# جلسه ششم

## مکانیک آماری

**محمدرضا مظفری**
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه
دانشگاه قم
اسفند ۹۸

# احتمال

* در فیزیک اغلب ما به مطالعه سیستمهایی علاقمند هستیم که شامل **تعداد زیادی از ذرات** است.

* در چنین سیستمهایی با **تعداد ذرات زیاد**، بررسی رفتار ایزوله ذرات امکان‌پذیر نیست و فقط مطالعه رفتار جمعی و متوسط **آماری** ذرات امکان‌پذیر است.

* در بررسی **آماری** سیستمها، کمیتهای قابل اندازه گیری با **احتمال** مشخص می‌شوند.

* **احتمال** در سیستمهای آماری با **افت وخیز** همراه است. وقتی **احتمال‌ها** **افت و خیز** کمی دارند که نه تنها **تعداد ذرات زیاد** باشد بلکه ناحیه تحت مطالعه هم به اندازه کافی بزرگ باشد.

# احتمال

* **تعداد ذرات زیاد** و **ناحیه تحت مطالعه بزرگ** حدی را به نام **حد ترمودینامیک** در مطالعه سیستم ذرات فراهم می‌کند که اعتبار مطالعه در مکانیک آماری می‌باشد.

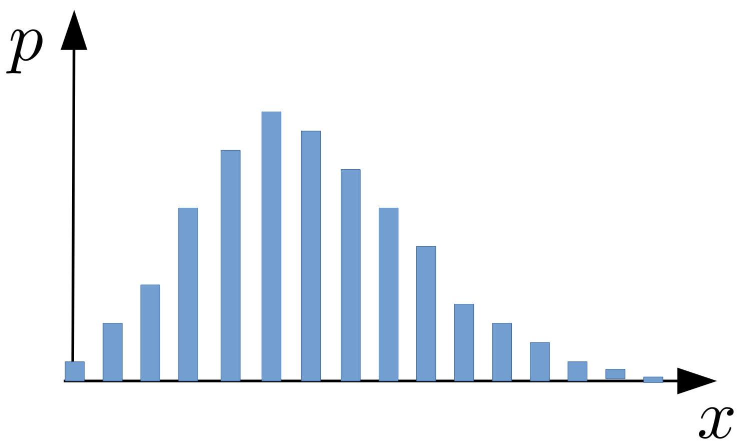
* در ادامه قصد داریم بعضی از مفاهیم پایه‌ی تئوری احتمال را بررسی کنیم،

* توزیع احتمالاتی گسسته
* توزیع احتمالاتی پیوسته
* مقدار متوسط
* واریانس و انحراف معیار

# احتمال

| $x$ | $x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_n$ |
|---|---|
| $p$ | $p_1, p_2, \cdots, p_i, \cdots, p_n$ |

$$\sum_i^n p_i = 1$$




مقدار متوسط $x$ :
$$\langle x \rangle = \sum_i^n x_i p_i$$

مقدار متوسط $x^2$ :
$$\langle x^2 \rangle = \sum_i^n x_i^2 p_i$$

مقدار متوسط $f(x)$ :
$$\langle f(x) \rangle = \sum_i^n f(x_i) p_i$$

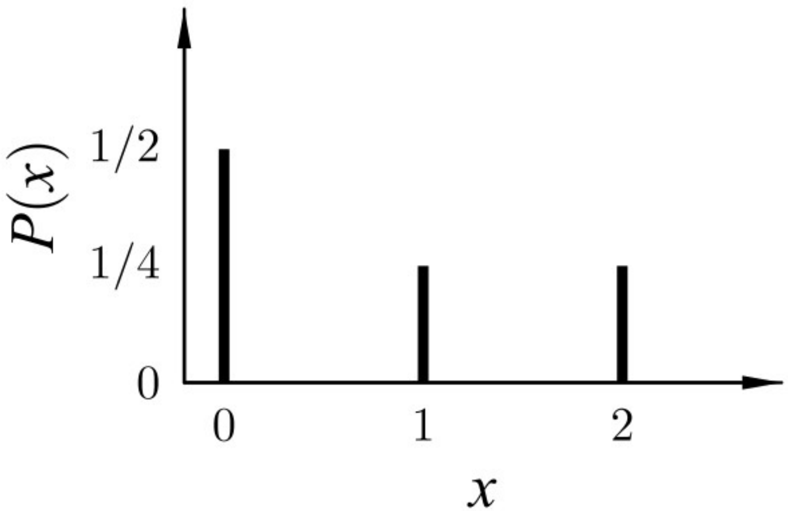
# احتمال

مثال

| $x$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $p$ | $1/2$ | $1/4$ | $1/4$ |

$$\sum_i^3 p_i = 1$$

$$\sum_i^3 p_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$




$$\langle x \rangle = \sum_i^3 x_i p_i$$

$$\sum_i^3 x_i p_i = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\langle x \rangle = \frac{3}{4}$$

