فصل ۱

ریاضیات مفید

۱.۱ انتگرال فاکتوریل

یکی از مفیدترین انتگرالها در مسائل ترمودینامیک است،

$$n! = \int_0^\infty x^n e^{-x}\, \mathrm{d}x$$

که بخاطر پر کاربرد بودن بهتر است آنرا در خاطر نگه داشت. در ادامه برای بررسی درستی آن از روش استقرا استفاده خواهیم کرد. (۱) عبارت بالا برای $n = 0$ بصورت زیر داده می‌شود

$$0! = \int_0^\infty e^{-x}\, \mathrm{d}x$$

می‌توان نشان داد که انتگرال بالا برابر است با

$$\int_0^\infty x^{-x}\, \mathrm{d}x = -\left[e^{-x}\right]_0^\infty = 1$$

همچنین می‌دانیم که $0! = 1$ است. (۲) اگر فرض کنیم برای $n = k$ انتگرال فاکتوریل برقرار باشد، یعنی

$$k! = \int_0^\infty x^k e^{-x}\, \mathrm{d}x$$

قصد داریم درستی آنرا برای $n = k + 1$ بررسی کنیم، یعنی

$$(k+1)! = \int_0^\infty x^{k+1} e^{-x}\, \mathrm{d}x.$$

اگر عبارت پایین را داشته باشیم

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^{k+1}e^{-x}\right) = (k+1)x^k e^{-x} - x^{k+1}e^{-x}$$

با انتگرالگیری از رابطه بالا در فاصله 0 تا ∞ داریم،

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^{k+1}e^{-x}\right)\, \mathrm{d}x = (k+1)\int_0^\infty x^k e^{-x}\, \mathrm{d}x - \int_0^\infty x^{k+1}e^{-x}\, \mathrm{d}x$$

سمت چپ عبارت بالا برابر صفر است و انتگرال اول سمت راست هم برابر $k!$ است. یعنی

$$0 = (k+1)k! - \int_0^\infty x^{k+1}e^{-x}\, \mathrm{d}x \Rightarrow (k+1)! = \int_0^\infty x^{k+1}e^{-x}\, \mathrm{d}x.$$

۲.۱ تابع گاما

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

که در آن n میتواند اعداد غیره صحیح هم باشد. برای این منظور در بیشتر مراجع بجای n از z استفاده می‌کنند،

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

که در آن رابطه $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ برقرار است. اینجا برای تمرین خیال داریم مقدار $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$ را بدست آوریم،

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}} e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

برای سادگی تغییر متغییر $\sqrt{x} = t \Rightarrow \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$ را به انتگرال اعمال می‌کنیم

$$2\int_0^\infty t^2 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

انتگرال بالا به انتگرال گوسینی معروف می‌باشد. که در بخش پایین آنرا بررسی خواهیم کرد. مقدار انتگرال برابر است با

$$\int_0^\infty t^2 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\sqrt{\pi}$$

بدین ترتیب مقدار تابع گاما برای ۳/۲ برابر است با

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

حالا براحتی با استفاده از رابطه $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ میشود مقدار تابع گاما را در ۱/۲ بدست آورد، یعنی

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

جدول پایین مطابق محاسبات بالا مقدار تابع Γ برای آرگمانهای صحیح و غیر صحیح با کسر ۱/۲ داده شده است.

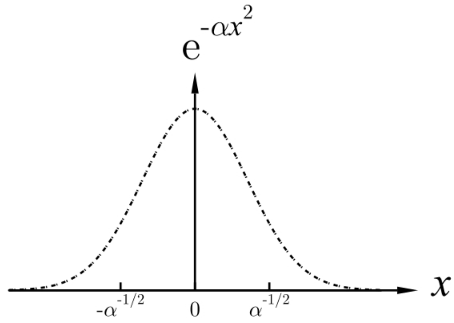
4	3	$\frac{5}{2}$	2	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	z
6	2	$\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$	1	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$	1	$\sqrt{\pi}$	$-2\sqrt{\pi}$	$\frac{4\sqrt{\pi}}{3}$	$\Gamma(z)$

۳.۱ انتگرال گوسینی

گوسین تابعی به شکل $e^{-\alpha x^2}$ است که نمودار آن در زیر داده شده است.

