جلسه بیست و سوم

ترمودینامیک و مکانیک آماری

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه
دانشگاه قم
مهر ۹۹

مفاهیمی در فیزیک حرارت

مطالب و عناوین:

- مبانی آماری فیزیک حرارت
- ریاضیات مفید
- گرما
- احتمال
- دما و فاکتور بولتزمن
- توزیع ماکسول بولتزمن
- فشار
- اثر افیوژن مولکولی
- پویش آزاد متوسط و برخوردها
- انرژی و قانون اول ترمودینامیک
- فرایندهای همدما و بی‌دررو
- ماشین‌های حرارتی و قانون دوم ترمودینامیک
- انتروپی

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مثال ۱: یک گاز ایده‌آل تحت یک فرایند برگشت‌پذیر در طول مسیر $p = aV^b$ می‌گیرد که در آن a و b ثابت می‌باشند که در آن $a > 0$. ظرفیت گرمایی را در طول مسیر پیدا کنید.

$$\mathrm{d}U = \text{đ}Q - p\mathrm{d}V$$

$$\text{đ}Q = \mathrm{d}U + p\mathrm{d}V$$

$$\text{đ}\,Q = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \mathrm{d}T + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right] \mathrm{d}\,V$$

$$\text{đ}\,Q = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right]\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p\right] \mathrm{d}T + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right]\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \mathrm{d}p$$

مسائلی در ترمودینامیک و مکانیک آماری

مثال ۱: یک گاز ایده‌آل تحت یک فرایند برگشت‌پذیر در طول مسیر $p = aV^b$ می‌گیرد که در آن a و b ثابت می‌باشند که در آن $a > 0$. ظرفیت گرمایی را در طول مسیر پیدا کنید.

$$\mathrm{d}U = đQ - p\mathrm{d}V$$

$$đQ = \mathrm{d}U + p\mathrm{d}V$$

$$đQ = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \boxed{\mathrm{d}T} + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right]\boxed{\mathrm{d}V}$$

$$đQ = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right]\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p\right]\boxed{\mathrm{d}T} + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right]\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \boxed{\mathrm{d}p}$$

مسائلی در ترمودینامیک و مکانیک آماری

مثال ۱: یک گاز ایده‌آل تحت یک فرایند برگشت‌پذیر در طول مسیر $p = aV^b$ می‌گیرد که در آن a و b ثابت می‌باشند که در آن $a > 0$. ظرفیت گرمایی را در طول مسیر پیدا کنید.

$$\mathrm{d}U = đQ - p\mathrm{d}V$$

$$đQ = \mathrm{d}U + p\mathrm{d}V$$

$$đQ = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \mathrm{d}T + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right] \mathrm{d}V$$

$$đQ = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right]\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p\right] \mathrm{d}T + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right]\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \mathrm{d}p$$

مثال ۱: یک گاز ایده‌آل تحت یک فرایند برگشت‌پذیر در طول مسیر $p = aV^b$ می‌گیرد که در آن a و b ثابت می‌باشند که در آن $a > 0$. ظرفیت گرمایی را در طول مسیر پیدا کنید.

$$\text{đ}Q = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right]\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p\right]\mathrm{d}T + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right]\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \mathrm{d}p$$

$$pV = Nk_BT, \quad U = \frac{3}{2}Nk_BT$$

$$\text{đ}Q = \left[\underbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V}_{\frac{3}{2}Nk_B} + \left[\cancelto{0}{\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T} + p\right]\underbrace{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p}_{\frac{Nk_B}{p}}\right]\mathrm{d}T + \left[\cancelto{0}{\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T} + p\right]\underbrace{\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T}_{-\frac{Nk_BT}{p^2}} \mathrm{d}p$$

مسائلی در ترمودینامیک و مکانیک آماری

مثال ۱: یک گاز ایده‌آل تحت یک فرایند برگشت‌پذیر در طول مسیر $p = aV^b$ می‌گیرد که در آن a و b ثابت می‌باشند که در آن $a > 0$. ظرفیت گرمایی را در طول مسیر پیدا کنید.

$$\text{đ}Q = \left[\underbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V}_{\frac{3}{2}Nk_B} + \left[\cancelto{0}{\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T} + p\right]\underbrace{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p}_{\frac{Nk_B}{p}}\right]\mathrm{d}T + \left[\cancelto{0}{\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T} + p\right]\underbrace{\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T}_{-\frac{Nk_BT}{p^2}}\mathrm{d}p$$

$$\text{đ}Q = \left[\frac{3}{2}Nk_B + [0 + \cancel{p}]\frac{Nk_B}{\cancel{p}}\right]\mathrm{d}T + [0 + p]\left(-\frac{Nk_BT}{p^2}\right)\mathrm{d}p$$

$$\text{đ}Q = \frac{5}{2}Nk_B\mathrm{d}T - \boxed{\left(\frac{Nk_BT}{p}\right)}\mathrm{d}p = \frac{5}{2}Nk_B\mathrm{d}T - \boxed{V}\mathrm{d}p$$

مثال ۱: یک گاز ایده‌آل تحت یک فرایند برگشت‌پذیر در طول مسیر $p = aV^b$ می‌گیرد که در آن a و b ثابت می‌باشند که در آن $a > 0$. ظرفیت گرمایی را در طول مسیر پیدا کنید.

$$đQ = \frac{5}{2}Nk_B\mathrm{d}T - V\mathrm{d}p$$

$$\left(\frac{đQ}{\mathrm{d}T}\right)_{\text{path}} = \frac{5}{2}Nk_B - V\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T}\right)_{\text{path}}, \quad \text{path} : p = aV^b$$

$$C_{\text{path}} = \frac{5}{2}Nk_B - V\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T}\right)_{\text{path}}$$

$$p = aV^b = a\left(\frac{Nk_BT}{p}\right)^b = a\frac{N^bk_B^bT^b}{p^b} \Rightarrow p^{b+1} = N^bk_B^bT^b$$

مثال ۱: یک گاز ایده‌آل تحت یک فرایند برگشت‌پذیر در طول مسیر $p = aV^b$ می‌گیرد که در آن a و b ثابت می‌باشند که در آن $a > 0$. ظرفیت گرمایی را در طول مسیر پیدا کنید.

$$C_{\text{path}} = \frac{5}{2}Nk_B - V\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T}\right)_{\text{path}}$$

$$p = aV^b = a\left(\frac{Nk_BT}{p}\right)^b = a\frac{N^bk_B^bT^b}{p^b} \Rightarrow p^{b+1} = N^bk_B^bT^b$$

$$(b+1)p^b\mathrm{d}p = bN^bk_B^bT^{b-1}\mathrm{d}T$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T}\right)_{\text{path}} = \frac{bN^bk_B^bT^{b-1}}{(b+1)p^b} = \frac{bp}{(b+1)T}\frac{N^bk_B^bT^b}{p^{b+1}} = \frac{bp}{(b+1)T}$$

مسائلی در ترمودینامیک و مکانیک آماری

مثال ۱: یک گاز ایده‌آل تحت یک فرایند برگشت‌پذیر در طول مسیر $p = aV^b$ می‌گیرد که در آن a و b ثابت می‌باشند که در آن $a > 0$. ظرفیت گرمایی را در طول مسیر پیدا کنید.

$$C_{\text{path}} = \frac{5}{2}Nk_B - V\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T}\right)_{\text{path}}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T}\right)_{\text{path}} = \frac{bp}{(b+1)T}$$

$$C_{\text{path}} = \frac{5}{2}Nk_B - V\left(\frac{bp}{(b+1)T}\right) = \frac{5}{2}Nk_B - V\left(\frac{b}{b+1}\right)\frac{1}{V}$$

$$C_{\text{path}} = \frac{5}{2}Nk_B - \frac{b}{b+1}Nk_B$$

مسائلی در ترمودینامیک و مکانیک آماری

مثال ۲: معادله تابش عبارت است از $U = 3pV$. قانون استفان می‌دهد $U = \sigma V T^4$ که σ یک ثابت است. الف) انتروپی تابش را برحسب T و V پیدا کنید. ب) در خلال مهبانگ، تابشی که در ابتدا در ناحیه کوچکی محبوس بوده است، بطور بی‌دررو انبساط می‌یابد و سرد می‌شود. رابطه‌ای بین دمای T و شعاع جهان R را پیدا کنید.