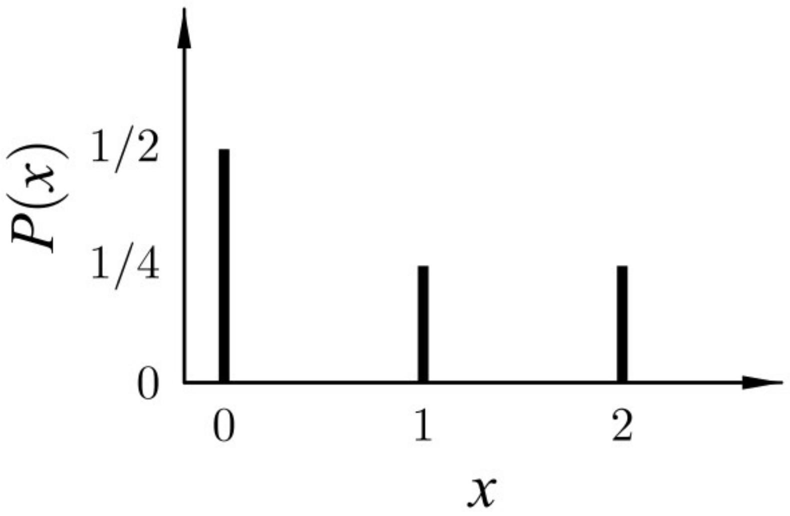
# احتمال

مثال

| $x$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $p$ | $1/2$ | $1/4$ | $1/4$ |

$$\sum_i^3 p_i = 1$$

$$\sum_i^3 p_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$




$$\langle x^2 \rangle = \sum_i^3 x_i^2 p_i$$

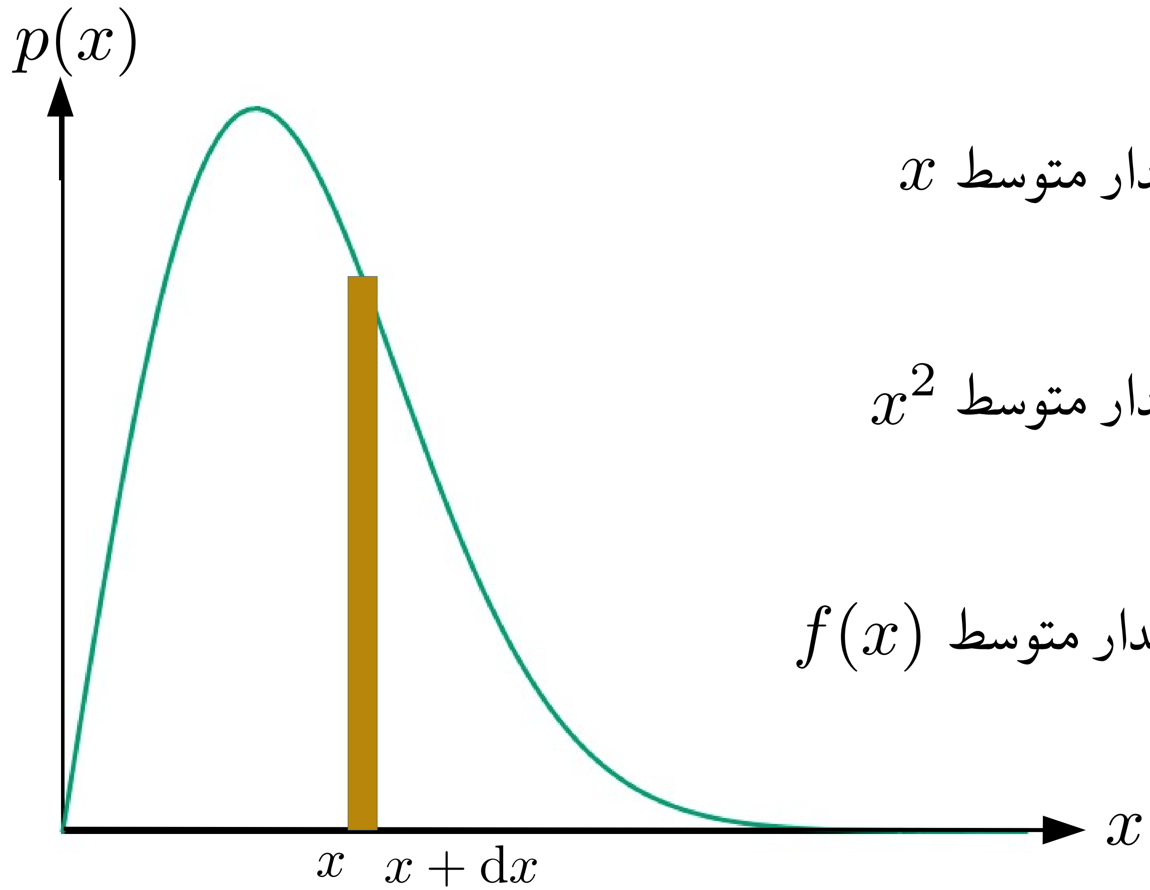
$$\sum_i^3 x_i^2 p_i = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{5}{4}$$

