v)\mathrm{d}v\frac{1}{4\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi, \quad 0\le\theta\le\pi, \quad 0\le\phi\le 2\pi$$

$$\langle v_z^2\rangle = \frac{1}{3}\frac{\left(\int_0^\infty v^2 f(v)\mathrm{d}v\right)}{\left(\int_0^\infty f(v)\mathrm{d}v\right)} = \frac{1}{3}\frac{\int_0^\infty v^2 v^2 e^{-mv^2/2k_BT}\mathrm{d}v}{\int_0^\infty v^2 e^{-mv^2/2k_BT}\mathrm{d}v}$$

$$\int_0^\infty x^2 e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}, \qquad \int_0^\infty x^4 e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}$$

فشار

مثال۲:

تعدادی از مولکولها بر واحد حجم که با سرعت v و $v+\mathrm{d}v$ در یک جهت مشخص از زاویه فضایی $\mathrm{d}\Omega$ بین زوایای θ و $\theta+\mathrm{d}\theta$ حرکت می‌کنند برابر است با

$$nf(v)\mathrm{d}v\frac{1}{4\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi, \quad 0\leq\theta\leq\pi, \quad 0\leq\phi\leq 2\pi$$

$$\int_0^\infty x^2e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}, \quad \int_0^\infty x^4e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x=\frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}$$

$$\langle v_z^2\rangle=\frac{1}{3}\frac{\int_0^\infty v^2v^2e^{-mv^2/2k_BT}\mathrm{d}v}{\int_0^\infty v^2e^{-mv^2/2k_BT}\mathrm{d}v}=\frac{k_BT}{m}$$

فشار

مثال۲:

تعدادی از مولکولها بر واحد حجم که با سرعت v و $v+\mathrm{d}v$ در یک جهت مشخص از زاویه فضایی $\mathrm{d}\Omega$ بین زوایای θ و $\theta+\mathrm{d}\theta$ حرکت می‌کنند برابر است با

$$nf(v)\mathrm{d}v\frac{1}{4\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi,\quad 0\leq\theta\leq\pi,\quad 0\leq\phi\leq 2\pi$$

$$\langle v^2\rangle=\frac{\frac{1}{4\pi}n\left(\int_0^\infty v^2f(v)\mathrm{d}v\right)\left(\int_0^\pi sin\theta\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\right)}{\frac{1}{4\pi}n\left(\int_0^\infty f(v)\mathrm{d}v\right)\left(\int_0^\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\right)}$$

$$\langle v^2\rangle=\frac{\left(\int_0^\infty v^2f(v)\mathrm{d}v\right)}{\left(\int_0^\infty f(v)\mathrm{d}v\right)}$$

فشار

مثال۲:

تعدادی از مولکولها بر واحد حجم که با سرعت v و $v+\mathrm{d}v$ در یک جهت مشخص از زاویه فضایی $\mathrm{d}\Omega$ بین زوایای θ و $\theta+\mathrm{d}\theta$ حرکت می‌کنند برابر است با

$$nf(v)\mathrm{d}v\frac{1}{4\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi,\quad 0\le\theta\le\pi,\quad 0\le\phi\le 2\pi$$

$$\langle v^2\rangle=\frac{\left(\int_0^\infty v^2 f(v)\mathrm{d}v\right)}{\left(\int_0^\infty f(v)\mathrm{d}v\right)}=\frac{\int_0^\infty v^2v^2e^{-mv^2/2k_BT}\mathrm{d}v}{\int_0^\infty v^2e^{-mv^2/2k_BT}\mathrm{d}v}$$

$$\int_0^\infty x^2e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}},\qquad \int_0^\infty x^4e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x=\frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}$$

فشار

مثال۲:

تعدادی از مولکولها بر واحد حجم که با سرعت v و $v+\mathrm{d}v$ در یک جهت مشخص از زاویه فضایی $\mathrm{d}\Omega$ بین زوایای θ و $\theta+\mathrm{d}\theta$ حرکت می‌کنند برابر است با

$$nf(v)\mathrm{d}v\frac{1}{4\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi,\quad 0\le\theta\le\pi,\quad 0\le\phi\le 2\pi$$

$$\int_0^\infty x^2e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}},\qquad \int_0^\infty x^4e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x=\frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}$$

$$\langle v^2\rangle=\frac{\int_0^\infty v^2v^2e^{-mv^2/2k_BT}\mathrm{d}v}{\int_0^\infty v^2e^{-mv^2/2k_BT}\mathrm{d}v}=\frac{3k_BT}{m}$$

فشار

مثال۲:

