# فصل ۱

# ماشین‌های گرمایی و قانون دوم ترمودینامیک

در این فصل قصد داریم مکانیزمی که در آن کار در یک ماشین گرمایی از دومنبع دمایی مختلف تولید می‌شود را بررسی کنیم. این موضوع توسط فیزیکدانهای قرن نوزده (کارنو، کلاسیوس، و کلوین) توسعه داده شده است. در این فصل دو بیان مختلف از قانون دوم ترمودینامیک و چگونگی اثر آنها روی بازده ماشین گرمایی بحث می‌شود.

## ۱.۱ قانون دوم ترمودینامیک

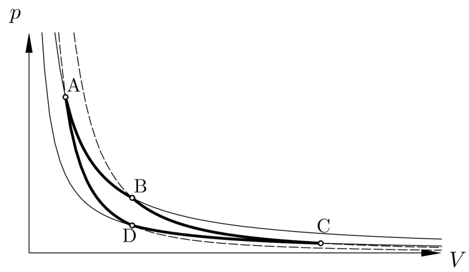
قانون دوم ترمودینامیک بر اساس جهت شارش گرما در یک سیستم برای رسیدن به تعادل فرمول‌بندی شده است. همانطور که قبلا بررسی کردیم، گرما همیشه از جسم گرم به یک جسم سرد شارش می‌کند. معکوس فرایند یاد شده (یعنی شارش گرم از جسم سرد به جسم گرم) هرگز در یک سیستم اتفاق نمی‌افتد. بر اساس این استدلال، کلاسیوس قانون دوم ترمودینامیک را بصورت زیر بیان کرد،

**فرایندی وجود ندارد که تنها اثر آن انتقال گرما از یک جسم سرد به یک جسم گرم باشد.**

تبدیل کار به گرما خیلی آسان هستش. برای مثال یک آجر به جرم $m$ را تا بالای ساختمانی به ارتفاع $h$ بالا می‌بریم (کار انجام شده روی آجر برابر $mgh$ است) سپس آنرا رها می‌کنیم تا با سطح زمین برخورد کند. وقتی آجر به سطح زمین برخورد می‌کند، همه کاری که برای بالا بردن آجر انجام داده‌اید، بصورت گرما (و البته مقدار کمی بصورت انرژی صوتی) از بین می‌رود. با این وجود، تبدیل گرما به کار خیلی سخت است. در حقیقت تبدیل کامل گرما به کار غیر ممکن است. این موضوع توسط کلوین برای بیان قانون دوم ترمودینامیک به صورت زیر بیان می‌شود،

**فرایندی وجود ندارد که تنها اثر آن استخراج گرما از یک منبع و تبدیل کامل آن به کار باشد.**

کلمه "تنها" در هر دو بیان قانون دوم ترمودینامیک به امکان‌پذیر بودن فرایند بدون اثرهای دیگر اشاره می‌کند. بطور بدیهی بنظر نمی‌رسد که دو بیان کلاسیوس و کلوین از قانون دوم ترمودینامیک با هم ارتباط داشته باشند. اما قصد داریم هم ارزی این دو بیان از قانون دوم ترمودینامیک را در ادامه بررسی کنیم.




## ۲.۱ ماشین کارنو

بیان کلوین از قانون دوم ترمودینامیک اشاره می‌کند که نمی‌توان بطور کامل گرما را به کار تبدیل کرد. اما این بیان با تبدیل قسمتی (یا مقداری) از کار به گرما را منع نمی‌کند. حالا یک سوال مطرح می‌شود که چگونه می‌توان یک تبدیل خوب از گرما به کار داشت؟ برای پاسخ به این سوال مفهوم **ماشین** را معرفی می‌کنیم.