# احتمال

$$p(x)\mathrm{d}x, \quad x, x+\mathrm{d}x$$

$$\int p(x)\mathrm{d}x = 1$$

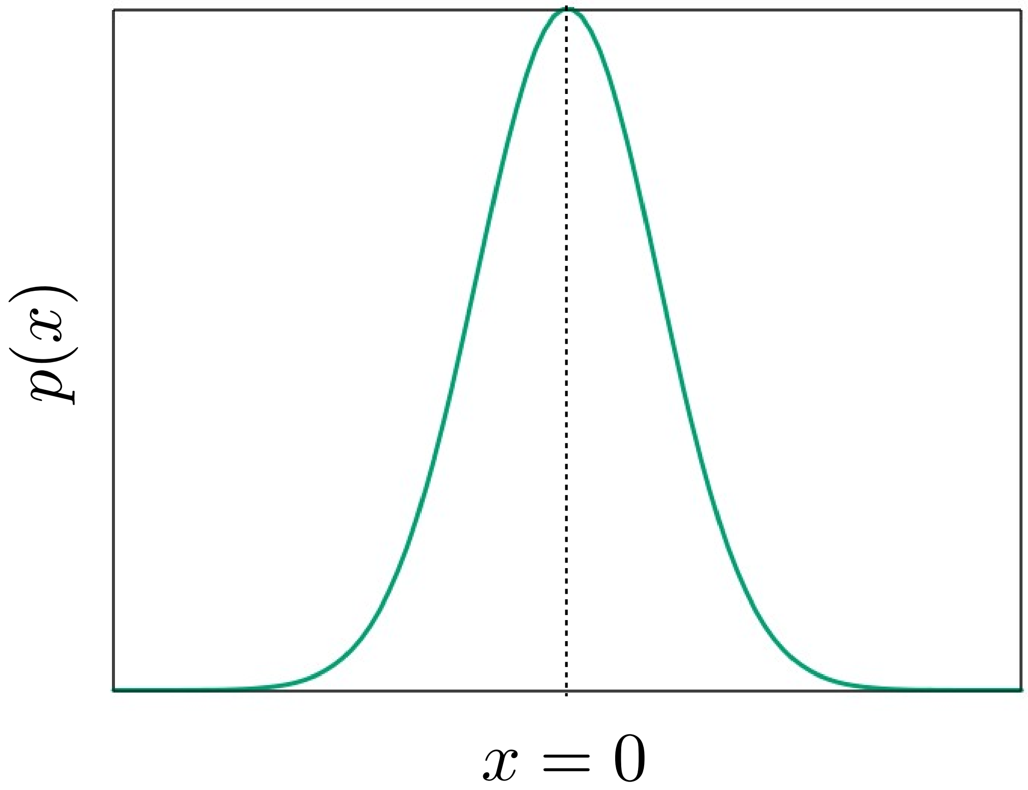



$x$ مقدار متوسط : $\quad \langle x \rangle = \int x p(x)\mathrm{d}x$

$x^2$ مقدار متوسط : $\quad \langle x^2 \rangle = \int x^2 p(x)\mathrm{d}x$

$f(x)$ مقدار متوسط : $\quad \langle f(x) \rangle = \int f(x) p(x)\mathrm{d}x$

# احتمال




$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

مثال

$$p(x) = Ce^{-x^2/2a^2}$$

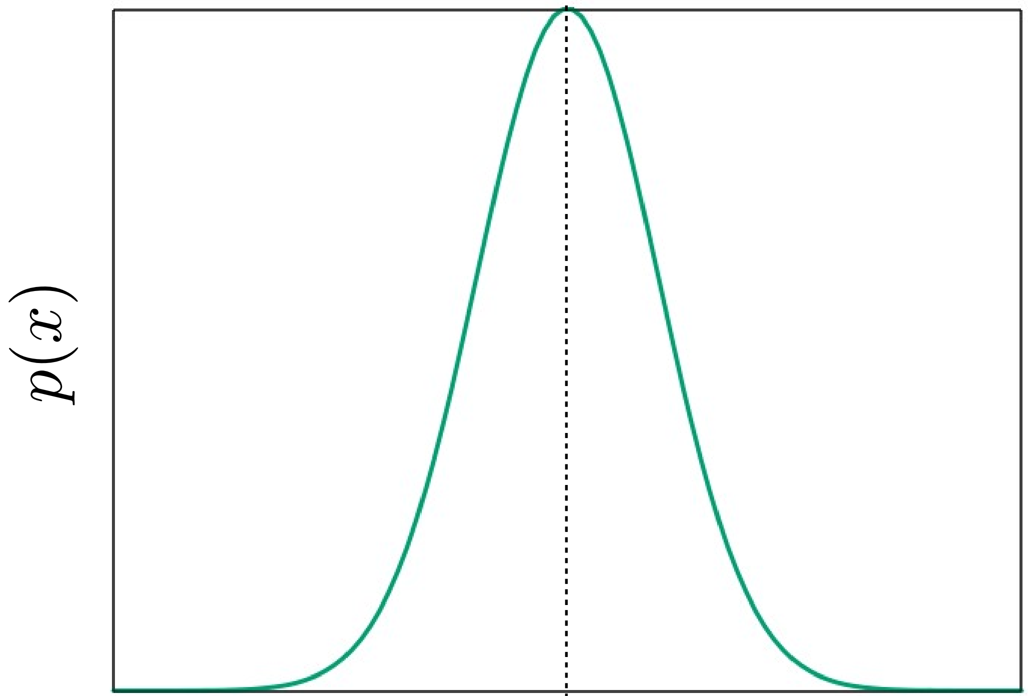
$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) \mathrm{d}x = 1$$

