فصل ۱

احتمال

زندگی پر از عدم اطمینان است، که باید (با استفاده از اطلاعات موجود) بر اساس بهترین حدس‌هایمان قرار داده شود. این به این دلیل است که زنجیره ای از حوادثی که منجر به نتایج مختلف می شود، می تواند بسیار پیچیده باشد بطوریکه نتیجه دقیق آن غیر قابل پیش بینی است. با این حال، هنوز هم می توان چیزهایی در جهان غیرمنتظره گفت. برای مثال، مفید است بدانید که فردا ۲۰ درصد احتمال بارش باران وجود دارد، چون پیش بینی دقیق آب و هوا مطلقا وجود ندارد. بنابراین احتمال یک موضوع، فوق العاده مفید و قدرتمند است. چون می توان آن را برای اندازه گیری عدم قطعیت مورد استفاده قرار داد.

احتمال تاثیر بزرگی بر فیزیک حرارتی داشته است. این به این دلیل است که ما اغلب علاقه‌مند به سیستم هایی هستیم که شامل تعداد زیادی از ذرات هستند، به طوری که پیش بینی ها بر اساس احتمال در چنین سیستم‌هایی به اندازه کافی دقیق انجام می شود. در هر مسئله فیزیک حرارات، اغلب علاقه‌مند به مقادیری از کمیتها هستیم که جمع تمام سهم‌های کوچک از اتمهای ایزوله لحاظ شود. اگرچه هر اتم رفتار متفاوتي دارد، اما آنچه اتفاق مي افتد رفتار متوسطي اتمها می‌باشد. از این رو ضروري است که بتوانیم مقادیر متوسط را از توزیع هاي احتمالات استخراج کنیم. در این بخش ما می‌خواهیم تعدادی از مفاهیم پایه‌ی تئوری احتمال را تعریف کنیم. ما بررسی خود را با دو نوع مختلف توزیع احتمالی: گسسته و پیوسته شروع می‌کنیم.

۱.۱ توزیع احتمالاتی گسسته

متغیرهای تصادفی گسسته تنها تعداد محدودی از مقادیر را می توانند انتخاب کنند. اگر x یک متغیر تصادفی گسسته باشد که مقدار x_i را با احتمال P_i می گیرد. ما نیاز داریم که مجموع احتمالات هر نتیجه ممکن برابر با یک شود. یعنی

$$\sum_i P_i = ۱$$

مقدار متوسط x را بصورت

$$\langle x \rangle = \sum_i x_i P_i$$

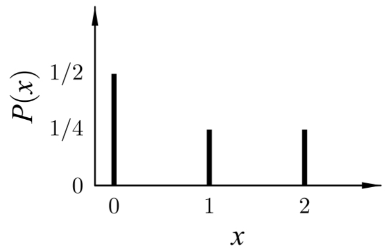
تعریف می‌کنیم. با همین روش می‌توان متوسط مربع مقدار x را بصورت

$$\langle x^۲ \rangle = \sum_i x_i^۲ P_i$$

تعریف کرد در حقیقت مقدار متوسط هر تابعی از x بصورت

$$\langle f(x)\rangle = \sum_i f(x_i)P_i$$

تعریف می‌شود.
مثال۱: اگر مقادیر ۰، ۱ و ۲ بترتیب با احتمالهای $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۴}$ و $\frac{۱}{۴}$ داده شود متوسط x و متوسط $x^۲$ را محاسبه کنید.
شکل زیر توزیع احتمال مقادیر ۰، ۱ و ۲ را نشان می‌دهد.



با استفاده از تعاریف بالا مقدار متوسط x برابر است با

$$\langle x\rangle = \sum_i x_i P_i = ۰ \times \frac{۱}{۲} + ۱ \times \frac{۱}{۴} + ۲ \times \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴}\cdot$$

و همچنین مقدار متوسط $x^۲$ برابر است با

$$\langle x^۲\rangle = \sum_i x_i^۲ P_i = ۰^۲ \times \frac{۱}{۲} + ۱^۲ \times \frac{۱}{۴} + ۲^۲ \times \frac{۱}{۴} = \frac{۵}{۴}\cdot$$