که یک ماکزیمم در $x = 0$ دارد. در بسیاری از مسائل آماری با اسم توزیع نرمال (normal distribution) ظاهر می‌شود. انتگرال تابع گوسین یکی دیگر از انتگرالهای بسیار مهم در فیزیک بشمار می رود

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$



برای حل انتگرال، $I=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x$، از روش انتگرالگیری دو بعدی بهره می‌بریم،

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha y^2}\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = I^2$$

برای سادگی، با تغییر متغییر $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ میتوان انتگرال را از دستگاه مختصات دکارتی به دستگاه مختصات قطبی انتقال داد.

$$I^2 = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-\alpha r^2} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \left(\int_0^{\infty} r e^{-\alpha r^2}\,\mathrm{d}r\right)\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\right) = 2\pi\int_0^{\infty} r e^{-\alpha r^2}\,\mathrm{d}r$$

انتگرال بالا برای تغییر متغییر $u=r^2$ و $du = 2r\,\mathrm{d}r$ برابر است با

$$\int_0^{\infty} r e^{-\alpha r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-\alpha u}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha u}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{2\alpha}$$

بدین ترتیب

$$I^2 = 2\pi\int_0^{\infty} r e^{-\alpha r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{\alpha} \Rightarrow I = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

بصورت یک نتیجه

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

را در خاطر نگه دارید. از روی انتگرال بالا می‌توان شکلهای انتگرالی جدید و مفید دیگری بدست آورد. برای این منظور از طرفین رابطه بالا نسبت به α مشتق بگیریم. مثلا برای مشتق مرتبه اول داریم،

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$$

برای مشتق مرتبه دوم

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\alpha^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\alpha^2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}$$

برای مشتق مرتبه nام

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\alpha^n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\alpha^n}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n}e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{(2n)!}{n!2^{2n}}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{2n+1}}}$$

از آنجایی که انتگرالده در تمامی انتگرالهای بالا زوج است می‌توان انتگرال $-\infty$ تا ∞ با نصف انتگرال 0 تا ∞ عوض کرد. یعنی،

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\int_{0}^{\infty} x^2e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-\alpha x^2}dx = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$$

$$\int_{0}^{\infty} x^4e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x^4e^{-\alpha x^2}dx = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}$$

همچنین از ریاضیات عمومی می‌دانیم که انتگرالده فرد برای یک بازه متقارن برابر صفر است،

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^3e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^5e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = 0$$

در اینجا انتگرال $I = \int_0^\infty xe^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x$ را بررسی می‌کنیم. اگر $x^2 = u$ در این صورت انتگرال به صورت زیر تغییر می‌کند،

$$\int_{0}^{\infty} xe^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha u}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2\alpha}\left[e^{-\alpha u}\right]_0^\infty = \frac{1}{2\alpha}$$

حالا اگر مانند حالتهای بالا از طرفین مشتق بگیرم

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\int_{0}^{\infty} xe^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\frac{1}{2\alpha}\right)$$

$$\int_{0}^{\infty} x^3e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\alpha^2}$$

به ازای مشتق مرتبه دوم

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\alpha^2}\int_{0}^{\infty} xe^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{d^2}{d\alpha^2}\left(\frac{1}{2\alpha}\right)$$

$$\int_{0}^{\infty} x^5e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha^3}$$

برای مشتق مرتبه nام

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\alpha^n}\int_{0}^{\infty} xe^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}^n\alpha}\left(\frac{1}{2\alpha}\right)$$

$$\int_{0}^{\infty} x^{2n+1}e^{-\alpha x^2}dx = \frac{n!}{2\alpha^{n+1}}$$

اینجا خیال داریم یک تابع توزیع گوسی نرمال در بازه $-\infty$ تا ∞ بسازیم. طرفین انتگرال گوسینی را به $\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ تقسیم می‌کنیم. یعنی