$$1 = C \int_{-\infty}^{\infty} e^{x^2/2a^2} \mathrm{d}x$$

$$C = 1/\sqrt{2\pi a^2}$$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} e^{-x^2/2a^2}$$

# احتمال




مثال

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} e^{-x^2/2a^2}$$

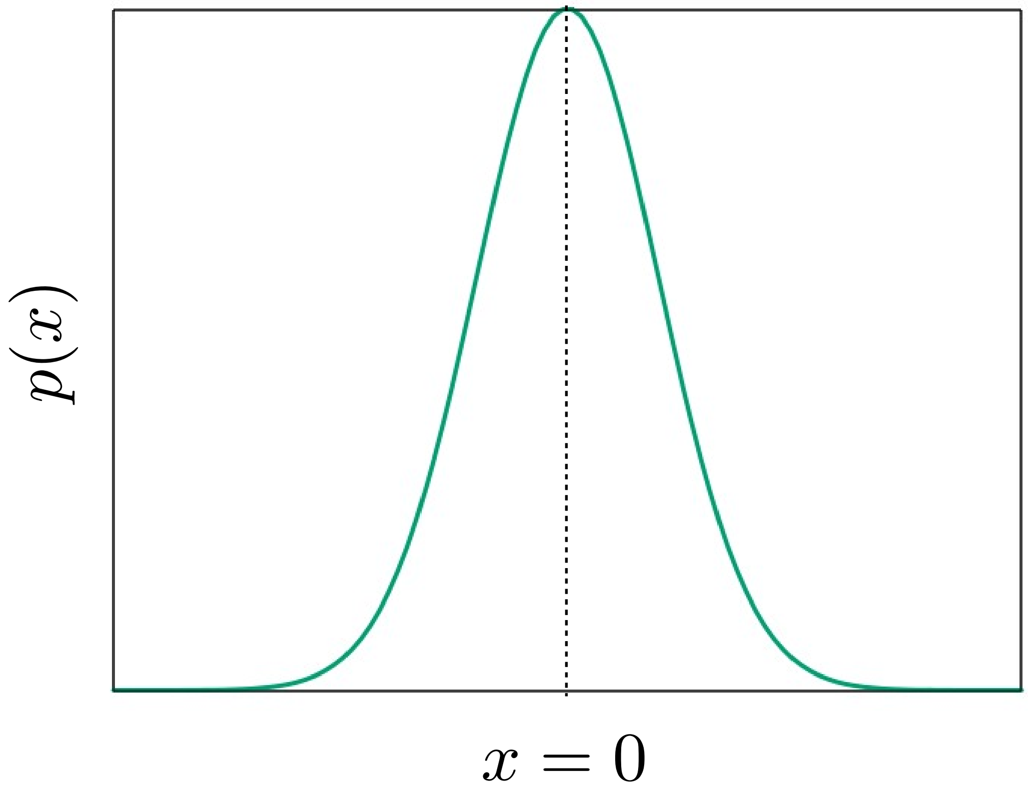
$$\langle x \rangle = \int x p(x) \mathrm{d}x$$

$$\langle x \rangle = \frac{1}{\sqrt{2a^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2/2a^2} \mathrm{d}x$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\alpha x^2} \mathrm{d}x = 0$$