$$\begin{cases} U = 3pV \\ U = \sigma V T^4 \end{cases} \Longrightarrow \quad p = \sigma T^4/3$$

$$T\mathrm{d}S = \mathrm{d}U + p\mathrm{d}V$$

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{T}\mathrm{d}U + \frac{p}{T}\mathrm{d}V$$

مسائلی در ترمودینامیک و مکانیک آماری

مثال ۲: معادله تابش عبارت است از $U = pV/3$. قانون استفان می‌دهد $U = \sigma V T^4$ که σ یک ثابت است. الف) انتروپی تابش را برحسب T و V پیدا کنید. ب) در خلال مهبانگ، تابشی که در ابتدا در ناحیه کوچکی محبوس بوده است، بطور بی‌دررو انبساط می‌یابد و سرد می‌شود. رابطه‌ای بین دمای T و شعاع جهان R را پیدا کنید.

$$U = 3pV, \quad U = \sigma V T^4, \quad p = \sigma T^4/3$$

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{T}\mathrm{d}U + \frac{p}{T}\mathrm{d}V$$

$$\begin{cases} V = \text{const.} : \mathrm{d}S = \dfrac{1}{T}\mathrm{d}U \\ U = \text{const.} : \mathrm{d}S = \dfrac{p}{T}\mathrm{d}V \end{cases}$$

مثال ۲: معادله تابش عبارت است از $U = pV/3$. قانون استفان می‌دهد $U = \sigma V T^4$ که σ یک ثابت است. الف) انتروپی تابش را برحسب T و V پیدا کنید. ب) در خلال مهبانگ، تابشی که در ابتدا در ناحیه کوچکی محبوس بوده است، بطور بی‌دررو انبساط می‌یابد و سرد می‌شود. رابطه‌ای بین دمای T و شعاع جهان R را پیدا کنید.

$$U = 3pV, \quad \boxed{U = \sigma V T^4}, \quad p = \sigma T^4/3$$

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{T}\mathrm{d}U + \frac{p}{T}\mathrm{d}V$$

$$V = \text{const.} : \mathrm{d}S = \frac{1}{T}\mathrm{d}U = \frac{1}{T}4\sigma V T^3 \mathrm{d}T = 4\sigma V T^2 \mathrm{d}T$$

$$\mathrm{d}S = 4\sigma V T^2 \mathrm{d}T \Rightarrow \Delta S = \frac{4}{3}\sigma V T^3$$

مثال ۲: معادله تابش عبارت است از $U = pV/3$. قانون استفان می‌دهد $U = \sigma V T^4$ که σ یک ثابت است. الف) انتروپی تابش را برحسب T و V پیدا کنید. ب) در خلال مهبانگ، تابشی که در ابتدا در ناحیه کوچکی محبوس بوده است، بطور بی‌دررو انبساط می‌یابد و سرد می‌شود. رابطه‌ای بین دمای T و شعاع جهان R را پیدا کنید.

$$\boxed{U = 3pV}, \quad \boxed{U = \sigma V T^4}, \quad p = \sigma T^4/3$$

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{T}\mathrm{d}U + \frac{p}{T}\mathrm{d}V$$

$$U = \text{const.} : \mathrm{d}S = \frac{p}{T}\mathrm{d}V = \frac{\left(\frac{U}{3V}\right)}{\left(\frac{U}{\sigma V}\right)^{\frac{1}{4}}}\mathrm{d}V = \frac{U^{\frac{3}{4}}\sigma^{\frac{1}{4}}}{3V^{\frac{3}{4}}}\mathrm{d}V$$

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{3}U^{\frac{3}{4}}\sigma^{\frac{1}{4}}\frac{\mathrm{d}V}{V^{\frac{3}{4}}} \Rightarrow \Delta S = \frac{4}{3}U^{\frac{3}{4}}\sigma^{\frac{1}{4}}V^{\frac{1}{4}}$$

مثال ۲: معادله تابش عبارت است از $U=pV/3$. قانون استفان می‌دهد $U=\sigma VT^4$ که σ یک ثابت است. الف) انتروپی تابش را برحسب T و V پیدا کنید. ب) در خلال مهبانگ، تابشی که در ابتدا در ناحیه کوچکی محبوس بوده است، بطور بی‌دررو انبساط می‌یابد و سرد می‌شود. رابطه‌ای بین دمای T و شعاع جهان R را پیدا کنید.

$$U=3pV,\quad \boxed{U=\sigma VT^4},\quad p=\sigma T^4/3$$

$$\mathrm{d}S=\frac{1}{T}\mathrm{d}U+\frac{p}{T}\mathrm{d}V$$

$$U=\text{const.}:\Delta S=\frac{4}{3}U^{\frac{3}{4}}\sigma^{\frac{1}{4}}V^{\frac{1}{4}}$$

$$\Delta S=\frac{4}{3}(\sigma VT^4)^{\frac{3}{4}}\sigma^{\frac{1}{4}}V^{\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}\sigma VT^3\ :V=\text{const.}$$

مسائلی در ترمودینامیک و مکانیک آماری

مثال ۲: معادله تابش عبارت است از $U = pV/3$. قانون استفان می‌دهد $U = \sigma V T^4$ که σ یک ثابت است. الف) انتروپی تابش را برحسب T و V پیدا کنید. ب) در خلال مهبانگ، تابشی که در ابتدا در ناحیه کوچکی محبوس بوده است، بطور بی‌دررو انبساط می‌یابد و سرد می‌شود. رابطه‌ای بین دمای T و شعاع جهان R را پیدا کنید.

$$\boxed{U = 3pV}, \quad U = \sigma V T^4, \quad p = \sigma T^4/3$$

$$đQ = T\mathrm{d}S = \mathrm{d}U + p\mathrm{d}V$$

$$\text{بی‌دررو} \quad đQ = 0 : \ \mathrm{d}U + p\mathrm{d}V = 0$$

$$3V\mathrm{d}p + 3p\mathrm{d}V + p\mathrm{d}V = 0$$

$$3V\mathrm{d}p + 4p\mathrm{d}V = 0$$

مسائلی در ترمودینامیک و مکانیک آماری

مثال ۲: معادله تابش عبارت است از $U = pV/3$. قانون استفان می‌دهد $U = \sigma V T^4$ که σ یک ثابت است. الف) انتروپی تابش را برحسب T و V پیدا کنید. ب) در خلال مهبانگ، تابشی که در ابتدا در ناحیه کوچکی محبوس بوده است، بطور بی‌دررو انبساط می‌یابد و سرد می‌شود. رابطه‌ای بین دمای T و شعاع جهان R را پیدا کنید.

$$U = 3pV, \quad U = \sigma V T^4, \quad p = \sigma T^4/3$$

$$3V\mathrm{d}p + 4p\mathrm{d}V = 0$$

$$3\frac{\mathrm{d}p}{p} = -4\frac{\mathrm{d}V}{V} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{4}{3}\frac{\mathrm{d}V}{V} \Rightarrow \int_{p_0}^{p}\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{4}{3}\int_{V_0}^{V}\frac{\mathrm{d}V}{V}$$

$$\ln(p/p_0) = \ln(V/V_0)^{-\frac{4}{3}} \Rightarrow \ln p + \frac{4}{3}\ln V = \ln p_0 + \frac{4}{3}\ln V_0$$

مسائلی در ترمودینامیک و مکانیک آماری

مثال ۲: معادله تابش عبارت است از $U = pV/3$. قانون استفان می‌دهد $U = \sigma V T^4$ که σ یک ثابت است. الف) انتروپی تابش را برحسب T و V پیدا کنید. ب) در خلال مهبانگ، تابشی که در ابتدا در ناحیه کوچکی محبوس بوده است، بطور بی‌دررو انبساط می‌یابد و سرد می‌شود. رابطه‌ای بین دمای T و شعاع جهان R را پیدا کنید.

