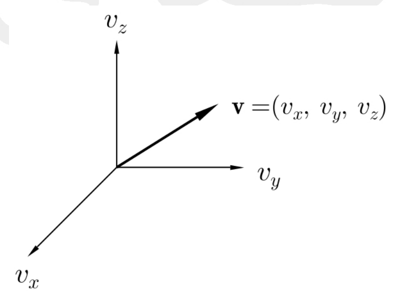
فصل ۱

تابع توزیع بولتزمن

در این فصل قصد داریم تابع توزیع بولتزمن (فصل قبل) را به مسئله حرکت مولکولها در یک گاز اعمال کنیم. در اینجا ما از حرکتهای ارتعاشی و دورانی مولکولها صرفه‌نظر کرده و بررسی خود را به حرکت انتقالی مولکولها محدود کرده‌ایم. در این حالت انرژی هر مولکول بطور کلاسیکی با رابطه انرژی جنبشی زیر داده می‌شود،

$$\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

که $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ بردار سرعت مولکول و $|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ اندازه سرعت مولکولی در سه بعد است. سرعت مولکولی را می‌توان در فضای سرعت بصورت زیر نشان داد.



هدف بدست آوردن توزیع سرعتهای مولکولی است که در دو فصل بعدی به آن خواهیم پرداخت. برای این منظور، اینجا دو فرض زیر را نظر خواهیم گرفت: اول، ابعاد مولکولی خیلی از فاصله‌ی بین مولکولی کمتر است بطوریکه مولکولها اغلب وقت خود را صرف دورخوردن در اطراف خود می کنند و به ندرت به یکدیگر متصل می شوند. دوم، از تمامی نیروهای بین مولکولی صرفه‌نظر خواهیم کرد و مولکولها فقط بواسطه برخورد بایکدیگر مبادله انرژی می‌کنند درحالی که سیستم در تعادل باقی می‌ماند. بنابراین هر مولکول مثل یک سیستم کوچک به یک منبع گرمایی در دمای، T، متصل می‌شود که اینجا منبع گرمایی **تمامی مولکولهای دیگر در گاز** است. از این رو توزیع بولتزمن انرژیها (بررسی شده در فصل قبل) گرفته خواهد شد.

۱.۱ تابع توزیع سرعت

برای بررسی توزیع سرعت مولکولها در یک گاز، ابتدا یک جهت مشخص (مانند x) را انتخاب و بررسی می‌کنیم که چه تعداد مولکول، مولفه‌ی سرعتی در آن امتداد دارند. سپس **تابع توزیع سرعت** را بصورت کسری از مولکولها که سرعتی بین v_x و $v_x + \mathrm{d}v_x$ دارند را بصورت $g(v_x)\,\mathrm{d}v_x$ تعریف می‌کنیم. تابع توزیع سرعت متناسب با یک فاکتور بولتزمن، یعنی e به توان انرژی مربوطه، در این حالت $\frac{1}{2}mv_x^2$، تقسیم بر k_BT است، یعنی

$$g(v_x) \propto e^{-mv_x^2/k_BT}.$$

برای نرمال کردن نیاز به بررسی انتگرال

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-mv_x^2/2k_BT}\,\mathrm{d}v_x = \sqrt{\frac{2\pi k_BT}{m}}$$

است. بنابراین

$$g(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_BT}}e^{-mv_x^2/k_BT}.$$

مقادیر چشمداشتی ممکن از تابع توزیع بالا بصورت زیر داده می‌شود

$$\begin{aligned}
\langle v_x\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} v_x g(v_x)\,\mathrm{d}v_x = 0,\\
\langle |v_x|\rangle &= 2\int_{0}^{\infty} v_x g(v_x)\,\mathrm{d}v_x = \sqrt{\frac{2k_BT}{m\pi}},\\
\langle v_x^2\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 g(v_x)\,\mathrm{d}v_x = \frac{k_BT}{m}\cdot
\end{aligned}$$

به همین ترتیب می‌توان نتایج مشابه برای v_y و v_z بدست آورد. بنابراین تابع توزیع سرعت بصورت کسری از مولکولها با سرعتی بین (v_x, v_y, v_z) و $(v_x + \mathrm{d}v_x, v_y + \mathrm{d}v_y, v_z + \mathrm{d}v_z)$ بصورت

$$\begin{aligned}
&g(v_x)\,\mathrm{d}v_x g(v_y)\,\mathrm{d}v_y g(v_z)\,\mathrm{d}v_z\\
&\qquad\propto e^{-mv_x^2/2k_BT}\,\mathrm{d}v_x e^{-mv_y^2/2k_BT}\,\mathrm{d}v_y e^{-mv_z^2/2k_BT}\,\mathrm{d}v_z\\
&\qquad\propto e^{-m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)/2k_BT}\,\mathrm{d}v_x\,\mathrm{d}v_y\,\mathrm{d}v_z\\
&\qquad\propto e^{-mv^2/2k_BT}\,\mathrm{d}v_x\,\mathrm{d}v_y\,\mathrm{d}v_z
\end{aligned}$$

داده می‌شود.