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^۲}\,\mathrm{d}x = ۱$$

برای توزیع گوسی $f(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}e^{-\alpha x^۲}$ مقدار انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ برابر یک است. در بیشتر مراجع مقدار α را برابر $\frac{۱}{۲\sigma^۲}$ قرار می‌دهند. σ انحراف معیار (standard deviation) نامیده می‌شود و دارای ابعادی برابر با متغییر x است.

$$f(x) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}\sigma}e^{-\frac{x^۲}{۲\sigma^۲}}$$

همچنین راس توزیع گوسی می‌تواند در نقطه‌ای مخالف صفر مانند μ باشد. یعنی

$$f(x) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^۲}{۲\sigma^۲}}$$

در ادامه مقدار متوسط x یعنی $\langle x\rangle$، مقدار متوسط $x^۲$ یعنی $\langle x^۲\rangle$ و مقدار واریانس x (variance) یعنی $\langle(x-\langle x\rangle)^۲\rangle$ را بدست می‌آوریم.

- $\langle x\rangle$

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-\mu)^۲}{۲\sigma^۲}}\,\mathrm{d}x$$

برای حل تغییر متغییر $y = x-\mu$ را اعمال می‌کنیم

$$\langle x\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}(y+\mu)e^{-\frac{y^۲}{۲\sigma^۲}}\,\mathrm{d}y = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}\sigma}\left(\int_{-\infty}^{\infty} y e^{-\frac{y^۲}{۲\sigma^۲}}\,\mathrm{d}y + \mu\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^۲}{۲\sigma^۲}}\,\mathrm{d}y\right)$$

بطوری که در انتگرالهای بالا بررسی شد، مقدار انتگرال اول، $\int_{-\infty}^{\infty} y e^{-\frac{y^۲}{۲\sigma^۲}}\,\mathrm{d}y$، برابر صفر است. پس

$$\langle x\rangle = \mu\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^۲}{۲\sigma^۲}}\,\mathrm{d}y = \mu$$

یعنی مقدار متوسط توزیع گوسی $\langle x\rangle$ در نقطه راس توزیع یعنی μ قرار دارد.

- $\langle x^۲\rangle$

$$\langle x^۲\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^۲ f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} x^۲ e^{-\frac{(x-\mu)^۲}{۲\sigma^۲}}\,\mathrm{d}x$$

برای حل تغییر متغییر $y = x-\mu$ را اعمال می‌کنیم

$$\langle x^۲\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}(y+\mu)^۲ e^{-\frac{y^۲}{۲\sigma^۲}}\,\mathrm{d}y = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}\sigma}\left(\int_{-\infty}^{\infty} y^۲ e^{-\frac{y^۲}{۲\sigma^۲}}\,\mathrm{d}y + ۲\mu\int_{-\infty}^{\infty} y e^{-\frac{y^۲}{۲\sigma^۲}}\,\mathrm{d}y + \mu^۲\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^۲}{۲\sigma^۲}}\,\mathrm{d}y\right)$$

مقدار انتگرال اول، $\int_{-\infty}^{\infty} y^۲ e^{-\frac{y^۲}{۲\sigma^۲}}\,\mathrm{d}y$، برابر $\sqrt{۲\pi}\sigma^۳$ است و مقدار انتگرال دوم، $\int_{-\infty}^{\infty} y e^{-\frac{y^۲}{۲\sigma^۲}}\,\mathrm{d}y$، برابر صفر است. پس

$$\langle x^۲\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}\sigma}\left(\int_{-\infty}^{\infty} y^۲ e^{-\frac{y^۲}{۲\sigma^۲}}\,\mathrm{d}y + \mu^۲\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^۲}{۲\sigma^۲}}\,\mathrm{d}y\right) = \sigma^۲+\mu^۲$$