$$\langle x \rangle = 0$$

# احتمال




مثال

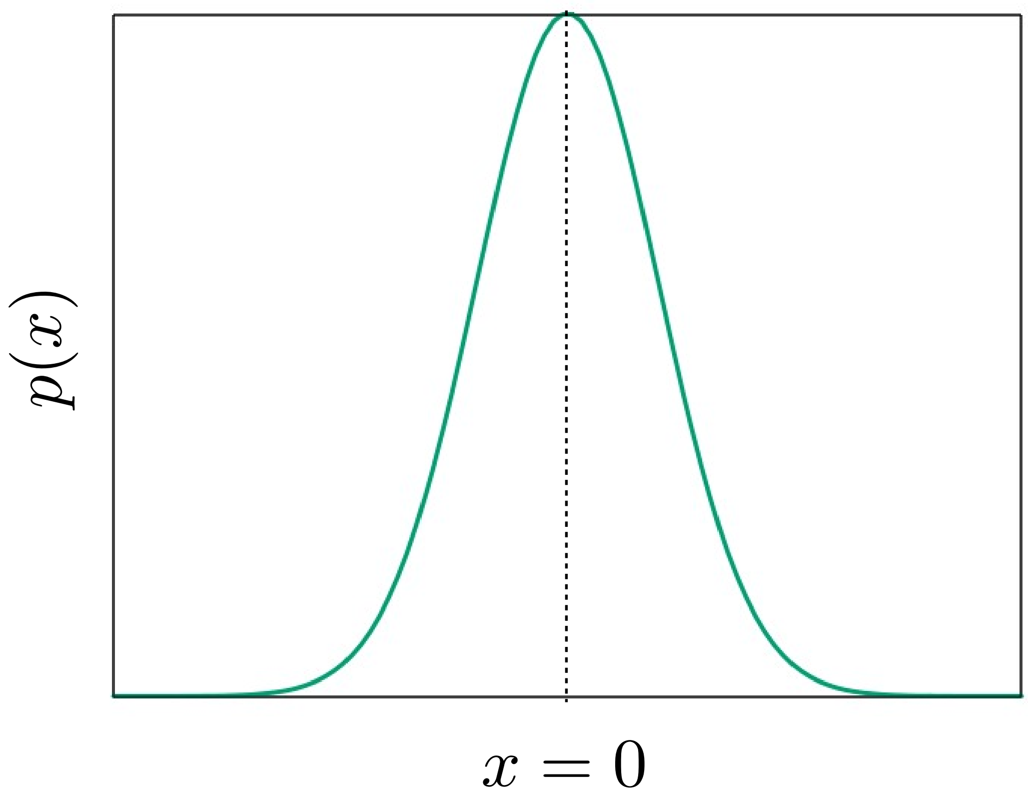
$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} e^{-x^2/2a^2}$$

$$\langle x^2 \rangle = \int x^2 p(x) \mathrm{d}x$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2a^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2a^2} \mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$$

# احتمال




مثال

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}}e^{-x^2/2a^2}$$

$$\langle x^2\rangle=\int x^2 p(x)\mathrm{d}x$$

$$\langle x^2\rangle=\frac{1}{\sqrt{2a^2}}\int_{-\infty}^{\infty}x^2 e^{-x^2/2a^2}\mathrm{d}x$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^2 e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$$

$$\langle x^2\rangle=\frac{1}{\sqrt{2a^2}}\frac{1}{2}\sqrt{8\pi a^6}=a^2$$

# احتمال

* میزان انحراف تابع توزیع از مقدار متوسط را می‌توان بصورت کمیت خطی

$$x - \langle x \rangle$$

در نظر گرفت. ولی این تعریف مناسبی نیست چون متوسط از آن برابر صفر است،

$$\langle x - \langle x \rangle \rangle = \langle x \rangle - \langle x \rangle = 0$$

* میزان انحراف تابع توزیع از مقدار متوسط را می‌توان بصورت

$$|x - \langle x \rangle|$$

در نظر گرفت. که قدر مطلق رویه ریاضی ملال آوری و سختی را برای متوسط گیری دارد.

# احتمال

* میزان انحراف تابع توزیع از مقدار متوسط را می‌توان بصورت کمیت غیرخطی

$$(x - \langle x \rangle)^2$$

در نظر گرفت که مقدار متوسط از آن واریانس نامیده می‌شود،

$$\sigma_x^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$$

* رابطه شناخته تر برای محاسبه واریانس

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 - 2\langle x \rangle x + \langle x \rangle^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - 2\langle x \rangle \langle x \rangle + \langle x \rangle^2$$

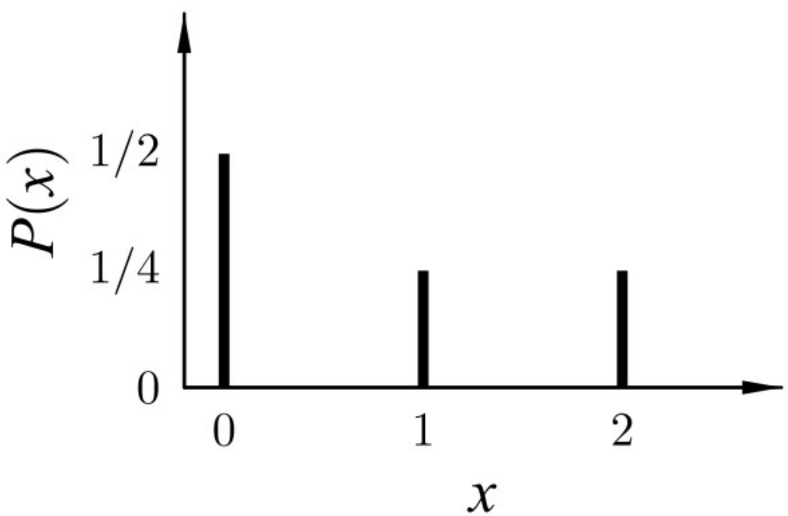
$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

* جذر واریانس انحراف معیار نامیده می‌شود.