تعدادی از مولکولها بر واحد حجم که با سرعت v و $v+\mathrm{d}v$ در یک جهت مشخص از زاویه فضایی $\mathrm{d}\Omega$ بین زوایای θ و $\theta+\mathrm{d}\theta$ حرکت می‌کنند برابر است با

$$nf(v)\mathrm{d}v\frac{1}{4\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi, \quad 0\leq\theta\leq\pi, \quad 0\leq\phi\leq 2\pi$$

$$\begin{cases} \langle v_x^2\rangle=\langle v_y^2\rangle=\langle v_z^2\rangle=\dfrac{k_BT}{3} \\ \langle v^2\rangle=\dfrac{3k_BT}{m} \end{cases} \Longrightarrow \langle v_x^2\rangle=\langle v_y^2\rangle=\langle v_z^2\rangle=\frac{1}{3}\langle v^2\rangle$$

فشار

2D

مثال۳:

در فصل قبل تابع توزیع سرعت ماکسول-بولتزمن $f(v)$ را بدست آوردیم.

$$\text{2D: } f(v) = \left(\frac{m}{k_B T}\right) v e^{-mv^2/2k_B T}$$

$$n = \frac{N}{A}$$

تعدادی از مولکولها بر واحد سطح که با سرعت v و $v + \mathrm{d}v$ حرکت می‌کنند، برابر است با

$$n f(v) \mathrm{d}v$$

فشار

مثال۳:

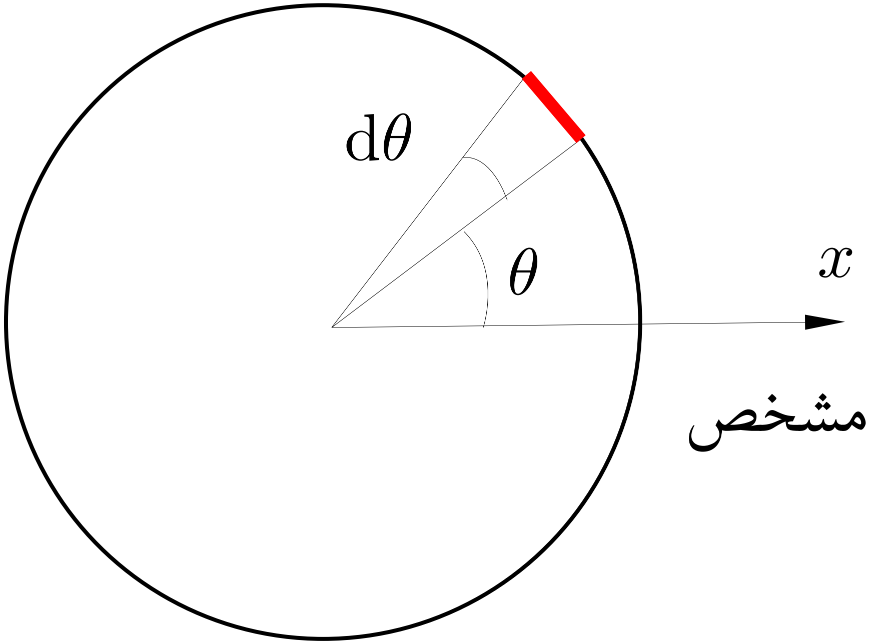
تعدادی از مولکولها بر واحد سطح که با سرعت v و $v+\mathrm{d}v$ در یک جهت مشخص بین زوایای θ و $\theta+\mathrm{d}\theta$ حرکت می‌کنند، برابر است با

$$n f(v)\mathrm{d}v \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}$$

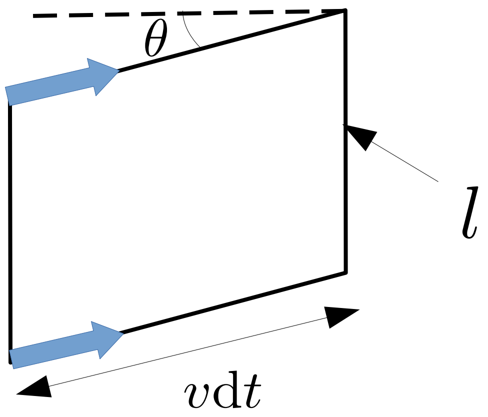
$$\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}$$

احتمال عبور ذرات از زوایای θ و $\theta+\mathrm{d}\theta$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} = 1$$



فشار



مثال۳:

در یک زمان کوتاه $\mathrm{d}t$ ، مولکول هایی که در زاویه θ نسبت به عمود به دیواره در حال حرکت اند، سطح