- $\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$

$$\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle (x^2 - 2\langle x \rangle x + \langle x \rangle^2) \rangle = \langle x^2 \rangle - 2\langle x \rangle \langle x \rangle + \langle x \rangle^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

از آنجایی که $\mu = \langle x \rangle$ و $\langle x^2 \rangle = \sigma^2 + \mu^2$ بنابراین

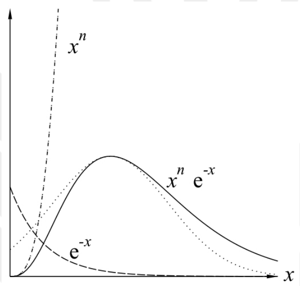
$$\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \sigma^2$$

۴.۱ فرمول استرلینگ

در این بخش با استفاده از انتگرال فاکتوریل

$$n! = \int_0^\infty x^n e^{-x}\, \mathrm{d}x$$

فرمول استرلینگ، $\ln n! \approx n \ln n - n$، را بدست می‌آوریم. تابع $x^n e^{-x}$ را در نمودار زیر بررسی می‌کنیم. حالا



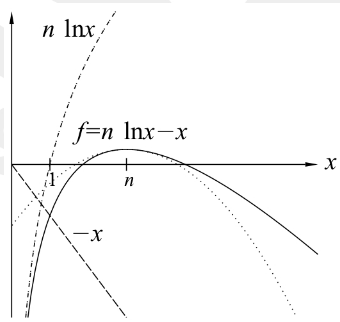
تابع $f(x)$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$e^{f(x)} = x^n e^{-x}$$

اگر از طرفین عبارت بالا لگاریتم بگیریم، داریم

$$f(x) = n \ln x - x$$

نمودار $f(x)$ در زیر داده شده است. تابع $f(x)$ در نقطه $x = n$ دارای یک اکسترمم (ماکزیمم)است. این



موضوع در نمودار مشخص است ولی در اینجا قصد داریم مقدار مشتق تابع $f(x)$ در نقطه $x = n$ تحقیق کنیم.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = \frac{n}{x} - 1$$

به ازای $x = n$ مقدار $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$ برابر صفر می‌شود. در ادامه ما رفتار تابع $f(x)$ را حول نقطه $x = n$ بررسی کنیم.

$$f(x) = f(n) + \left(\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right)_{x=n}(x-n) + \frac{۱}{۲}\left(\frac{\mathrm{d}^۲ f(x)}{\mathrm{d}x^۲}\right)_{x=n}(x-n)^۲ + \cdots$$

برای این منظور نیاز به مشتق دوم تابع در نقطه $x = n$ داریم.

$$\left(\frac{\mathrm{d}^۲ f(x)}{\mathrm{d}x^۲}\right)_{x=n} = -\frac{۱}{n}$$

اگر بسط تیلور را تا مرتبه دوم نگه داریم، یعنی

$$f(x) \approx n\ln n - n - \frac{۱}{۲n}(x-n)^۲$$

انتگرال از $e^{f(x)}$ برابر $n!$ است، یعنی

$$n! \approx \int_۰^\infty e^{f(x)}\,\mathrm{d}x = e^{n\ln n - n}\int_۰^\infty e^{-\frac{(x-n)^۲}{۲n}}\,\mathrm{d}x$$

مقدار انتگرال گوسی $\int_۰^\infty e^{-\frac{(x-n)^۲}{۲n}}\,\mathrm{d}x$ برابر $\sqrt{۲\pi n}$ است. بنابراین

$$n! \approx e^{n\ln n - n}\sqrt{۲\pi n}$$

برای بدست آوردن فرمول استرلینگ از طرفین رابطه بالا لگاریتم می‌گیریم

$$\ln n! \approx n\ln n - n + \frac{۱}{۲}\ln(۲\pi n)$$

وقتی n خیلی بزرگ باشد آنرا می‌توان بصورت زیر نوشت

$$\ln n! \approx n\ln n - n$$