۲.۱ توزیع احتمالاتی پیوسته

اگر x یک متغییر تصادفی پیوسته باشد، احتمالی برابر با $P(x)dx$ بین مقادیر x و $x+dx$ دارد. متغیرهای تصادفی پیوسته می توانند طیف وسیعی از مقادیر ممکن را داشته باشند. مانند حالت گسسته ما نیاز داریم که مجموع تمام احتمالات برای با یک باشد. از آنجایی که ما با توزیع‌های پیوسته سروکار داریم، جمع رو توزیع‌ها تبدیل به انتگرال می‌شود، یعنی

$$\int P(x)dx = ۱$$

و متوسط بصورت زیر تعریف می‌شود،

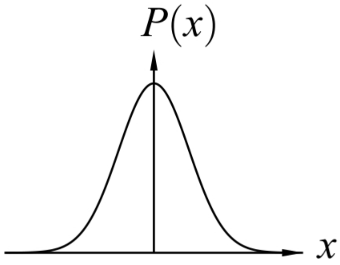
$$\langle x\rangle = \int xP(x)dx\cdot$$

بطور مشابه، متوسط مقدار مربع بصورت زیر تعریف می‌شود،

$$\langle x^۲\rangle = \int x^۲ P(x)dx,$$

و متوسط هر تابع از x مانند $f(x)$ را می‌توان بصورت زیر تعریف کرد،

$$\langle f(x)\rangle = \int f(x)P(x)dx\cdot$$



مثال۲: اگر $P(x) = Ce^{-x^2/2a^2}$ یک تابع توزیع پیوسته باشد که C و a ثابت‌اند. شکل تابع گوسی احتمال در زیر داده شده است. مقادیر $\langle x\rangle$ و $\langle x^2\rangle$ را از روی تابع توزیع داده شده محاسبه کنید. در قدم اول نرمال بودن تابع توزیع را بررسی می‌کنیم که منجر به مشخص شدن ثابت C برحسب دیگر ثوابت مسئله می‌شود.

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} Ce^{-x^2/2a^2}dx = C\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2a^2}dx = C\sqrt{2\pi a^2}$$

در اینجا می‌توان C را بصورت

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}}$$

پیدا کرد. بدین ترتیب تابع توزیع نرمال بصورت

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}}e^{-x^2/2a^2}$$

است. مقدار متوسط x و متوسط مجذور x را برای تابع توزیع نرمال بالا بدست می‌آوریم

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} xP(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2/2a^2}dx = 0$$

و

$$\langle x^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2P(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-x^2/2a^2}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}}\frac{1}{2}\sqrt{8\pi a^6} = a^2.$$

۱.۳ تبدیلات خطی

اگر y یک متغییر رندم باشد که تابع خطی از متغییر رندم x بصورت

$$y = ax + b$$

باشد که a و b ثابت هستند. مقدار متوسط y برابر

$$\langle y\rangle = \langle ax+b\rangle = a\langle x\rangle + b$$

مثال: دما بر حسب سلسیوس و فارینهایت بوسیله فرمول ساده $C = \frac{5}{9}(F-32)$ بهم مربوط می‌شوند. که C مقدار دما در سلسیوس و F مقدا دما در فارینهایت را نشان می‌دهد. بنابراین متوسط دمایی یک دمای خاص بصورت $\langle C\rangle = \frac{5}{9}(\langle F\rangle - 32)$ داده می‌شود

۴.۱ واریانس

ما حالا می‌دانیم چگونه متوسط یک مجموعه‌ای از مقادیر را محاسبه کنیم، اما در مورد گستردگی مقادیر چه اتفاقی می‌افتد؟ اولین ایده از گسترگی مقادیر در یک توزیع ممکن است بررسی انحراف از یک مقدار متوسط باشد، یعنی

$$x - \langle x \rangle$$

کمیت بالا به ما می‌گوید که چه مقدار یک متعییر بالا و پایین مقدار متوسط متغییر است. با متوسط گیری از انحراف داریم،

$$\langle x - \langle x \rangle \rangle = \langle x \rangle - \langle x \rangle = 0$$