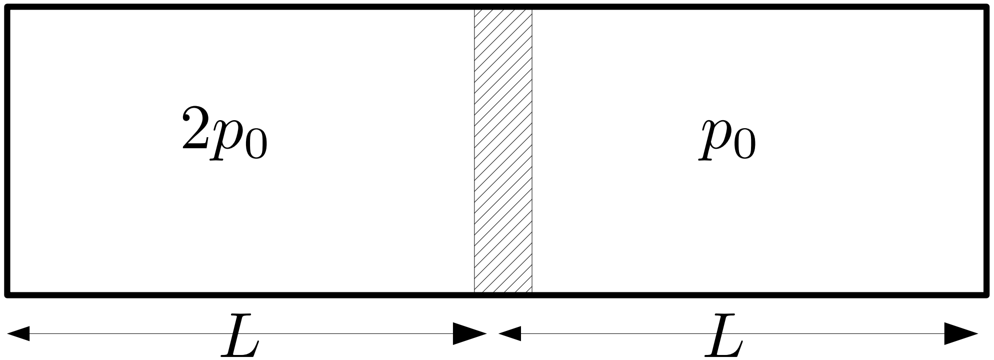
$$U = 3pV, \quad U = \sigma V T^4, \quad \boxed{p = \sigma T^4/3}$$

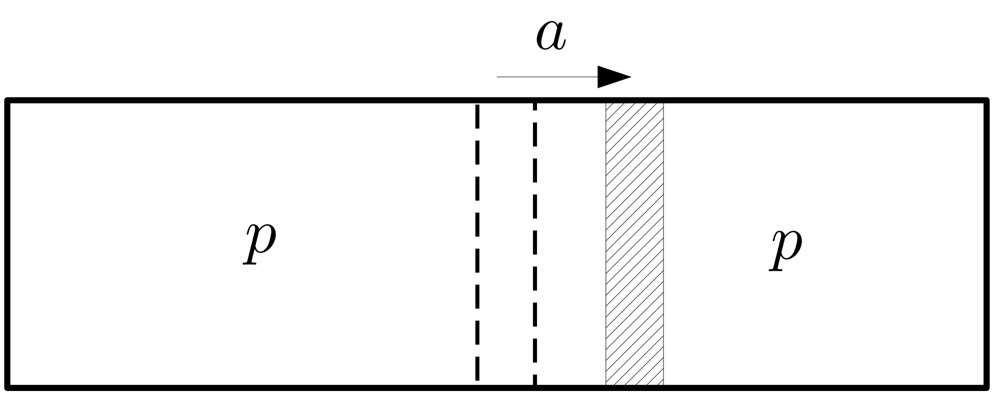
$$\ln pV^{\frac{4}{3}} = \ln p_0 V_0^{\frac{4}{3}} \Rightarrow pV^{\frac{4}{3}} = \text{const.} \Rightarrow p = \frac{c_0}{V^{\frac{4}{3}}}$$

$$\frac{\sigma T^4}{3} = \frac{c_0}{V^{\frac{4}{3}}} \Rightarrow T^4 = \frac{3c_0}{\sigma} V^{\frac{4}{3}} \Rightarrow T = \left(\frac{3c_0}{\sigma}\right)^{\frac{1}{4}} V^{\frac{1}{3}}$$

اگر حجم جهان $$V = \frac{4\pi}{3} R^3 \Rightarrow T = \left(\frac{3c_0}{\sigma}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{-\frac{1}{3}} R^{-1}$$

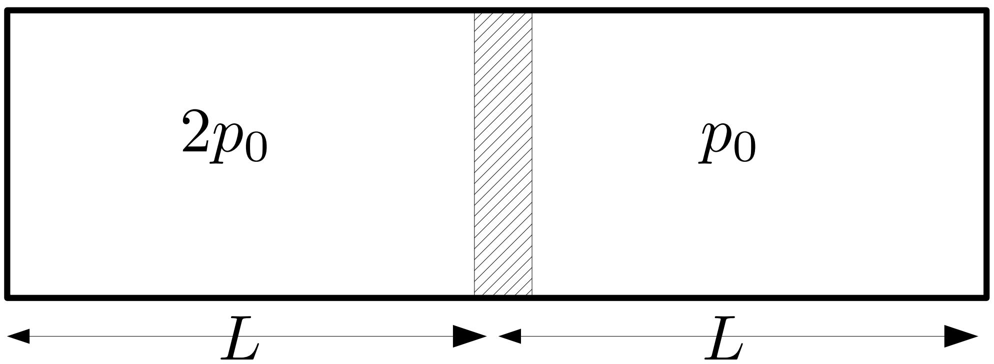
مثال ۳: یک استوانه‌ای به مساحت سطح مقطع A توسط یک پیستون بدون اصطکاک به دو محفظه ۱ و ۲ تقسیم می‌شود.پیستون به اضافه دیواره‌های محفظه از نظر گرمایی عایق‌بندی شده‌اند. محفظه‌ها طول اولیه‌ی L دارند. هر دو محفظه با یک مول گاز به ترتیب با فشار اولیه $2p_0$ و p_0 پر شده‌اند. پیستون از حالت اولیه و بطور آزادانه بطرف راست جابجا می‌شود تا فشار دو محفظه برابر p شود. الف) جابجایی پیستون را پیدا کنید. ب) اگر W کاری باشد که توسط محفظه ۱ انجام می‌شود، دمای نهایی T_1 و T_2 در هر دو محفظه را بدست آورید. ج) اگر W کاری باشد که توسط محفظه ۱ انجام می‌شود، فشار نهایی p را بدست آورید. د) کار انجام شده W را پیدا کنید.

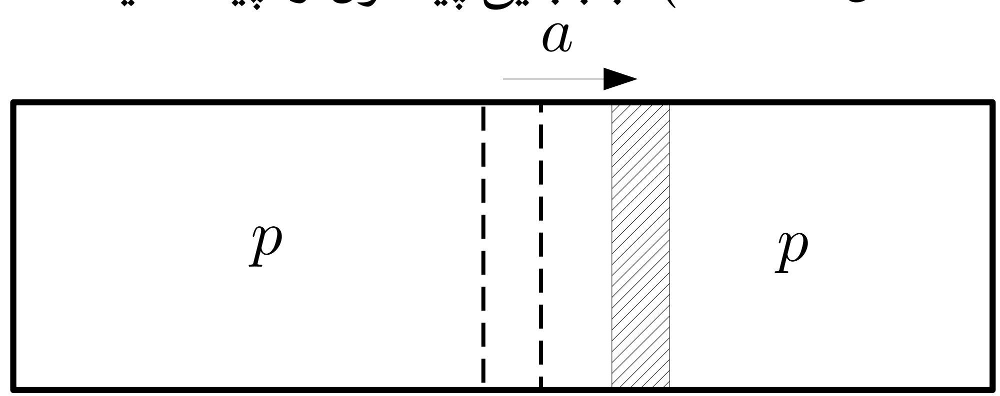




مسائلی در ترمودینامیک و مکانیک آماری

مثال ۳: الف) جابجایی پیستون را پیدا کنید.