ماشین را بصورت یک سیستم با فرایند چرخه‌ای بین دو منبع گرمایی با دماهای متفاوت تعریف می‌کنیم که گرما را به کار تبدیل می‌کند. ماشین باید چرخه‌ای باشد که بتواند بطور پیوسته عمل کند. چنین سیستمی **ماشین کارنو** نامیده می‌شود که روی یک چرخه‌ای به نام **چرخه کارنو** قرار داده می‌شود. چرخه کارنو از دو فرایند برگشت پذیر بی‌دررو و دو فرایند برگشت پذیر هم دما تشکیل شده است. بصورتی که در نمودار $p-V$ نشان داده شده است، دو منحنی بی‌دررو (با خطوط بریده بریده) دو منحنی هم دما (با خطوط پیوسته) را قطع کرده‌اند. چرخه کارنو از دو فرایند برگشت‌پذیر بی‌دررو BC و DA و دو فرایند برگشت‌پذیر هم دما AB و CD تشکیل شده است. مساحت ناحیه محصور بین منحنی ها برابر است با کل کار انجام شده توسط سیستم (یا ماشین) است. چرخه کارنو بطور ساعت گرد ($A\to B\to C\to D\to A$) عمل می‌کند.

چرخه کارنو بین دو منبع گرمایی یکی در دمای بالا ($T_H$) و دیگری در دمای پایین ($T_C$) کار می‌کند. ورود و خروج گرما فقط در طی فرایندهای هم دما صورت می‌پذیرد (چون هیچ گرمایی نمی‌تواند در طی فرایندهای بی‌دررو جذب یا دفع شود). گرمای $Q_H$ در طی فرایند $A\to B$ وارد سیستم می‌شود و گرمای $Q_C$ در طی فرایند $C\to D$ از سیستم خارج می‌شود.

چون فرایند چرخه‌ای است، تغییر انرژی داخلی حول چرخه صفر است،

$$\Delta U = ۰ \quad \text{یا} \quad dU = ۰$$

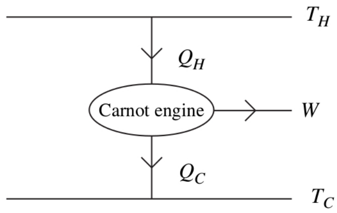
بنابراین طبق قانون اول ترمودینامیک، تغییرات گرما بصورت زیر داده می‌شود،

$$đQ = -đW \Rightarrow \int_{Q_H}^{Q_C} đQ = -\int đW \Rightarrow Q_H - Q_C = W$$

در اینجا $Q_H - Q_C$ گرمای جذب شده توسط سیستم است و $W$ کل کار انجام شده توسط ماشین (یا سیستم) است. ماشین کارنو بطور شماتیک در شکل پایین نشان داده شده است ($T_H > T_C$).

در اینجا مفهوم بازده را برای بررسی عملکرد ماشینها ارائه می‌کنیم. بطور کلی بازده نرخ ”آن چیزی است که می‌خواهید بدست آورید“ به ”آن چیزی که باید انجام دهید تا نتیجه مورد نظر حاصل شود“. در ماشین کارنو ”آن چیزی که می‌خواهیم بدست آوریم“ کار $W$ است و ”آن چیزی که باید انجام دهیم“ گرمای $Q_H$ است که از منبع دمای $T_H$ دریافت می‌کنیم. بنابراین بازده ماشین کارنو نرخ کار خروجی به گرمای ورودی تعریف می‌شود، یعنی

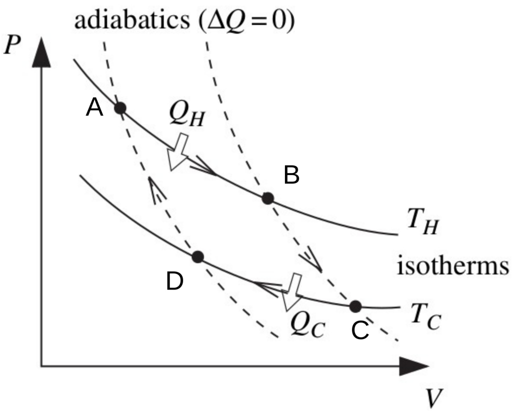
$$\eta_{\text{کارنو}} = \frac{W}{Q_H} \Rightarrow \eta_{\text{کارنو}} = \frac{Q_H - Q_C}{Q_H} \Rightarrow \eta_{\text{کارنو}} = ۱ - \frac{Q_C}{Q_H}.$$




لازم با اشاره است که کار خروجی نمی‌تواند از گرمای ورودی بزرگتر باشد ($W < Q_H$). بنابراین بازده باید مقدار کوچکتری از یک داشته باشد ($\eta < ۱$) یا زیر ۱۰۰ درصد باشد.