رابطه بالا به ما نشان می‌دهد که متوسط انحراف شاخص مفیدی نیست. مشکل در این هست که رابطه انحراف بعضی مواقع مثبت و بعضی واقع منفی است، بطوریکه مثبت و منفی در متوسط گیری بالا اثر یکدیگر را خنثی می‌کنند. یک کمیت مفیدتر قدرمطلق انحراف است،

$$|\ x - \langle x \rangle\ |$$

که همواره مثبت است. اما استفاده از قدرمطلق در جبر می‌تواند خسته کننده و ملال‌آور باشد. بنابراین دیدگاه دیگر استفاده از کمیت مربع انحراف، $(x - \langle x \rangle)^2$، می‌باشد که همواره کمیت مثبت است.این کمیت آنچه ما نیاز داریم هست:همیشه مثبت و بطور جبری آسان برای کار کردن است. متوسط آن واریانس نامیده می‌شود. بعنوان یک نتیجه واریانس x بصورت متوسط مربع انحراف

$$\sigma_x^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$$

تعریف می‌شود. ما بعدا کمیت دیگر به نام انحراف معیار نیز تعریف خواهیم کرد که جذر واریانس است،

$$\sigma_x = \sqrt{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle}.$$

اتحاد ذیل فوق‌العاده مفید است،

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle &= \langle (x^2 - 2x\langle x \rangle + \langle x \rangle^2) \rangle \\ &= \langle x^2 \rangle - 2\langle x \rangle \langle x \rangle + \langle x \rangle^2 \\ &= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \end{aligned}$$

مثال ۳: واریانس را در مثالهای ۱ و ۲ محاسبه کنید.
درمثال ۱ به ازاء مقادیر $\langle x \rangle = 3/4$ و $\langle x^2 \rangle = 5/4$ مقدار واریانس برابر است با

$$\sigma_x^2 = \frac{11}{16}$$

درمثال ۲ به ازاء مقادیر $\langle x \rangle = 0$ و $\langle x^2 \rangle = a^2$ مقدار واریانس برابر است با

$$\sigma_x^2 = a^2$$

۵.۱ تبدیلات خطی و واریانس

اگر متغییر رندم y تابع خطی از متغییر رندم x بصورت

$$y = ax + b$$

باشد که a و b ثابت هستند. مقدار متوسط y برابر

$$\langle y\rangle = \langle ax+b\rangle = a\langle x\rangle + b$$

است و مقدار متوسط y^2 برابر

$$\langle y^2\rangle = \langle (ax+b)^2\rangle = a^2\langle x^2\rangle + 2ab\langle x\rangle + b^2$$

است. واریانس y بصورت زیر داده می‌شود،

$$\begin{aligned}\sigma_y^2 &= \langle y^2\rangle - \langle y\rangle^2\\ &= a^2\langle x^2\rangle + 2ab\langle x\rangle + b^2 - (a\langle x\rangle + b)^2\\ &= a^2\langle x^2\rangle + 2ab\langle x\rangle + b^2 - (a^2\langle x\rangle^2 + 2ab\langle x\rangle + b^2)\\ &= a^2(\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2) = a^2\sigma_x^2\cdot\end{aligned}$$

۶.۱ متغییرهای مستقل

اگر u و v متغییرهای تصادفی مستقل باشند. احتمال اینکه u در محدوده‌ی u و $u+du$ و همچنین احتمال اینکه v در محدوده‌ی v و $v+dv$ باشد بوسیله حاصلضرب زیر داده می‌شود،

$$P_u(u)duP_v(v)dv\cdot$$

مقدار متوسط حاصلضرب uv بصورت زیر داده می‌شود،

$$\begin{aligned}\langle uv\rangle &= \int\int uvP_u(u)P_v(v)dudv\\ &= \left(\int uP_u(u)du\right)\left(\int vP_v(v)dv\right) = \langle u\rangle\langle v\rangle\cdot\end{aligned}$$

مثال ۴: فرض کنید n متغییر تصادفی مستقل، X_i، با مقدار متوسط $\langle X\rangle$ و واریانس σ_X^2 یکسان وجود دارد. اگر Y جمع تمامی متغییرها باشد یعنی $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ باشد. مقدار متوسط و واریانس Y را بدست آورید.