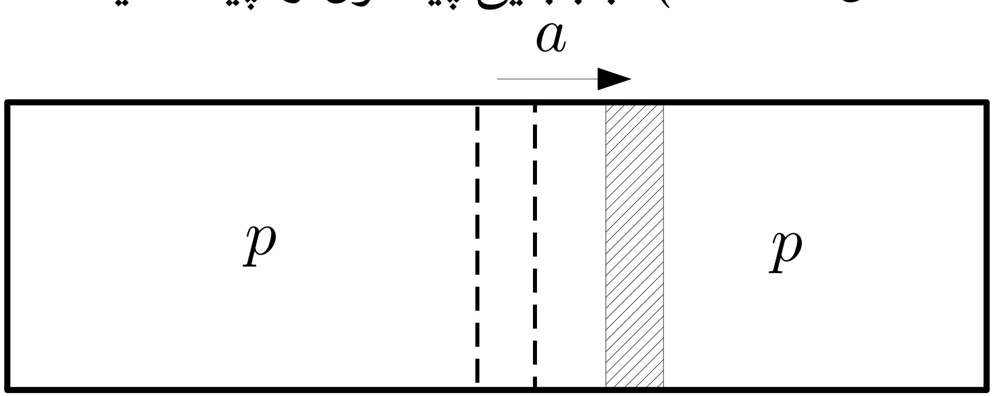
$$đQ = 0 \quad \begin{cases} V^{\gamma-1}T = \text{const.} \\ \boxed{V^{\gamma}p = \text{const.}} \\ p^{\gamma-1}T^{-\gamma} = \text{const.} \end{cases}$$

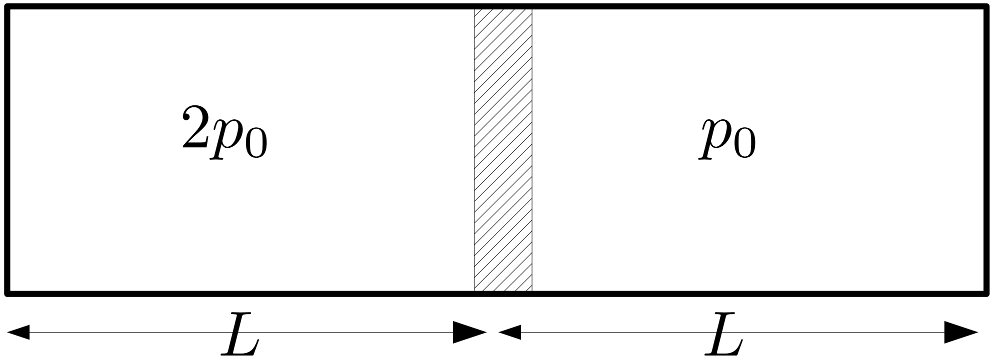
مخزن سمت چپ قبل و بعد از جابجایی پیستون:

$$V_1^{\gamma}p_1 = V_2^{\gamma}p_2$$

$$A^{\gamma}L^{\gamma}2p_0 = A^{\gamma}(L+a)^{\gamma}p$$

مثال ۳: الف) جابجایی پیستون را پیدا کنید.





$$\text{đ}Q = 0 \quad \begin{cases} V^{\gamma-1}T = \text{const.} \\ \boxed{V^{\gamma}p = \text{const.}} \\ p^{\gamma-1}T^{-\gamma} = \text{const.} \end{cases}$$

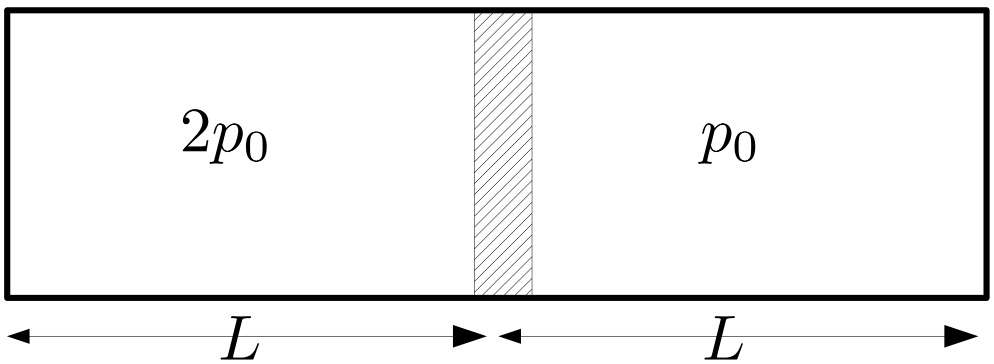
مخزن سمت چپ قبل و بعد از جابجایی پیستون:

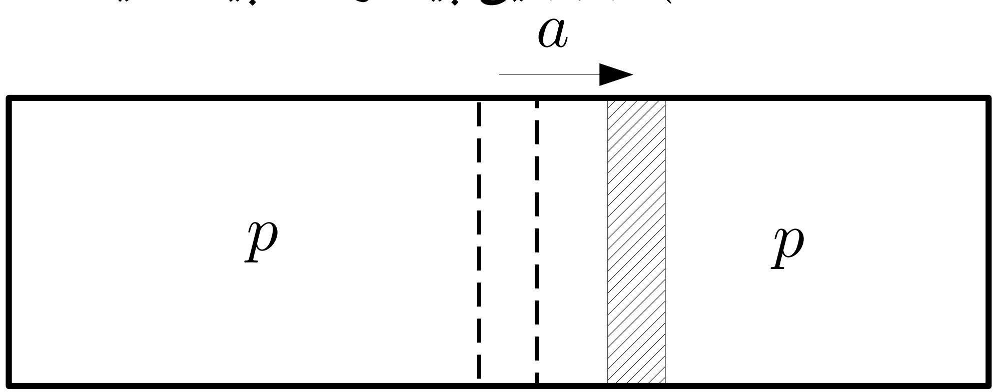
$$V_1^{\gamma}p_1 = V_2^{\gamma}p_2$$

$$\cancel{A^{\gamma}}L^{\gamma}2p_0 = \cancel{A^{\gamma}}(L+a)^{\gamma}p$$

$$L\left(\frac{2p_0}{p}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = L + a$$

مثال ۳: الف) جابجایی پیستون را پیدا کنید.





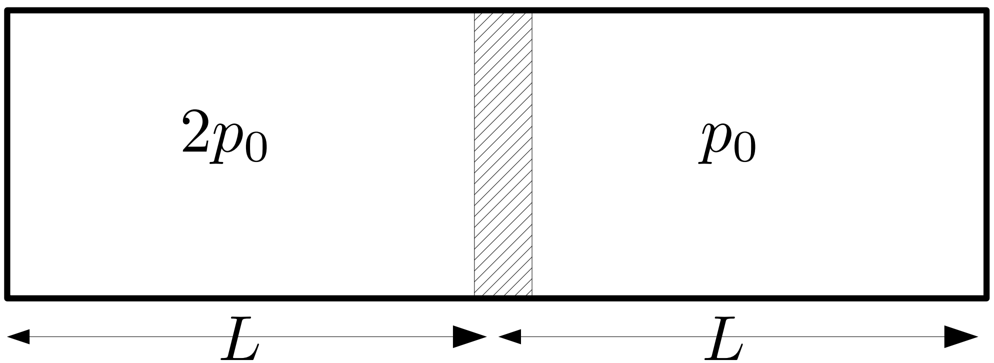
$$\text{đ}Q = 0 \quad \begin{cases} V^{\gamma-1}T = \text{const.} \\ \boxed{V^{\gamma}p = \text{const.}} \\ p^{\gamma-1}T^{-\gamma} = \text{const.} \end{cases}$$

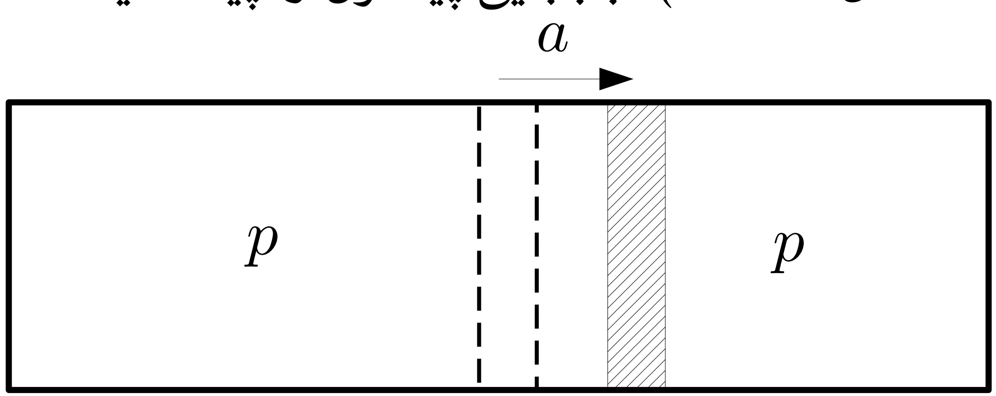
مخزن سمت چپ قبل و بعد از جابجایی پیستون:

$$V_1^{\gamma} p_1 = V_2^{\gamma} p_2$$

$$A^{\gamma} L^{\gamma} p_0 = A^{\gamma} (L-a)^{\gamma} p$$

مثال ۳: الف) جابجایی پیستون را پیدا کنید.