مثال ۱: برای یک گاز ایده‌آل که در یک چرخه کارنو قرار دارد، مقدار نسبت $\frac{Q_H}{Q_C}$ را برحسب $T_H$ و $T_C$ بدست آورید و بازه ماشین کارنو را محاسبه کنید.

نمودار $p - V$ یک گاز ایده‌آل در شکل زیر داده شده است.




منحنی‌های با خطوط پیوسته مربوط به فرایندهای هم دما هستند در حالی که $T_H > T_C$ است. سیستم در طی فرایند $A \to B$ گرما $Q_H$ را از منبع $T_H$ دریافت می‌کند و در طی فرایند $C \to D$ گرمای $Q_C$ را در تماس با منبع $T_C$ دفع می‌کند. مقدار $Q_H$ و $Q_C$ را از فصل قبل می‌توان بصورت زیر نوشت،

$$A \to B: \qquad Q_H = Nk_B T_H \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) \tag{۱.۱}$$

$$C \to D: \qquad Q_C = Nk_B T_C \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) \tag{۲.۱}$$

منحنی‌های با خطوط بریده بریده مربوط به فرایندهای بی‌دررو هستند. سیستم در طی فرایند $B \to C$ انبساط بی‌دررو بین دو منبع $T_H$ و $T_C$ انجام می‌دهد و در طی فرایند $D \to A$ یک انقباض بی‌دررو بین دو منبع $T_H$ و $T_C$ انجام می‌دهد. چون منحنی‌های بی‌دررو بین دو منحنی هم دما قرار دارند از حاصلضرب $TV^{\gamma-۱}$ برای هر منحنی بی‌دررو استفاده می‌کنیم، می‌توان برای هر دو مسیر بی‌دررو روابط زیر را نوشت،

$$B \to C: \qquad T_B V_B^{\gamma-۱} = T_C V_C^{\gamma-۱} \quad \text{یا} \quad T_H V_B^{\gamma-۱} = T_C V_C^{\gamma-۱} \tag{۳.۱}$$

$$D \to A: \qquad T_D V_D^{\gamma-۱} = T_A V_A^{\gamma-۱} \quad \text{یا} \quad T_C V_D^{\gamma-۱} = T_H V_A^{\gamma-۱} \tag{۴.۱}$$

از دو عبارت بالا نتیجه می‌شود که

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$$

اگر دو تا معادله (۱.۱) و (۲.۱) را بر هم تقسیم کنیم، داریم

$$\frac{Q_H}{Q_C} = \frac{T_H}{T_C}\cdot$$

در اینجا بازده ماشین کارنو بصورت زیر بدست می‌آید،

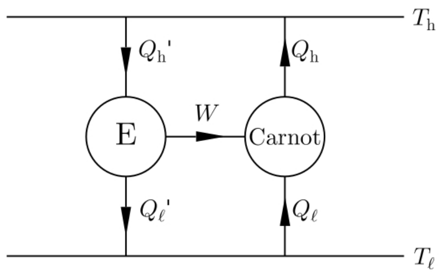
$$\eta_{\text{کارنو}} = 1 - \frac{Q_C}{Q_H} = 1 - \frac{T_C}{T_H}\cdot$$

## ۳.۱ قضیه کارنو

ماشین کارنو در حقیقت پر بازده‌ترین ماشین ممکن است. این را کارنو بصورت یک قضیه بیان کرده است،

**قضیه کارنو: از تمامی ماشین‌های گرمایی که بین دو دمای داده شده کار می‌کنند، هیچ کدام موثرتر از ماشین کارنو نیست.**

تصور کنید که $\mathrm{E}$ یک ماشین با بازده بیشتر از ماشین کارنو باشد (یعنی $\eta_{\mathrm{E}} > \eta_{\text{کارنو}}$). ماشین کارنو قابلیت برگشت‌پذیری دارد بطوریکه می‌توان آنرا در جهت عکس نیز اجرا کرد. ماشین $E$ و ماشین کارنو معکوس مطابق شکل زیر به یکدیگر متصل شده‌اند.