# احتمال

مثال

| $x$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $p$ | $1/2$ | $1/4$ | $1/4$ |



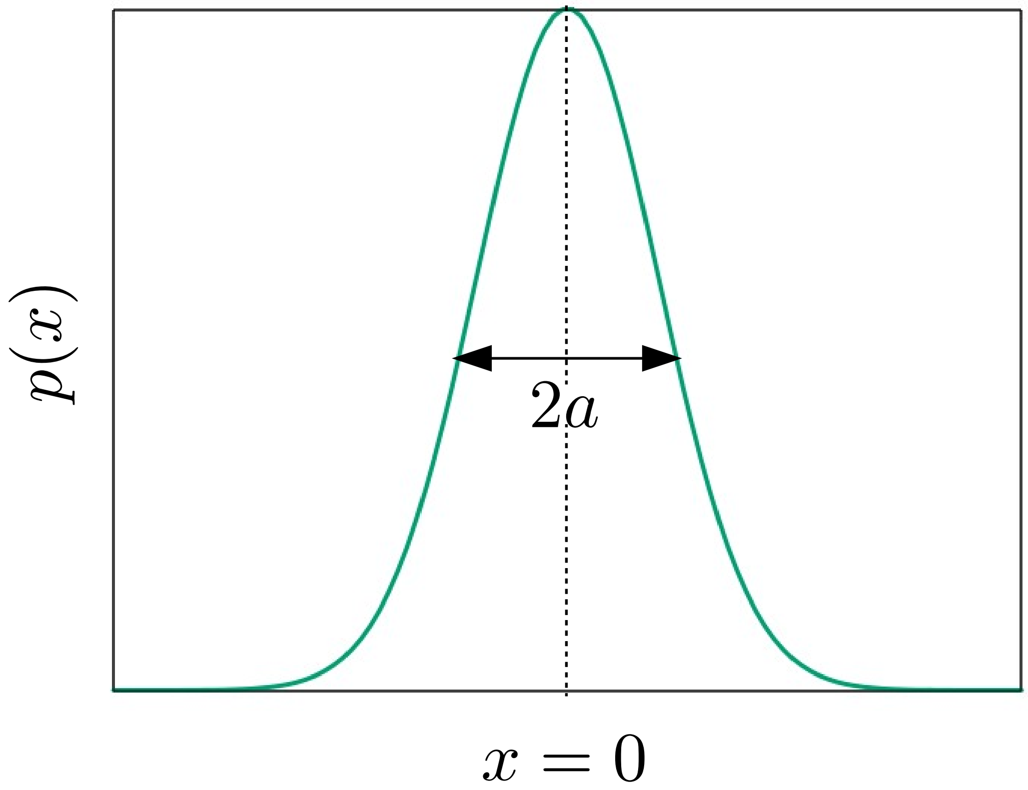

$$\langle x\rangle = \sum_i^3 x_i p_i = \frac{3}{4}$$

$$\langle x^2\rangle = \sum_i^3 x_i^2 p_i = \frac{5}{4}$$

$$\sigma_x^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2$$

$$\sigma_x^2 = \frac{5}{4} - \frac{9}{16} = \frac{11}{16}$$

# احتمال




مثال

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} e^{-x^2/2a^2}$$

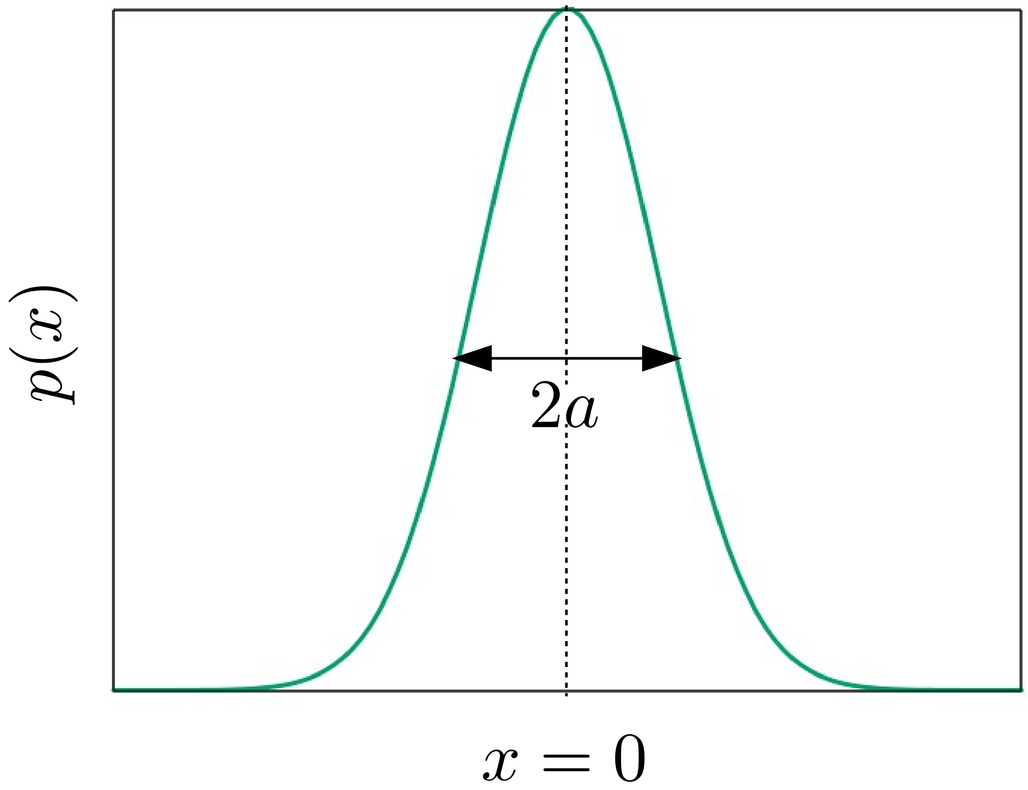
$$\langle x \rangle = 0$$

$$\langle x^2 \rangle = a^2$$

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

$$\sigma_x = a$$

# احتمال




مثال

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} e^{-x^2/2a^2}$$

$$\langle x \rangle = 0$$

$$\langle x^2 \rangle = a^2$$

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

$$\sigma_x = a$$

# احتمال

مثال

$$p(x)\mathrm{d}x, \quad x, x+\mathrm{d}x$$

$$y = ax + b \Rightarrow \sigma_y^2 =? \qquad \sigma_y^2 = \langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2$$

$$\langle y \rangle = \langle ax + b \rangle = a\langle x \rangle + b$$

$$\langle y^2 \rangle = \langle (ax+b)^2 \rangle = a^2\langle x^2 \rangle + 2ab\langle x \rangle + b^2$$

$$\sigma_y^2 = (a^2\langle x^2 \rangle + 2ab\langle x \rangle + b^2) - (a\langle x \rangle + b)^2$$

$$\sigma_y^2 = (a^2\langle x^2 \rangle + \cancel{2ab\langle x \rangle + b^2}) - (a^2\langle x \rangle^2 + \cancel{2ab\langle x \rangle + b^2})$$