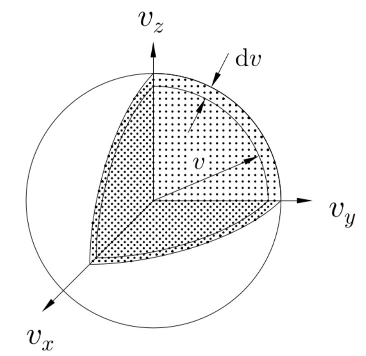
۲.۱ تابع توزیع کروی سرعت

مطابق شکل زیر، کسری از مولکولهای در حال حرکت با سرعتی بین $v = |v|$ و $v + \mathrm{d}v$ متناظر با یک پوسته کروی در فضای سرعت به شعاع v و ضخامت $\mathrm{d}v$ است. حجم پوسته (یعنی حجم سرعتهای بین v و $v + \mathrm{d}v$) برابر است با

$$4\pi v^2\,\mathrm{d}v$$

بنابراین کسری از مولکولها با سرعتی بین v و $v + \mathrm{d}v$ را می‌توان بصورت $f(v)\,\mathrm{d}v$ تعریف کرد که $f(v)$ بصورت

$$f(v)\,\mathrm{d}v \propto v^2\,\mathrm{d}v\,e^{-mv^2/2k_BT},$$



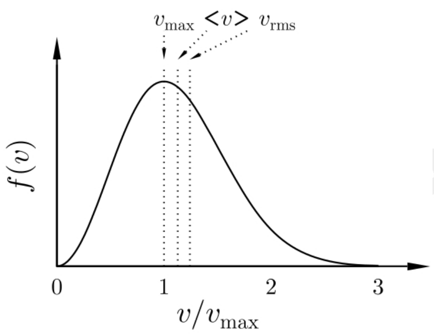
داده می‌شود. که فاکتور ۴π در عبارت بالا جذب شده است. برای نرمال کردن باید انتگرال

$$\int_۰^\infty v^۲\, e^{-mv^۲/۲k_BT}\,\mathrm{d}v = \frac{۱}{۴}\sqrt{\frac{\pi}{(m/۲k_BT)^۳}},$$

را ارزیابی کنیم. پس

$$f(v) = \frac{۴}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{۲k_BT}\right)^{۳/۲} v^۲\, e^{-mv^۲/۲k_BT}$$

این تابع توزیع سرعت بصورت تابع توزیع سرعت ماکسول_ بولتزمن یا بطور ساده‌تر توزیع ماکسولی شناخته می‌شود که نمودار آن در شکل زیر داده شده است.



۱.۳ میانگین سرعت ($\langle v\rangle$) و میانگین سرعت به توان دو ($\langle v^۲\rangle$)

برای بدست آوردن مقادیر چشمداشتی توزیع ماکسول_ بولتزمن انتگرالهای زیر را بررسی می‌کنیم

$$\langle v\rangle = \int_۰^\infty v f(v)\,\mathrm{d}v = \sqrt{\frac{۸k_BT}{\pi m}},$$
$$\langle v^۲\rangle = \int_۰^\infty v^۲ f(v)\,\mathrm{d}v = \frac{۳k_BT}{m}.$$

یاداشت ۱: می‌توانیم نشان دهیم که رابطه

$$\langle v_x^۲\rangle + \langle v_y^۲\rangle + \langle v_z^۲\rangle = \langle v^۲\rangle$$

برقرار است. برای این منظور از بالا داریم

$$\langle v_x^2\rangle = \frac{k_BT}{m},$$

که می‌تواند بطور مشابه برای سایر جهتهای y و z نیز رابطه مشابهی مانند عبارت بالا بصورت

$$\langle v_y^2\rangle = \langle v_z^2\rangle = \frac{k_BT}{m}$$

بدست آورد چون تابع توزیع آنها بصورت زیر می‌باشد،

$$g(v_y) = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_BT}}e^{-mv_y^2/k_BT},$$
$$g(v_z) = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_BT}}e^{-mv_z^2/k_BT}.$$

بنابراین

$$\langle v_x^2\rangle + \langle v_y^2\rangle + \langle v_z^2\rangle = \frac{3k_BT}{m} = \langle v^2\rangle.$$

یاداشت ۲: جذر میانگین مربعی سرعت یک مولکول بصورت زیر

$$v_{rms} = \sqrt{\langle v^2\rangle} = \sqrt{\frac{3k_BT}{m}}$$

تعریف می‌شود که متناسب با $m^{-1/2}$ است.

۴.۱ متوسط انرژی جنبشی

متوسط انرژی جنبشی برابر است با

$$\langle T\rangle = \langle E_K\rangle = \frac{1}{2}m\langle v^2\rangle = \frac{3}{2}k_BT.$$

این نتیجه توصیف می‌کند که متوسط انرژی یک مولکول در یک گاز فقط به دما بستگی دارد.

۵.۱ ماکزیمم $f(v)$

مقدار ماکزیمم $f(v)$ بوسیله محاسبه رابطه زیر بدست می‌آید، یعنی

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}}f(v) = 0 \Rightarrow (2v - v^2\frac{mv}{k_BT})e^{mv^2/2k_BT} = 0 \Rightarrow v_{max} = \sqrt{\frac{2BT}{m}}$$

از آنجایی که

$$\sqrt{2} < \sqrt{\frac{8}{\pi}} < \sqrt{3},$$

داریم

$$v_{max} < \langle v\rangle < v_{rms}$$

که در نمودار تابع توزیع ماکسول_ بولتزمن هر سه سرعت نشان داده شده است.