چون $\eta_{\mathrm{E}} > \eta_{\text{کارنو}}$ داریم

$$\frac{W}{Q_h'} > \frac{W}{Q_h} \Rightarrow Q_h > Q_h' \quad \text{یا} \quad Q_h - Q_h' > 0$$

قانون اول ترمودینامیک اشاره می‌کند که

$$\mathrm{E}: W = Q_h' - Q_l'$$
$$\text{کارنو}: W = Q_h - Q_l$$

بنابراین

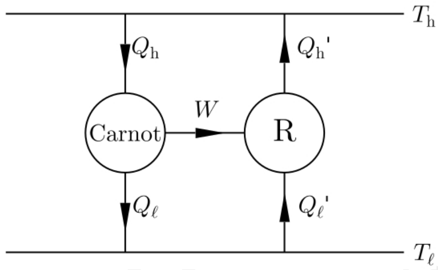
$$Q_h - Q_h' = Q_l - Q_l'$$

چون $Q_h - Q_h' > 0$ بنابراین $Q_l - Q_l' > 0$. نمودار نشان می‌دهد که $Q_h - Q_h'$ مقدار نهایی گرمای پمپ شده به منبع با دمای $T_h$ است و $Q_h - Q_h'$ مقدار نهایی گرمای استخراج شده از منبع $T_l$ است که بطور کامل به منبع $T_h$ پمپ می‌شود. این نتیجه نقیض بیان کلاسیوس در مورد قانون دوم ترمودینامیک است. بنابراین ماشینی $\mathrm{E}$ وجود ندارد که بازده بیشتر از ماشین کارنو داشته باشد.

**نتیجه‌گیری: همه ماشینهای برگشت‌پذیر که بین دو دما کار می‌کنند بازده یکسانی با ماشین کارنو** $\eta_{\text{کارنو}}$

**دارند.**

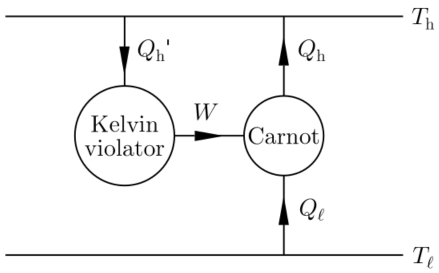
ماشین برگشت‌پذیر R را در نظر بگیرید که بازده‌اش بر اساس قضیه کارنو کوچکتر از بازده ماشین کارنو است ($\eta_{\mathrm{R}} < \eta_{\text{کارنو}}$). مطابق شکل زیر ماشین R را در جهت معکوس به یک ماشین کارنو متصل می‌کنیم. این ماشین بطور ساده گرما را از یک منبع سرد به یک منبع گرم منتقل می‌کند که بیان کلاسیوس از قانون دوم ترمودینامیک نقض می‌شود مگر اینکه $\eta_{\mathrm{R}} = \eta_{\text{کارنو}}$.




## ۴.۱ هم ارزی بیان‌های کلاسیوس و کلوین

- **نشان می‌دهیم که اگر یک سیستم نقیض بیان کلوین در مورد قانون دوم ترمودینامیک باشد، آن سیستم بیان کلاسیوس در مورد قانون دوم ترمودینامیک را نقض می‌کند.**

برای این منظور اگر یک سیستم نقض کننده بیان کلوین در مورد قانون دوم ترمودینامیک را مطابق شکل زیر به یک ماشین کارنو در جهت معکوس متصل کنیم.