$$\sigma_y^2 = a^2\langle x^2 \rangle - a^2\langle x \rangle^2 = a^2(\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2) \Rightarrow \sigma_y^2 = a^2\sigma_x^2$$

# احتمال

* برای دو متغیر مستقل $x$ و $y$،

$$p(x)\mathrm{d}x, \quad x, x+\mathrm{d}x$$

$$q(y)\mathrm{d}y, \quad y, y+\mathrm{d}y$$

$$\langle xy \rangle = ?$$

$$p(x)q(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad x, x+\mathrm{d}x, \quad y, y+\mathrm{d}y$$

$$\langle xy \rangle = \int\int xyp(x)q(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\langle xy \rangle = \left(\int xp(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int yp(y)\mathrm{d}y\right) = \langle x \rangle \langle y \rangle$$

# احتمال

* فرض کنید $n$ متغییر تصادفی مستقل، $X_i$ ، با مقادیر متوسط $\langle X\rangle$ و واریانس $\sigma_X^2$ یکسان وجود دارد.

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \Rightarrow \sigma_Y^2 = ?$$

$$\sigma_Y^2 = \langle Y^2\rangle - \langle Y\rangle^2$$

$$\langle Y\rangle = \langle X_1\rangle + \langle X_2\rangle + \cdots + \langle X_n\rangle = n\langle X\rangle$$

$$\langle Y^2\rangle = \langle X_1^2\rangle + \langle X_2^2\rangle + \cdots + \langle X_n^2\rangle + 2\langle X_1\rangle(\langle X_2\rangle + \cdots + \langle X_n\rangle)$$
$$+2\langle X_2\rangle(\langle X_3\rangle + \cdots + \langle X_n\rangle) + \cdots 2\langle X_{n-1}\rangle\langle X_n\rangle$$

$$\langle Y^2\rangle = n\langle X^2\rangle + 2(n-1)\langle X\rangle^2 + 2(n-2)\langle X\rangle^2 + \cdots + 2\langle X\rangle^2$$

# احتمال

* فرض کنید $n$ متغییر تصادفی مستقل، $X_i$ ، با مقادیر متوسط $\langle X\rangle$ و واریانس $\sigma_X^2$ یکسان وجود دارد.