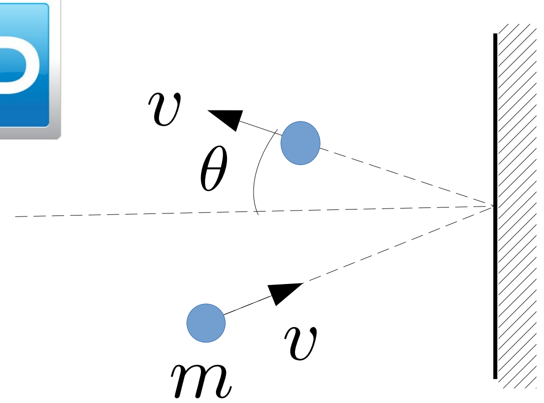
$$lv\mathrm{d}t\cos\theta$$

را جاروب می‌کنند

تعدادی از مولکولها بر واحد سطح که با سرعت v و $v+\mathrm{d}v$ در یک جهت مشخص بین زوایای θ و $\theta+\mathrm{d}\theta$ حرکت می‌کنند و در لحظه کوچک $\mathrm{d}t$ به یک دیوار به ابعاد l ضربه می زنند برابر

$$lv\mathrm{d}t\cos\theta\, nf(v)\mathrm{d}v\,\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\theta$$

فشار



مثال۳:

هر مولکول از ضربه‌ی وارد به دیوار تغییر اندازه حرکتی برابر

$$2mv\cos\theta$$

در راستای عمود به دیواره مخزن پیدا می‌کند.

حالا اگر تغییر اندازه حرکت $2mv\cos\theta$ بر واحد طول بر واحد زمان را بصورت ریاضی ضرب کنیم در تعدادی از مولکولها بر واحد سطح که با سرعت v و $v+\mathrm{d}v$ در یک جهت مشخص بین زوایای θ و $\theta+\mathrm{d}\theta$ حرکت می‌کنند و در لحظه کوچک $\mathrm{d}t$ به یک دیوار به ابعاد l ضربه می زنند و سپس انتگرالگیری کنیم روی θ و v فشار را بدست می‌آوریم

فشار

مثال۳:

حالا اگر تغییر اندازه حرکت $2mv\cos\theta$ بر واحد طول بر واحد زمان را بصورت ریاضی ضرب کنیم در تعدادی از مولکولها بر واحد سطح که با سرعت v و $v+\mathrm{d}v$ در یک جهت مشخص بین زوایای θ و $\theta+\mathrm{d}\theta$ حرکت می‌کنند و در لحظه کوچک $\mathrm{d}t$ به یک دیوار به ابعاد l ضربه می زنند و سپس انتگرالگیری کنیم روی θ و v فشار را بدست می‌آوریم

$$\mathrm{d}p_l = \frac{2mv\cos\theta}{l\mathrm{d}t} lv\mathrm{d}t\cos\theta\, nf(v)\mathrm{d}v \frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}p_l = mv\cos\theta\, v\cos\theta\, nf(v)\mathrm{d}v \frac{1}{\pi}\mathrm{d}\theta$$

فشار

مثال۳:

حالا اگر تغییر اندازه حرکت $2mv\cos\theta$ بر واحد طول بر واحد زمان را بصورت ریاضی ضرب کنیم در تعدادی از مولکولها بر واحد سطح که با سرعت v و $v+\mathrm{d}v$ در یک جهت مشخص بین زوایای θ و $\theta+\mathrm{d}\theta$ حرکت می‌کنند و در لحظه کوچک $\mathrm{d}t$ به یک دیوار به ابعاد l ضربه می زنند و سپس انتگرالگیری کنیم روی θ و v فشار را بدست می‌آوریم

$$\mathrm{d}p_l = mv\cos\theta\, v\cos\theta\, nf(v)\mathrm{d}v\,\frac{1}{\pi}\mathrm{d}\theta$$

$$p_l = mn\left(\int_0^\infty f(v)v^2\mathrm{d}v\right)\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\right)$$

فشار

مثال۳:

حالا اگر تغییر اندازه حرکت $2mv\cos\theta$ بر واحد طول بر واحد زمان را بصورت ریاضی ضرب کنیم در تعدادی از مولکولها بر واحد سطح که با سرعت v و $v+\mathrm{d}v$ در یک جهت مشخص بین زوایای θ و $\theta+\mathrm{d}\theta$ حرکت می‌کنند و در لحظه کوچک $\mathrm{d}t$ به یک دیوار به ابعاد l ضربه می زنند و سپس انتگرالگیری کنیم روی θ و v فشار را بدست می‌آوریم

$$p_l = mn\left(\int_0^\infty f(v)v^2\mathrm{d}v\right)\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\right)$$

$$\langle v^2\rangle = \int_0^\infty f(v)v^2\mathrm{d}v = \left(\frac{m}{k_BT}\right)\int_0^\infty v^2 v e^{-mv^2/2k_BT}\mathrm{d}v = \frac{2k_BT}{m}$$