قانون اول ترمودینامیک اشاره می‌کند که

$$Q_h' = W$$
$$Q_h = W + Q_l$$

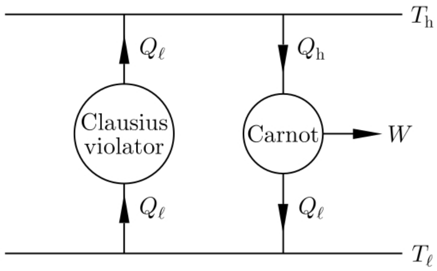
گرمای پمپ شده به منبع به دمای $T_h$ هست،

$$Q_h - Q_h' = Q_l.$$

انتقال گرما ی $Q_l$ از منبع $T_l$ به منبع $T_h$ تنها اثر فرایند ترکیب شده است که بیان کلاسیوس در مورد قانون دوم ترمودینامیک را نقض می‌کند. بنابراین نقض کنند بیان کلوین وجود ندارد.

- **نشان می‌دهیم که اگر یک سیستم نقیض بیان کلاسیوس در مورد قانون دوم ترمودینامیک باشد، آن سیستم بیان کلوین در مورد قانون دوم ترمودینامیک را نقض می‌کند.**

برای این منظور اگر یک سیستم نقض کننده بیان کلاسیوس در مورد قانون دوم ترمودینامیک را مطابق شکل زیر به یک ماشین کارنو در جهت مستقیم متصل کنیم.




قانون اول ترمودینامیک اشاره می‌کند که

$$Q_h - Q_l = W$$

رابطه بالا نشان می‌دهد که تنها اثر این فرایند تبدیل کامل گرمای $Q_h - Q_l$ از منبع $T_h$ به کار $W$ است که بیان کلوین در مورد قانون دوم ترمودینامیک را نقض می‌کند. بنابراین نقض کنند بیان کلاسیوس وجود ندارد.

## ۵.۱ ماشین‌های گرمایی که در جهت معکوس کار می‌کنند

در این بخش دو کاربرد از ماشین‌های گرمایی را که در جهت معکوس اجرا می‌شوند را بررسی می‌کنیم.

- **یخچال**
یخچال ماشین گرمایی است که در جهت معکوس اجرا می‌شود و باعث می‌شود یک جریان گرمایی از یک مخزن سرد به یک مخزن گرم شارش کند (شکل زیر را نگاه کنید). در این حالت مخزن سرد مواد غذایی داخل یخچال است که شما قصد دارید آنرا سرد نگه دارید و مخزن داغ معمولا آشپزخانه است. برای یخچال، بازده به شیوه‌ای متفاوت از بازده ماشین حرارتی تعریف می‌شود. برای اینکه آنچه شما می خواهید و قصد رسیدن به آنرا دارید، "خارج شدن گرما از محتویات یخچال" و آنچه که برای رسیدن به آن باید انجام دهید، "کار الکتریکی از منبع برق" است. بنابراین بازده یخچال را به صورت

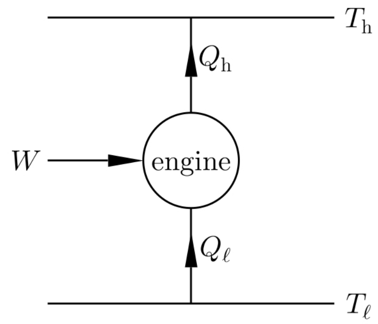
$$\eta = \frac{Q_l}{W}$$

تعریف می کنیم. در مقایسه با ماشین گرمایی کارنو، بسادگی می‌توان نشان داد که بازده در یخچال برابر با

$$\eta = \frac{T_l}{T_h - T_l} > ۱$$

است.

- **پمپ گرمایی**
یک پمپ گرمایی اساسا یک یخچال است (شکل زیر به یک پمپ گرمایی هم اعمال می‌شود) اما به طریقه متفاوتی استفاده می شود. پمپ گرمایی برای پمپ کردن گرما از یک مخزن به محل مشخصی برای افزودن گرما در آنجا مورد استفاده قرار می گیرد. به عنوان مثال، مخزن پمپ گرمایی می تواند




خاک یا صخره باشد که چند متر زیر زمین است و گرمای ناشی از مخزن را به یک خانه که نیاز به گرما دارد پمپ می کند. در این چرخه قصد داریم گرما $Q_h$ را به خانه اضافه کنیم در حالیکه $W$ کاری است که باید (به شکل الکتریکی) اعمال شود. بنابراین کارایی یک پمپ گرما در مقایسه با ماشین کارنو به صورت زیر تعریف می شود،

$$\eta = \frac{Q_h}{W} = \frac{T_h}{T_h - T_l}.$$

چون $Q_h > W$ بنابراین $\eta > 1$ است.