مقدار متوسط Y برابر است با

$$\langle Y\rangle = \langle X_1\rangle + \langle X_2\rangle + \cdots + \langle X_n\rangle$$

و از آنجاییکه $\langle X_1\rangle = \langle X_2\rangle = \cdots = \langle X_n\rangle = \langle X\rangle$ بنابراین

$$\langle Y\rangle = n\langle X\rangle\cdot$$

مقدار واریانس Y برابر است با

$$\sigma_Y^2 = \langle Y^2\rangle - \langle Y\rangle^2 = \langle (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)^2\rangle - n^2\langle X\rangle^2$$

می‌توان با توجه با مستقل بودمتغییرها می‌توان متوسط Y^2 را بصورت ذیل استخراج کرد، یعنی

$$\langle Y^2\rangle = n\langle X^2\rangle + n(n-1)\langle X\rangle^2,$$

بنابراین

$$\sigma_Y^2 = n\sigma_X^2\cdot$$

نتایج تحقیق شده در مثال بالا کاربردهای جذاب زیادی دارد:

اولین مورد مربوط به اندازه گیری های تجربی است. تصور کنید که کمیت X به اندازه n بار اندازه‌گیر می شود و هر بار یک خطای مستقل دارد که σ_X نامیده می‌شود. اگر نتایج اندازه‌گیری را به $Y = \sum_i X_i$ اضافه کنید، خطای rms مربوط به Y فقط $\sqrt{n}$ برابر خطای rms یک X مستقل است. از این رو اگر سعی کنیم و تخمین خوبی از X با محاسبه $Y = (\sum_i X_i)/n$ بزنیم، خطا در این کمیت برابر $\sigma_X/\sqrt{n}$ است. برای مثال اگر چهار اندازه‌گیری از کمیتی انجام دهید و از نتایج تان متوسطگیری کنید، خطاهای تصادفی در متوسط تان نصف آنچه خواهد بود که فقط یک اندازه‌گیری تنها داشته باشید. البته هنوز ممکن است خطاهای سیستماتیک در آزمایش داشته باشید. اگر بطور سیستماتیک در دستگاه و تنظیمات آزمایشی خطا داشته باشیم، این خطاها با اندازه‌گیرهای مکرر کاهش نمی‌یابد.

کاربرد دوم در تئوری قدم‌های تصادفی (random walks) است. تصور کنید شخص مستی تلاش می‌کند در یک خیابان باریک حرکت کند. فرد مست با احتمالهای یکسانی به طرف جلو و عقب قدم بر می دارد. بخاطر شرایط فرد هر قدم مستقل از قدمهای قبلی است. بنابراین مسافت جابجایی شده در یک تک گام برابر $\langle X\rangle = ۰$. بعد از n قدم، مسافت جابجا شده برابر $\langle Y\rangle = \sum_i\langle X_i\rangle = ۰$. در این حالت $\langle Y^۲\rangle = n\langle X^۲\rangle$، بطوریکه طول rms یک random walks با n قدم، $\sqrt{n}$ برابر طول یک قدم است.

۷.۱ توزیع دوتایی

یک توزیع احتمالی مهم در فیزیک حرارت که بر اساس آزمایشی با دو نتیجه ممکن قرار داده می‌شود. یک نتیجه با احتمال p اتفاق می‌افتد و نتیجه دیگر با احتمال $q = ۱ - p$ اتفاق می‌افتد. یک مثال از چنین توزیعی پرتاب یک سکه است. یک نتیجه "خط" و دیگری "شیر" است.

نظریه دوتایی جبر مقدماتی بیان می‌کند که

$$(x+y)^n = \sum_{k=۰}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

با نوشتن $x = p$ و $y = q = ۱ - p$ داریم

$$۱ = (p + ۱ - p)^n = \sum_{k=۰}^{n} \binom{n}{k} p^k (۱-p)^{n-k}$$

که

$$P(n,k) = \binom{n}{k} p^k (۱-p)^{n-k}$$

تابع توزیع دوتایی (Binomial) نامیده می‌شود که نرمال می‌باشد

$$۱ = \sum_{k=۰}^{n} P(n,k) = \sum_{k=۰}^{n} \binom{n}{k} p^k (۱-p)^{n-k}.$$

در ادامه مقدار $\langle k\rangle$ و $\sigma_k^۲$ را از توزیع بالا بدست می‌آوریم،

$$\langle k\rangle = \sum_{k=۰}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