فشار

مثال۳:

حالا اگر تغییر اندازه حرکت $2mv\cos\theta$ بر واحد طول بر واحد زمان را بصورت ریاضی ضرب کنیم در تعدادی از مولکولها بر واحد سطح که با سرعت v و $v+\mathrm{d}v$ در یک جهت مشخص بین زوایای θ و $\theta+\mathrm{d}\theta$ حرکت می‌کنند و در لحظه کوچک $\mathrm{d}t$ به یک دیوار به ابعاد l ضربه می زنند و سپس انتگرالگیری کنیم روی θ و v فشار را بدست می‌آوریم

$$p_l = mn\left(\frac{2k_BT}{m}\right)\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\right)$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}$$

فشار

مثال۳:

حالا اگر تغییر اندازه حرکت $2mv\cos\theta$ بر واحد طول بر واحد زمان را بصورت ریاضی ضرب کنیم در تعدادی از مولکولها بر واحد سطح که با سرعت v و $v+\mathrm{d}v$ در یک جهت مشخص بین زوایای θ و $\theta+\mathrm{d}\theta$ حرکت می‌کنند و در لحظه کوچک $\mathrm{d}t$ به یک دیوار به ابعاد l ضربه می زنند و سپس انتگرالگیری کنیم روی θ و v فشار را بدست می‌آوریم

$$p_l = mn\left(\frac{2k_BT}{m}\right)\left(\frac{1}{\pi}\times\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\boxed{p_l = nk_BT}$$ معادله حالت گاز ایده‌آل

در این بررسی گاز رفتار دوبعدی دارد

فشار

مثال۴:

تعدادی از مولکولها بر واحد حجم که با سرعت v و $v+\mathrm{d}v$ در یک جهت مشخص از زاویه فضایی $\mathrm{d}\Omega$ بین زوایای θ و $\theta+\mathrm{d}\theta$ حرکت می‌کنند و در لحظه کوچک $\mathrm{d}t$ به یک دیوار به مساحت A ضربه می زنند برابر است با

$$\mathrm{d}N = Av\mathrm{d}t\cos\theta n f(v)\mathrm{d}v\frac{1}{2}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

حالا اگر توزیع بالا را بر واحد سطح و واحد زمان تقسیم کنیم شاره ذرات فرودی به دیوار را بدست می‌آید،

$$\mathrm{d}\Phi = \frac{\mathrm{d}N}{A\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}nvf(v)\mathrm{d}v\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

فشار

مثال۴:

بدین ترتیب شار مولکولها بر واحد حجم که با سرعت v و $v+\mathrm{d}v$ در یک جهت مشخص از زاویه فضایی $\mathrm{d}\Omega$ بین زوایای θ و $\theta+\mathrm{d}\theta$ حرکت می‌کنند،

$$\mathrm{d}\Phi = \frac{\mathrm{d}N}{A\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} n v f(v)\mathrm{d}v \sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

$$\int \mathrm{d}\Phi = \frac{1}{2} n \left(\int_0^\infty v f(v)\mathrm{d}v\right)\left(\int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\right)$$

$$\Phi = \frac{1}{2} n \left(\int_0^\infty v f(v)\mathrm{d}v\right) \times \frac{1}{2}$$

فشار

مثال۴:

بدین ترتیب شار مولکولها بر واحد حجم که با سرعت v و $v+\mathrm{d}v$ در یک جهت مشخص از زاویه فضایی $\mathrm{d}\Omega$ بین زوایای θ و $\theta+\mathrm{d}\theta$ حرکت می‌کنند،

$$\mathrm{d}\Phi=\frac{\mathrm{d}N}{A\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}nvf(v)\mathrm{d}v\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

$$\Phi=\frac{1}{2}n\left(\int_0^\infty vf(v)\mathrm{d}v\right)\times\frac{1}{2}$$

$$\Phi=\frac{1}{2}n\langle v\rangle\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}n\langle v\rangle$$

فشار

مثال۴:

بدین ترتیب شار مولکولها بر واحد حجم که با سرعت v و $v+\mathrm{d}v$ در یک جهت مشخص از زاویه فضایی $\mathrm{d}\Omega$ بین زوایای θ و $\theta+\mathrm{d}\theta$ حرکت می‌کنند،

$$\mathrm{d}\Phi=\frac{\mathrm{d}N}{A\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}nvf(v)\mathrm{d}v\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

$$\Phi=\frac{1}{4}n\langle v\rangle$$

$$\langle v\rangle=\int_0^\infty vf(v)\mathrm{d}v=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2k_BT}\right)^{3/2}\int_0^\infty v^3e^{-mv^2/2k_BT}\mathrm{d}v$$

$$\int_0^\infty v^3e^{-mv^2/2k_BT}\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\left(\frac{2k_BT}{m}\right)^2$$

فشار

مثال۴:

بدین ترتیب شار مولکولها بر واحد حجم که با سرعت v و $v+\mathrm{d}v$ در یک جهت مشخص از زاویه فضایی $\mathrm{d}\Omega$ بین زوایای θ و $\theta+\mathrm{d}\theta$ حرکت می‌کنند،

$$\mathrm{d}\Phi = \frac{\mathrm{d}N}{A\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} n v f(v)\mathrm{d}v \sin\theta \cos\theta \mathrm{d}\theta$$

$$\Phi = \frac{1}{4} n \langle v \rangle$$

$$\langle v \rangle = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2k_B T}\right)^{3/2} \times \frac{1}{2}\left(\frac{2k_B T}{m}\right)^2 = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}$$

$$\Phi = \frac{1}{4} n \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}} \xrightarrow{p = n k_B T} \Phi = \frac{1}{4}\frac{p}{k_B T}\sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}} \Rightarrow \boxed{\Phi = \frac{p}{\sqrt{2\pi m k_B T}}}$$

فشار

مثال۵:

تعدادی از مولکولها بر واحد سطح که با سرعت v و $v+\mathrm{d}v$ در یک جهت مشخص بین زوایای θ و $\theta+\mathrm{d}\theta$ حرکت می‌کنند و در لحظه کوچک $\mathrm{d}t$ به یک دیوار به ابعاد l ضربه می زنند برابر

$$\mathrm{d}N = lv\mathrm{d}t\cos\theta n f(v)\mathrm{d}v\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\theta$$

حالا اگر توزیع بالا را بر واحد طول و واحد زمان تقسیم کنیم شاره ذرات فرودی به دیوار را بدست می‌آید،

$$\mathrm{d}\Phi_l = \frac{\mathrm{d}N}{l\mathrm{d}t} = \frac{1}{2\pi}nvf(v)\mathrm{d}v\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

مثال۵:

تعدادی از مولکولها بر واحد سطح که با سرعت v و $v+\mathrm{d}v$ در یک جهت مشخص بین زوایای θ و $\theta+\mathrm{d}\theta$ حرکت می‌کنند و در لحظه کوچک $\mathrm{d}t$ به یک دیوار به ابعاد l ضربه می زنند برابر

$$\mathrm{d}\Phi_l = \frac{\mathrm{d}N}{l\mathrm{d}t} = \frac{1}{2\pi} n v f(v) \mathrm{d}v \cos\theta \mathrm{d}\theta$$

$$\int \mathrm{d}\Phi_l = \frac{1}{2\pi} n \left(\int_0^\infty v f(v) \mathrm{d}v \right) \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \mathrm{d}\theta \right)$$

$$\Phi_l = \frac{1}{2\pi} n \left(\int_0^\infty v f(v) \mathrm{d}v \right) \times 2$$

فشار

مثال۵:

تعدادی از مولکولها بر واحد سطح که با سرعت v و $v+\mathrm{d}v$ در یک جهت مشخص بین زوایای θ و $\theta+\mathrm{d}\theta$ حرکت می‌کنند و در لحظه کوچک $\mathrm{d}t$ به یک دیوار به ابعاد l ضربه می زنند برابر

$$\mathrm{d}\Phi_l = \frac{\mathrm{d}N}{A\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} n v f(v)\mathrm{d}v \sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

$$\left\{\begin{array}{l} \Phi_l = \dfrac{1}{\pi} n \left(\displaystyle\int_0^\infty v f(v)\mathrm{d}v\right) \\ \displaystyle\int_0^\infty v f(v)\mathrm{d}v = \sqrt{\frac{\pi k_B T}{2m}} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \Phi_l = n\sqrt{\dfrac{k_B T}{2\pi m}} \\ p_l = n k_B T \end{array}\right. \Longrightarrow \boxed{\Phi_l = \frac{p_l}{\sqrt{2\pi m k_B T}}}$$