## ۶.۱ قضیه کلاسیوس

در یک چرخه کارنو، گرمای $Q_h$ داخل و گرمای $Q_l$ خارج می‌شود. بنابراین بقاء کمیت گرما در چرخه نداریم. با این حال، در یک چرخه کارنو داریم،

$$\frac{Q_h}{Q_l} = \frac{T_h}{T_l},$$

و اگر $\Delta Q_{\mathrm{rev}}$ را بعنوان گرمای ورودی در هر نقطه تعریف کنیم ($Q_{\mathrm{rev}}$ با ماشین برگشت‌پذیر سروکار دارد) بنابراین جمع روی یک چرخه بصورت زیر برابر صفر می‌شود،

$$\sum_{\mathrm{cycle}} \frac{\Delta Q_{\mathrm{rev}}}{T} = \frac{Q_h}{T_h} + \frac{(-Q_l)}{T_l} = 0.$$

می‌توان جمع بالا را با انتگرال مسیر بسته بصورت

$$\oint_{\mathrm{cycle}} \frac{đQ}{T} = 0$$

برای یک چرخه کارنو عوض کرد.

دمای مطلق $T$ بعنوان یک فاکتور انتگرالگیری عمل می‌کند که در آن دیفرانسیل ناکامل $đQ$ را به یک دیفرانسیل کامل $đQ/T$ تبدیل می‌کند. برای بررسی این موضوع ابتدا قضیه کلاسیوس را بررسی می‌کنیم.

**قضیه کلاسیوس: برای هر فرآیند چرخه‌ای، $p$، نامساوی زیر برقرار است**

$$\oint_p \frac{đQ}{T} \leq 0,$$

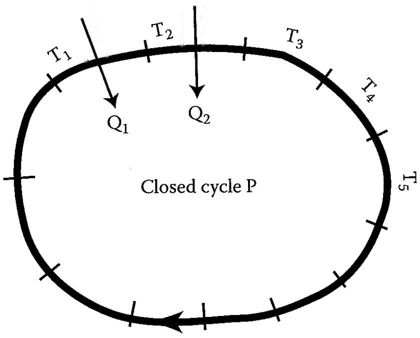
**که در آن اگر $p$ برگشت‌پذیر باشد، رابطه بالا در حالت تساوی برقرار است.**

چرخه‌ای را مطابق شکل به $K$ قطعه با شاخصه‌های $i = 1, 2, \dots, K$ تقسیم می‌کنیم. در اینجا نیاز نیست

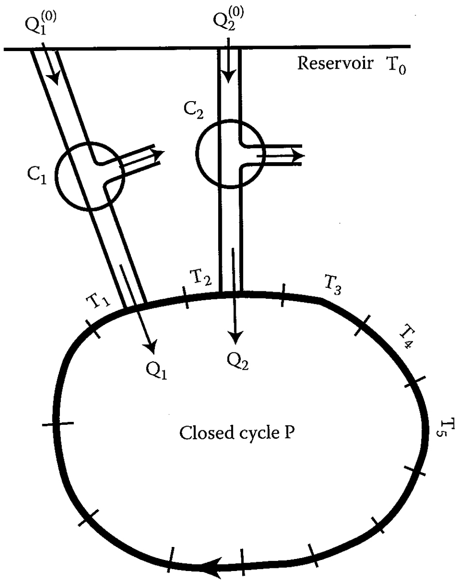
فرایند دوره‌ای برگشت‌پذیر باشد. فرض کنید قطعه‌ی $i$ام در تماس با یک منبع به دمای $T_i$ باشد که در آن مقدار گرمای $Q_i$ را جذب می‌کند. با استفاده از قانون اول ترمودینامیک کار کل خروجی $p$ برابر است با

$$W = \sum_{i=۱}^{K} Q_i$$

در اینجا لازم به اشاره هستش که تمام $Q_i$ها نمی‌تواند مثبت باشد زیر را در غیر اینصورت در تناقض با قانون دوم ترمودینامیک گرما بدون هیچ اثر دیگری به کار تبدیل شده است.