$$
\text{đ}Q = 0 \quad \begin{cases} V^{\gamma-1}T = \text{const.} \\ \boxed{V^{\gamma}p = \text{const.}} \\ p^{\gamma-1}T^{-\gamma} = \text{const.} \end{cases}
$$

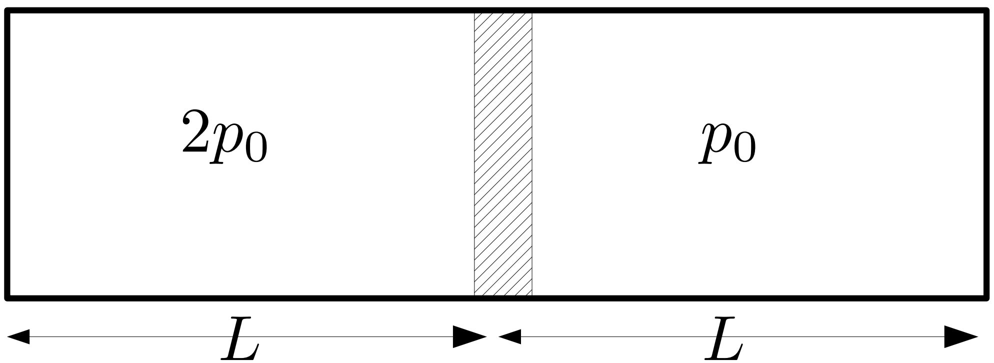
مخزن سمت راست قبل و بعد از جابجایی پیستون:

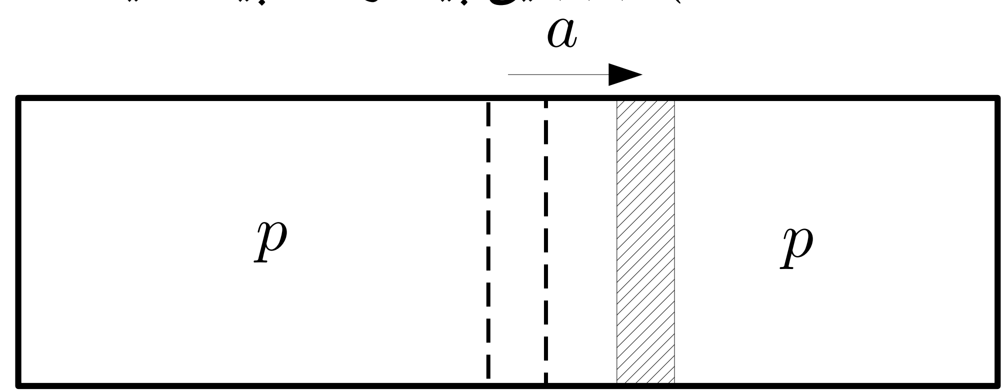
$$V_1^{\gamma}p_1 = V_2^{\gamma}p_2$$

$$\cancel{A^{\gamma}}L^{\gamma}p_0 = \cancel{A^{\gamma}}(L-a)^{\gamma}p$$

$$L\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = L - a$$

مثال ۳: الف) جابجایی پیستون را پیدا کنید.





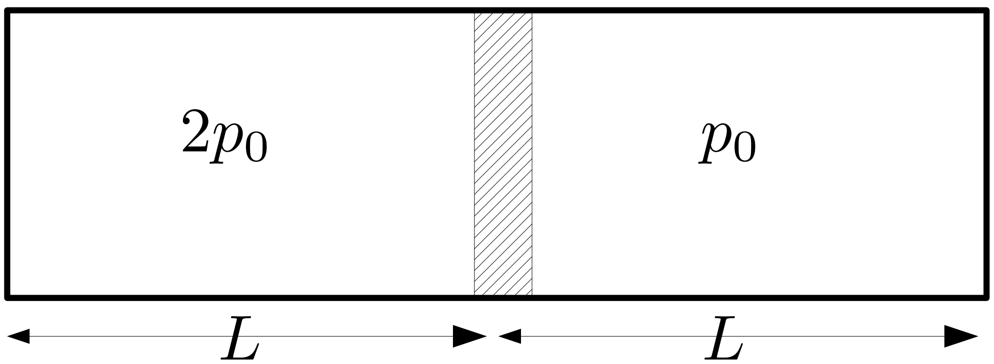
$$
đQ = 0 \quad \begin{cases} V^{\gamma-1}T = \text{const.} \\ \boxed{V^{\gamma}p = \text{const.}} \\ p^{\gamma-1}T^{-\gamma} = \text{const.} \end{cases}
$$

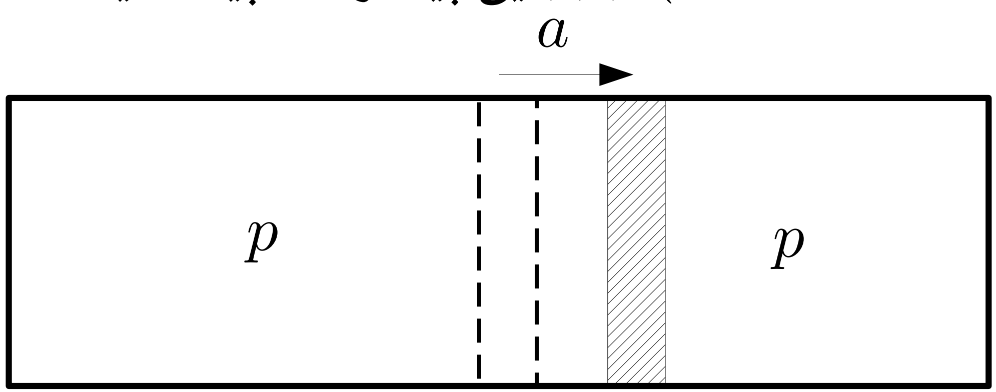
$$
2^{\frac{1}{\gamma}}\cancel{L\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{1}{\gamma}}} = L + a
$$

$$
\cancel{L\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{1}{\gamma}}} = L - a
$$

مسائلی در ترمودینامیک و مکانیک آماری

مثال ۳: الف) جابجایی پیستون را پیدا کنید.





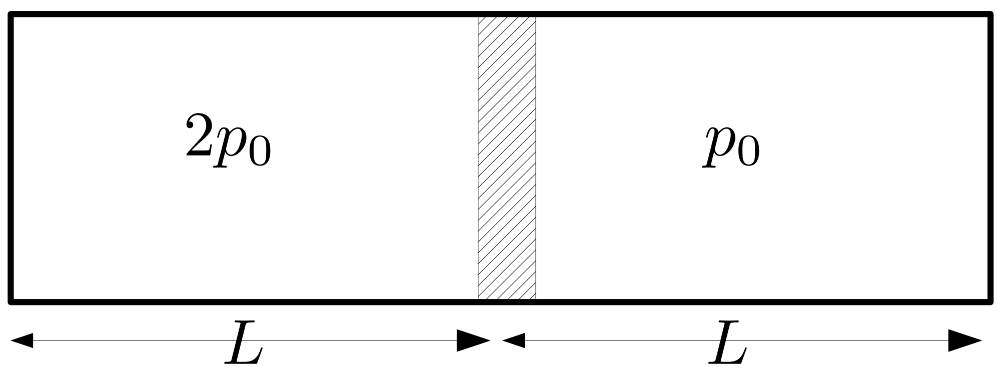
$$đQ = 0 \quad \begin{cases} V^{\gamma-1}T = \text{const.} \\ \boxed{V^{\gamma}p = \text{const.}} \\ p^{\gamma-1}T^{-\gamma} = \text{const.} \end{cases}$$