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \Rightarrow \sigma_Y^2 = ?$$

$$\sigma_Y^2 = \langle Y^2\rangle - \langle Y\rangle^2$$

$$\langle Y\rangle = \langle X_1\rangle + \langle X_2\rangle + \cdots + \langle X_n\rangle = n\langle X\rangle$$

$$\langle Y^2\rangle = n\langle X^2\rangle + 2(n-1)\langle X\rangle^2 + 2(n-2)\langle X\rangle^2 + \cdots + 2\langle X\rangle^2$$

$$\begin{cases} \langle Y^2\rangle = n\langle X^2\rangle + 2(1+2+\cdots+(n-1))\langle X\rangle^2 \\ 1+2+\cdots+(n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2} \end{cases} \Rightarrow \langle Y^2\rangle = n\langle X^2\rangle + n(n-1)\langle X\rangle^2$$

# احتمال

* فرض کنید $n$ متغییر تصادفی مستقل، $X_i$ ، با مقادیر متوسط $\langle X\rangle$ و واریانس $\sigma_X^2$ یکسان وجود دارد.

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \Rightarrow \sigma_Y^2 = ?$$

$$\sigma_Y^2 = \langle Y^2\rangle - \langle Y\rangle^2$$

$$\langle Y\rangle = n\langle X\rangle \qquad \langle Y^2\rangle = n\langle X^2\rangle + n(n-1)\langle X\rangle^2$$

$$\sigma_Y^2 = n\langle X^2\rangle + n(\cancel{n} - 1)\langle X\rangle^2 - \cancel{n}^2\langle X\rangle^2$$

$$\sigma_Y^2 = n\langle X^2\rangle - n\langle X\rangle^2$$

$$\sigma_Y^2 = n(\langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2) = n\sigma_X^2$$

# احتمال

* فرض کنید $n$ متغییر تصادفی مستقل، $X_i$ ، با مقادیر متوسط $\langle X \rangle$ و واریانس $\sigma_X^2$ یکسان وجود دارد.

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \Rightarrow \sigma_Y^2 = ?$$

$$\sigma_Y^2 = n\sigma_X^2 \Rightarrow \sigma_Y = \sqrt{n}\sigma_X$$

کاربرد:

فرض کنید کمیت $X$ را $n$ بار اندازه‌گیری کنیم که هر بار خطای مستقل $\sigma_X$ داشته باشد.

$$Y = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \Rightarrow \sigma_Y^2 = \frac{1}{n}\sigma_X^2$$

$$\sigma_Y = \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma_X$$

# احتمال

* یک توزیع احتمالی مهم در فیزیک حرارت که بر اساس آزمایشی با دو نتیجه ممکن قرار داده می‌شود. یک نتیجه با احتمال $p$ اتفاق می‌افتد و نتیجه دیگر با احتمال $q = 1 - p$ اتفاق می‌افتد. یک مثال از چنین توزیعی پرتاب یک سکه است. یک نتیجه "خط" و دیگری "شیر" است.

* از ریاضی داریم،

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

حالا اگر $x = p$ و $y = q = 1 - p$ بنابراین

$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \Rightarrow 1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

# احتمال

$$1=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\Rightarrow p_k(n)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$\langle k\rangle,\langle k^2\rangle=?$$

$$\langle k\rangle=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$$

$$p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}p^k=kp^k$$

$$\langle k\rangle=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}p^k\right)q^{n-k}=p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^kq^{n-k}=p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}(p+q)^n$$

# احتمال

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \Rightarrow p_k(n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\langle k \rangle, \langle k^2 \rangle = ?$$

$$\langle k \rangle = p \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p} (p+q)^n = np(p+q)^{n-1} = np$$

$$\langle k^2 \rangle = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$p \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p} \left( p \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p} p^k \right) = k^2 p^k$$

# احتمال

$$1=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\Rightarrow p_k(n)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$\langle k\rangle=np,\quad \langle k^2\rangle=?$$

$$\langle k^2\rangle=\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}p^kq^{n-k}\qquad\qquad p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}p^k\right)=k^2p^k$$

$$\langle k^2\rangle=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}p^k\right)\right]q^{n-k}=p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^kq^{n-k}\right)$$

$$\langle k^2\rangle=p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}(p+q)^n\right)=p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(np(p+q)^{n-1}\right)$$

# احتمال

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \Rightarrow p_k(n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\langle k \rangle = np$$

$$\langle k^2 \rangle = p \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p} \left( np(p+q)^{n-1} \right) = np(p+q)^{n-1} + n(n-1)p^2(p+q)^{n-2}$$

$$\langle k^2 \rangle = np + n(n-1)p^2$$

$$\sigma_k^2 = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2 = np(1-p) = npq$$

$$\sigma_k = \sqrt{np(1-p)}$$

$$\sigma_k / \langle k \rangle = \sqrt{(1-p)/np}$$

# احتمال

$$\sigma_k/\langle k\rangle = \sqrt{(1-p)/np}$$