ماشین کارنو $C_i$ که بین $T_۰$ و هر یک از دماهای $T_i$ عمل می‌کند را در نظر بگیرید ($T_۰ > T_i$).




که در آن $T_i$ها هیچ تغییر خاصی را تجربه نمی‌کنند. در هر ماشین کارنو رابطه زیر برقرار است،

$$\frac{Q_i^{(۰)}}{Q_i} = \frac{T_۰}{T_i}.$$

گرمای استخراج شده از منبع $T_۰$ برابراست با

$$Q_{tot} = \sum_{i=۱}^{K} Q_i^{(۰)} = T_۰ \sum_{i=۱}^{K} \frac{Q_i}{T_i}.$$

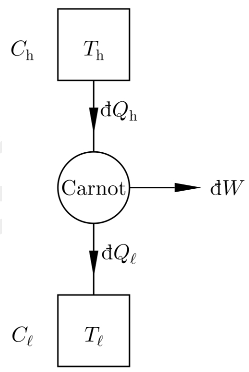
در این حالت کل کار خروجی برابر است با کار چرخه $p$ بعلاوه کار ماشینهای کارنو حول چرخه $p$،

$$\begin{aligned}
W_{tot} &= W_{p\ \text{چرخه‌ی}} + W_{\text{ماشین‌های کارنو}} \\
&= W_{p\ \text{چرخه‌ی}} + \sum_{i=۱}^{K}(Q_i^{(۰)} - Q_i) \\
&= W_{p\ \text{چرخه‌ی}} + \sum_{i=۱}^{K} Q_i^{(۰)} - \sum_{i=۱}^{K} Q_i \\
&= W_{p\ \text{چرخه‌ی}} + \sum_{i=۱}^{K} Q_i^{(۰)} - W_{p\ \text{چرخه‌ی}} \\
&= \sum_{i=۱}^{K} Q_i^{(۰)} = T_۰ \sum_{i=۱}^{K} \frac{Q_i}{T_i} = Q_{tot}
\end{aligned}$$

محاسبات بالا نشان می‌دهد که مقدار گرمای $Q_{tot}$ بدون اثری دیگر بطور کامل به کار تبدیل می‌شود. بدین ترتیب قانون دوم ترمودینامیک نقض می‌شود مگر اینکه $Q_{tot} < ۰$ باشد. یعنی

$$\sum_{i=۱}^{K} \frac{Q_i}{T_i} < ۰ \quad \text{یا} \quad \oint_p \frac{đQ}{T} < ۰$$

مثال ۳: مطابق شکل زیر دو جسم با دماهای مختلف و ظرفیت گرمایی $C_h$ و $C_l$ بصورت منابع گرمایی برای ماشین کارنو استفاده می‌شوند. عبارتی برای کار کل قابل حصول بدست آورید.




برای تغییرات خیلی کوچک داریم

$$\begin{aligned}
đQ_h = C_h \mathrm{d}T \Rightarrow \Delta Q_h = C_h(T_f - T_h) \\
đQ_l = C_l \mathrm{d}T \Rightarrow \Delta Q_l = C_l(T_l - T_f)
\end{aligned}$$

و برای یک ماشین کارنو داریم

$$\frac{đQ_h}{T_h} = \frac{đQ_l}{T_l}$$

با انتگرالگیری داریم

$$\begin{aligned}
\int_{T_h}^{T_f} \frac{đQ_h}{T_h} &= \int_{T_f}^{T_l} \frac{đQ_l}{T_l} \\
C_h \ln\left(\frac{T_f}{T_h}\right) &= C_l \ln\left(\frac{T_l}{T_f}\right)
\end{aligned}$$

بنابراین

$$T_f^{C_h+C_l} = T_h^{C_h} T_l^{C_l}.$$

کار کل برابر است با

$$\Delta Q_h = \Delta W + \Delta Q_l$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \Delta W &= \Delta Q_h - \Delta Q_l \\ &= (C_h + C_l) T_f - C_h T_h - C_l T_l \end{aligned}$$