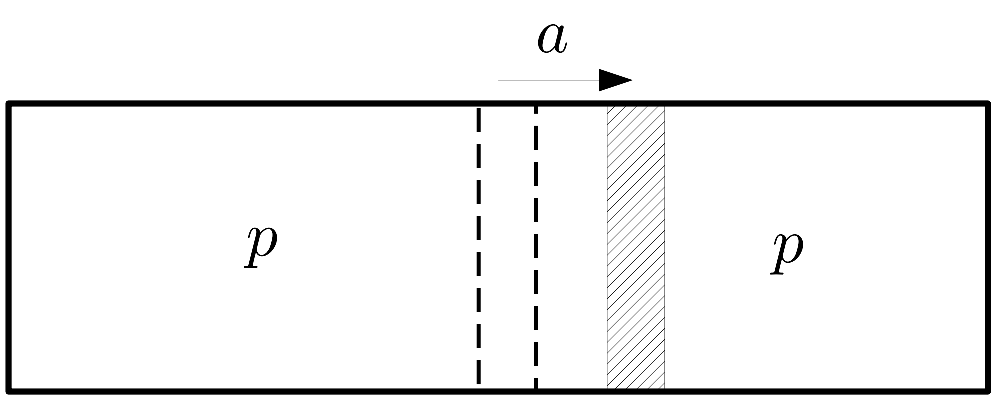
$$2^{\frac{1}{\gamma}} = \frac{L+a}{L-a}$$

$$\frac{a}{L} = \frac{2^{\frac{1}{\gamma}}-1}{2^{\frac{1}{\gamma}}+1}$$

مسائلی در ترمودینامیک و مکانیک آماری

مثال ۳: ب) اگر W کاری باشد که توسط محفظه ۱ انجام می‌شود، دمای نهایی T_1 و T_2 در هر دو محفظه را بدست آورید.



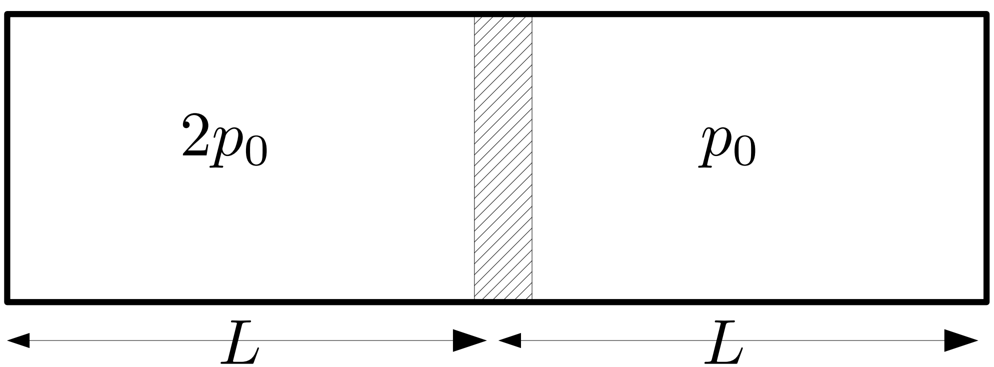


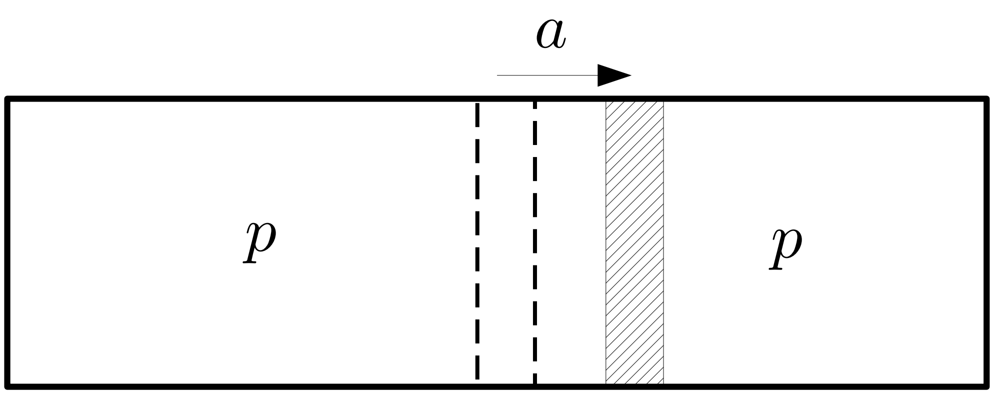
مخزن چپ و راست قبل از جابجایی پیستون:

$$\begin{cases} 2p_0LA = Nk_BT_1^0 \Rightarrow T_1^0 = \dfrac{2p_0LA}{Nk_B} \\ p_0LA = Nk_BT_2^0 \Rightarrow T_2^0 = \dfrac{p_0LA}{Nk_B} \end{cases} \Rightarrow \boxed{T_0 = \frac{p_0LA}{Nk_B}}, \quad T_1^0 = 2T_0, \quad T_2^0 = T_0$$

اگر

مثال ۳: ب) اگر W کاری باشد که توسط محفظه ۱ انجام می‌شود، دمای نهایی T_1 و T_2 در هر دو محفظه را بدست آورید.





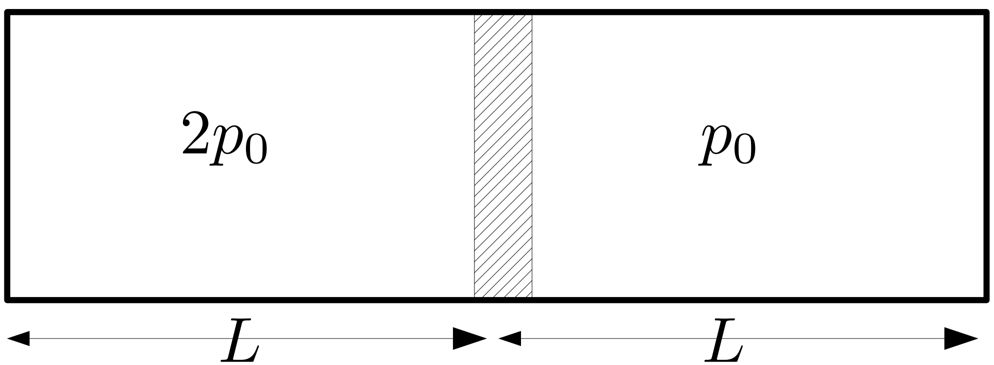
مخزن چپ و راست بعد از جابجایی پیستون:

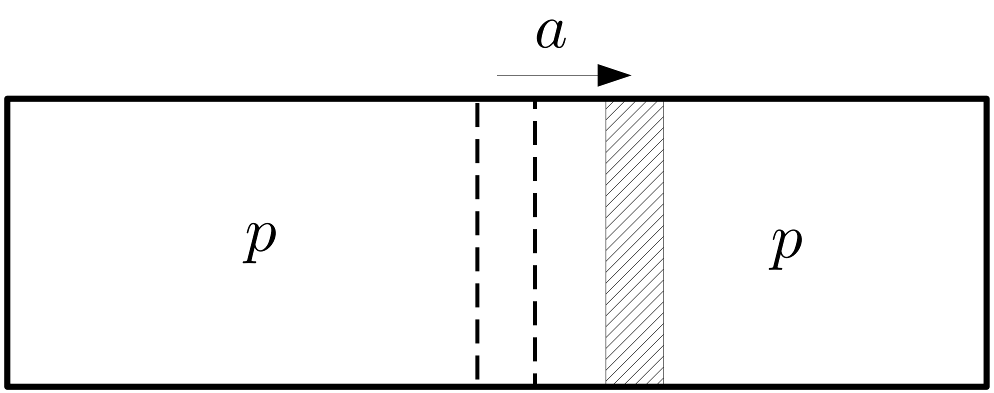
$$\begin{cases} T_0 = \dfrac{p_0 L A}{N k_B} \\ T_1^0 = 2T_0 \\ T_2^0 = T_0 \end{cases}$$

$$\Delta Q = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{چپ} \quad \Delta U = -W \Rightarrow \dfrac{3}{2} N k_B (T_1 - 2T_0) = -W \\ \text{راست} \quad \Delta U = W \Rightarrow \dfrac{3}{2} N k_B (T_2 - T_0) = W \end{cases}$$

مسائلی در ترمودینامیک و مکانیک آماری

مثال ۳: ب) اگر W کاری باشد که توسط محفظه ۱ انجام می‌شود، دمای نهایی T_1 و T_2 در هر دو محفظه را بدست آورید.