در اینجا از اتحاد زیر استفاده می‌کنیم

$$p\frac{d}{dp}p^k = kp^k$$

بنابراین

$$\langle k\rangle = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p\frac{d}{dp}p^k q^{n-k} = p\frac{d}{dp}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = p\frac{d}{dp}(p+q)^n = pn(p+q)^{n-1}$$

از آنجاییکه $p+q=1$ است، داریم

$$\langle k\rangle = np.$$

برای بدست آوردن واریانس ابتدا مقدار $\langle k^2\rangle$ را بدست می‌آوریم. برای ادامه اتحاد زیر را بکار خواهیم برد،

$$p\frac{d}{dp}\left(p\frac{d}{dp}p^k\right) = k^2 p^k$$

حالا داریم

$$\langle k^2\rangle = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p\frac{d}{dp}\left(p\frac{d}{dp}p^k\right) q^{n-k} = p\frac{d}{dp}\left(p\frac{d}{dp}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}\right)$$

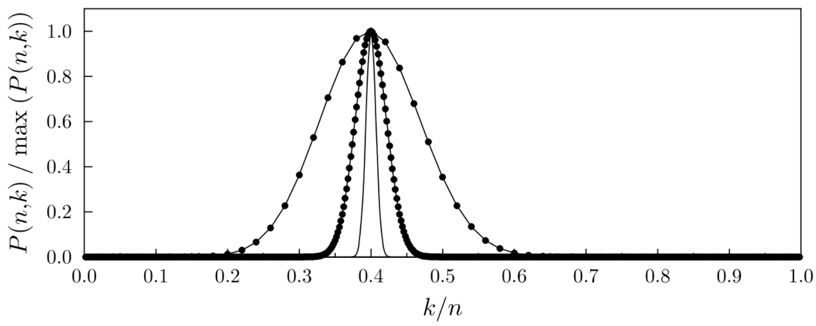
پس

$$\langle k^2\rangle = p\frac{d}{dp}\left(p\frac{d}{dp}(p+q)^n\right) = np + n(n-1)p^2.$$

بدین ترتیب واریانس توزیع دوتایی برابر است با

$$\sigma_k^2 = \langle k^2\rangle - \langle k\rangle^2 = np(1-p) = npq.$$

پهنای تقریبی توزیع از تقسیم انحراف معیار بر متوسط بدست می‌آید که بصورت $\sigma_k/\langle k\rangle = \sqrt{(1-p)/np}$ داده می‌شود. که متناسب با $1/\sqrt{n}$ است و با افزایش n مقدار پهنای تقریبی کاهش می‌یابد. این باعث می‌شود که مقدار توزیع دوتایی در نزدیکی مقدار متوسط بصورت شکل افزایش یابد.



تمام توزیع‌های دوتایی به ازاء $p=\frac{1}{2}$ است. در نمودار بیرونی $n=50$، در نمودار میانی $n=500$ و در نمودار داخلی $n=5000$ است. نمودار توصیف می‌کند که با افزایش n مقدار تقریبی پهنا افزایش می‌یابد.

مثال ۵: یک random walk یک بعدی را در نظر بگیرید که می‌تواند هر دو گام بطرف جلو $+L$ و بطرف عقب $-L$ را انتخاب کند که هر یک احتمالی برابر با $\frac{1}{2}$ دارد. برای n قدم که kتای آن بطرف جلو است. مسافت طی شده بوسیله رابطه $x = kL-(n-k)L = (2k-n)L$ داده می‌شود. متوسط مسافت طی شده، $\langle x\rangle$، و انحراف معیار مسافت طی شده، σ_x، را بدست آورید.

$$\langle x\rangle = (2\langle k\rangle - n)L = \left(2\frac{1}{2}n - n\right)L = 0$$

همچنین

$$\langle x^{۲}\rangle = (۴\langle k^{۲}\rangle - ۴n\langle k\rangle + n^{۲})L^{۲} = nL^{۲}$$

بنابراین

$$\sigma_x = \sqrt{\langle x^{۲}\rangle - \langle x\rangle^{۲}} = \sqrt{n}L.$$