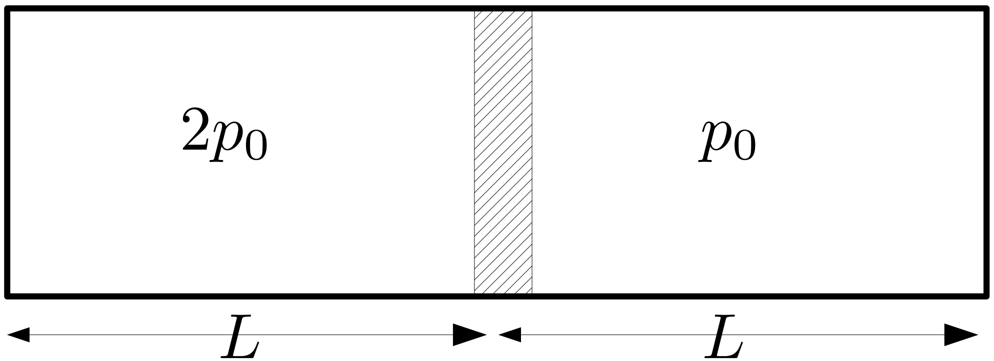


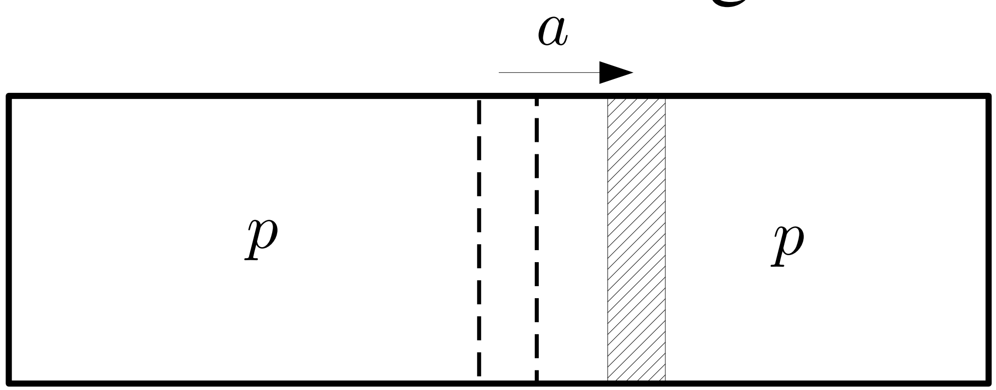


مخزن چپ و راست بعد از جابجایی پیستون:

$$\begin{cases} T_0 = \dfrac{p_0 L A}{N k_B} \\[2ex] T_1^0 = 2T_0 \\[2ex] T_2^0 = T_0 \end{cases} \qquad \Delta Q = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{چپ} \quad T_1 = 2T_0 - \dfrac{W}{3Nk_B/2} \\[3ex] \text{راست} \quad T_2 = T_0 + \dfrac{W}{3Nk_B/2} \end{cases}$$

مثال ۳: ج) فشار نهایی p را بدست آورید.



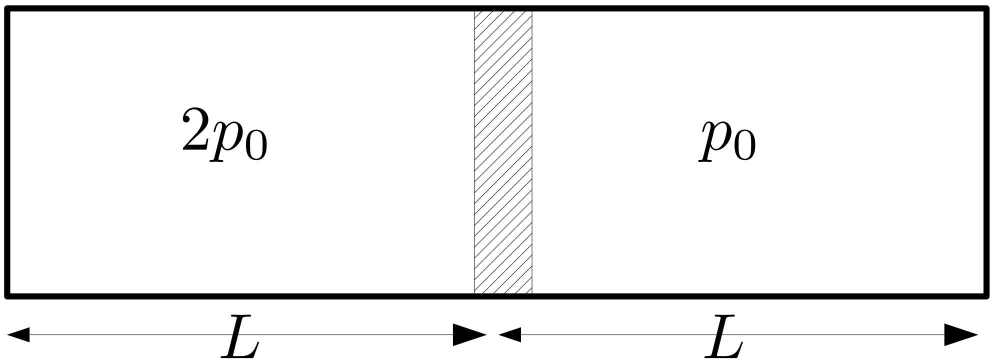


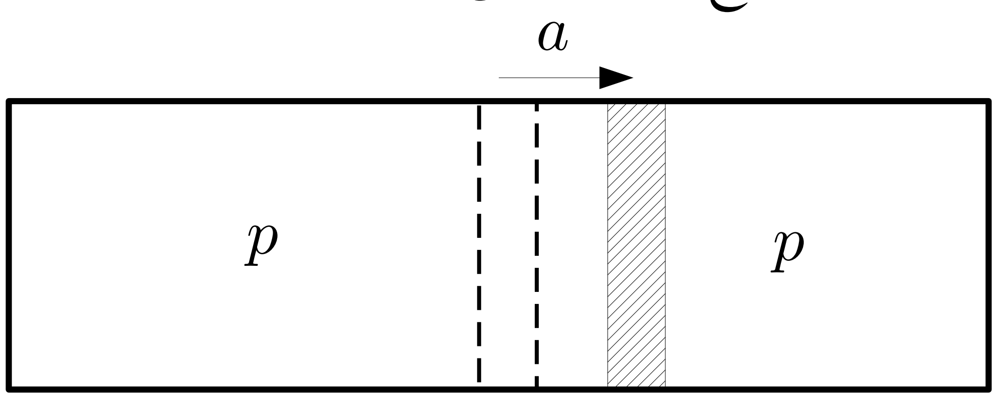
مخزن چپ و راست بعد از جابجایی پیستون:

$$\begin{cases} \text{چپ} \quad pA(L+a) = Nk_BT_1 \Rightarrow pA(L+a) = 2Nk_BT_0 - 2W/3 \\ \text{راست} \quad pA(L-a) = Nk_BT_2 \Rightarrow pA(L-a) = Nk_BT_0 + 2W/3 \quad + \end{cases}$$

$$2pAL = 3Nk_BT_0$$

مثال ۳: ج) فشار نهایی p را بدست آورید.



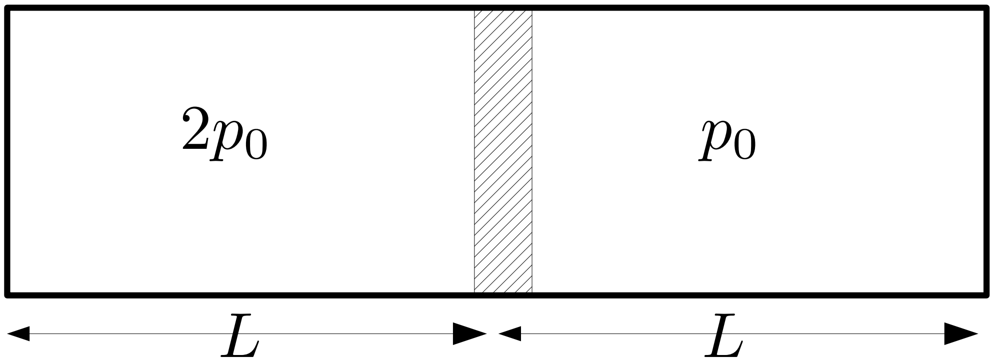


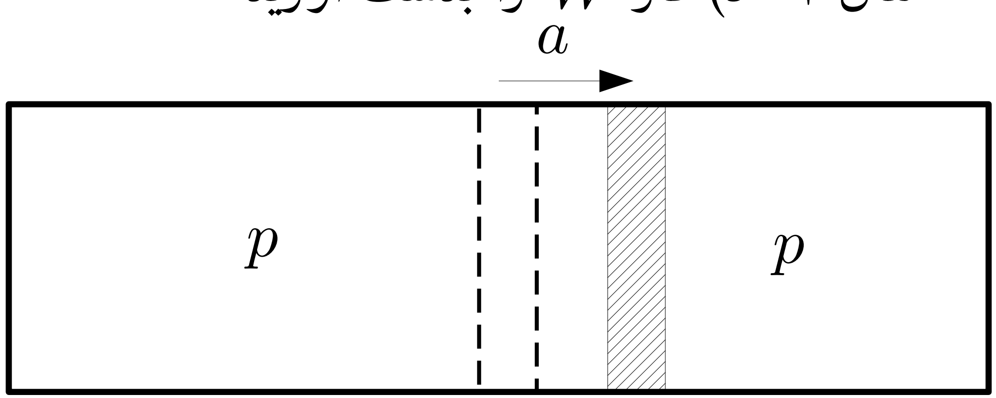
مخزن چپ و راست بعد از جابجایی پیستون:

$$\begin{cases} 2pAL = 3Nk_BT_0 \\ T_0 = \dfrac{p_0LA}{Nk_B} \end{cases} \Rightarrow p = \frac{3}{2}p_0$$

مسائلی در ترمودینامیک و مکانیک آماری

مثال ۳: د) کار W را بدست آورید.





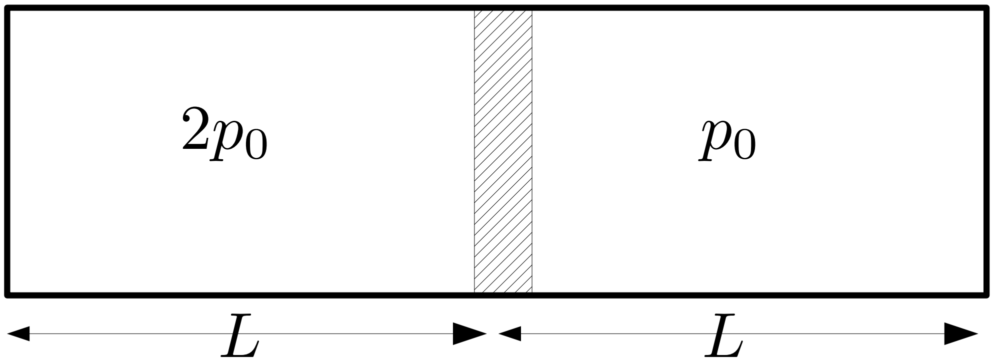
مخزن چپ و راست بعد از جابجایی پیستون:

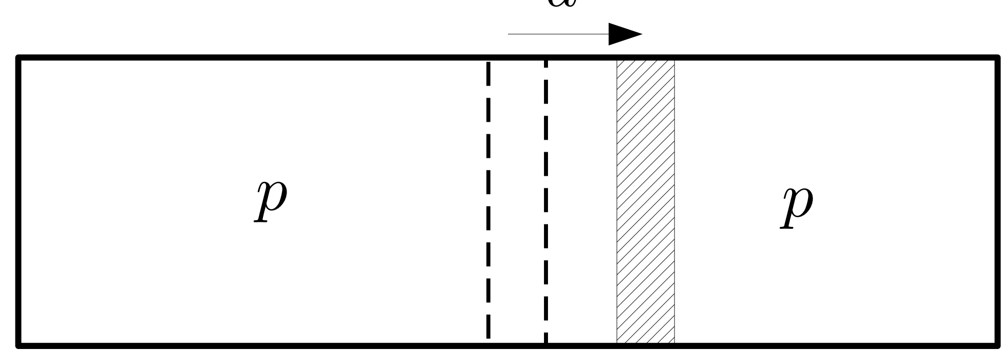
$$\begin{cases} \text{چپ} \quad pA(L+a) = Nk_BT_1 \Rightarrow pA(L+a) = 2Nk_BT_0 - 2W/3 \\ \text{راست} \quad pA(L-a) = Nk_BT_2 \Rightarrow pA(L-a) = Nk_BT_0 + 2W/3 \end{cases}$$

$$\frac{L+a}{L-a} = \frac{2Nk_BT_0 - 2W/3}{Nk_BT_0 + 2W/3}$$

مسائلی در ترمودینامیک و مکانیک آماری

مثال ۳: د) کار W را بدست آورید.





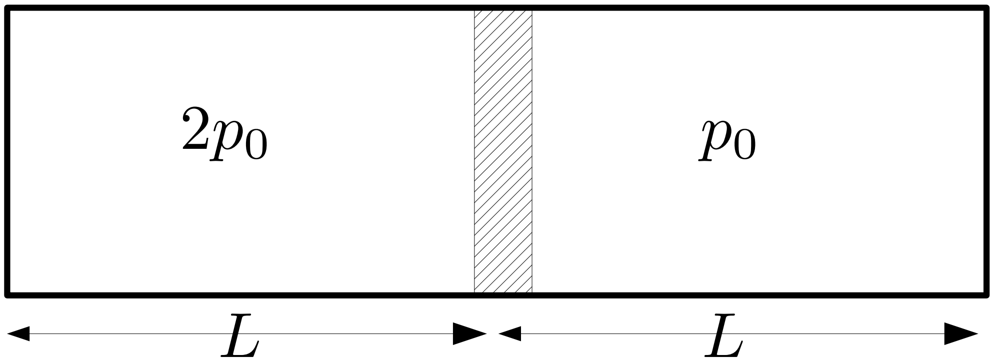
مخزن چپ و راست بعد از جابجایی پیستون:

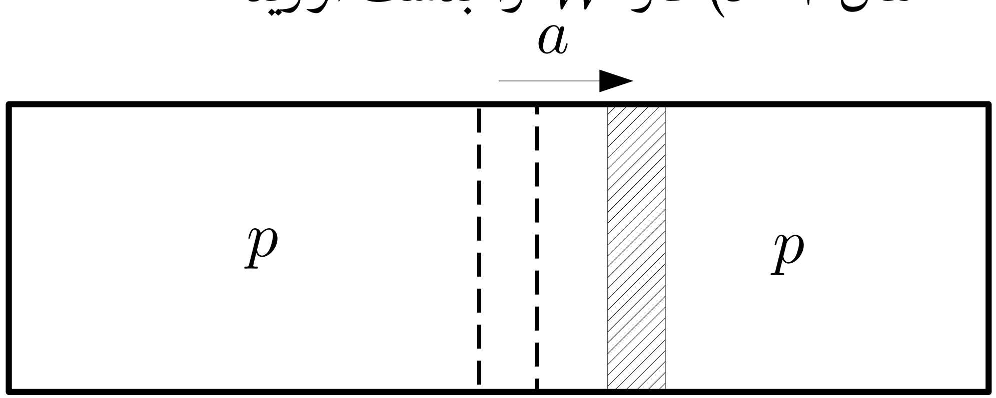
$$\begin{cases} \dfrac{L+a}{L-a} = \dfrac{2Nk_BT_0 - 2W/3}{Nk_BT_0 + 2W/3} \\[2ex] 2^{\frac{1}{\gamma}} = \dfrac{L+a}{L-a} \\[2ex] T_0 = \dfrac{p_0LA}{Nk_B} \end{cases}$$

$$\frac{L+a}{L-a} = \frac{2Nk_BT_0 - 2W/3}{Nk_BT_0 + 2W/3}$$

$$2^{\frac{1}{\gamma}} = \frac{2p_0LA - 2W/3}{p_0LA + 2W/3}$$

مثال ۳: د) کار W را بدست آورید.





مخزن چپ و راست بعد از جابجایی پیستون:

$$2^{\frac{1}{\gamma}} = \frac{2p_0LA - 2W/3}{p_0LA + 2W/3} \Rightarrow W = \frac{3p_0LA}{2}\left(\frac{1+2^{\frac{1}{\gamma}}}{2-2^{\frac{1}{\gamma}}}\right)$$