مکانیک آماری

جلسه نوزدهم

محمدرضا مظفری

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

اسفند ۹۹

مدل دبای

در سه بعد

$$g(\omega) = \frac{9N}{\omega_D^3}\omega^2$$

- مدل انیشتین

$$\ln Z = 3N \ln \frac{e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega_E}}{1 - e^{\beta\hbar\omega_E}}$$

- مدل دبای

$$\ln Z = \int_0^{\omega_D} g(\omega)\mathrm{d}\omega \ln \frac{e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega}}{1 - e^{\beta\hbar\omega}}$$

$$\ln Z = \frac{9N}{\omega_D^3}\int_0^{\omega_D} \omega^2 \ln \frac{e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega}}{1 - e^{\beta\hbar\omega}}\mathrm{d}\omega$$

مدل دبای

در سه بعد

$$\ln Z = \frac{9N}{\omega_D^3}\int_0^{\omega_D}\omega^2 \ln\frac{e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega}}{1-e^{\beta\hbar\omega}}\mathrm{d}\omega$$

$$\ln\frac{e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega}}{1-e^{\beta\hbar\omega}} = -\frac{1}{2}\beta\hbar\omega - \ln[1-e^{-\beta\hbar\omega}]$$

$$\ln Z = \frac{9N}{\omega_D^3}\left(-\frac{1}{2}\beta\hbar\int_0^{\omega_D}\omega^3\mathrm{d}\omega - \int_0^{\omega_D}\omega^2\ln[1-e^{-\beta\hbar\omega}]\mathrm{d}\omega\right)$$

$$\ln Z = -\frac{9}{8}N\beta\hbar\omega_D - \frac{9N}{\omega_D^3}\int_0^{\omega_D}\omega^2\ln[1-e^{-\beta\hbar\omega}]\mathrm{d}\omega$$

مدل دبای

در سه بعد

$$\ln Z = -\frac{9}{8}N\beta\hbar\omega_D - \frac{9N}{\omega_D^3}\int_0^{\omega_D}\omega^2\ln[1-e^{-\beta\hbar\omega}]\mathrm{d}\omega$$

انرژي داخلی

$$U = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z$$

$$U = \frac{9}{8}N\hbar\omega_D - \frac{9N}{\omega_D^3}\hbar\int_0^{\omega_D}\omega^3\frac{e^{-\beta\hbar\omega}}{1-e^{-\beta\hbar\omega}}\mathrm{d}\omega$$

$$U = \frac{9}{8}N\hbar\omega_D - \frac{9N}{\omega_D^3}\hbar\int_0^{\omega_D}\omega^3\frac{e^{-\beta\hbar\omega}}{1-e^{-\beta\hbar\omega}}\times\frac{e^{\beta\hbar\omega}}{e^{\beta\hbar\omega}}\mathrm{d}\omega$$

$$\boxed{U = \frac{9}{8}N\hbar\omega_D - \frac{9N}{\omega_D^3}\hbar\int_0^{\omega_D}\frac{\omega^3\mathrm{d}\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1}}$$

مدل دبای

در سه بعد
انرژي داخلی

$$U = \frac{9}{8} N\hbar\omega_D - \frac{9N}{\omega_D^3}\hbar \int_0^{\omega_D} \frac{\omega^3 \mathrm{d}\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}$$

ظرفیت ویژه

$$C = \frac{\partial U}{\partial T}$$

$$C = \left(\frac{\partial U}{\partial \beta}\right)\left(\frac{\partial \beta}{\partial T}\right) = -\frac{1}{k_B T^2}\frac{\partial U}{\partial \beta} = -k_B\beta^2\frac{\partial U}{\partial \beta}$$

$$\boxed{C = \frac{9N}{\omega_D^3} k_B \hbar^2 \beta^2 \int_0^{\omega_D} \frac{\omega^4 e^{\beta\hbar\omega}}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)^2} \mathrm{d}\omega}$$

مدل دبای

در سه بعد

انرژي داخلی

$$U = \frac{9}{8} N\hbar\omega_D - \frac{9N}{\omega_D^3}\hbar \int_0^{\omega_D} \frac{\omega^3 \mathrm{d}\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}$$

ظرفیت ویژه

$$C = \frac{9N}{\omega_D^3} k_B \hbar^2 \beta^2 \int_0^{\omega_D} \frac{\omega^4 e^{\beta\hbar\omega}}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)^2} \mathrm{d}\omega$$

$$x = \beta\hbar\omega \Rightarrow \mathrm{d}x = \beta\hbar \mathrm{d}\omega, \qquad x_D = \beta\hbar\omega_D$$

$$C = \frac{9N}{(\beta\hbar\omega_D)^3} k_B \int_0^{x_D} \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} \mathrm{d}x$$

$$\boxed{C = \frac{9Nk_B}{x_D^3} \int_0^{x_D} \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} \mathrm{d}x}$$

مدل دبای

در سه بعد

ظرفیت ویژه

$$C = \frac{9Nk_B}{x_D^3}\int_0^{x_D}\frac{x^4e^x}{(e^x-1)^2}\mathrm{d}x$$

حالتهای حدی:

- دماهای بالا $T \longrightarrow \infty \; (x \longrightarrow 0)$

$$e^x = 1 + x + \cdots \,, \quad \frac{x^4e^x}{(e^x-1)^2} \approx \frac{x^4(1+x)}{x^2} \approx x^2$$

$$\lim_{T\longrightarrow\infty} C \to \frac{9Nk_B}{x_D^3}\int_0^{x_D} x^2\mathrm{d}x = 3Nk_B$$

- دماهای پایین $T \longrightarrow 0 \; (x \longrightarrow \infty)$

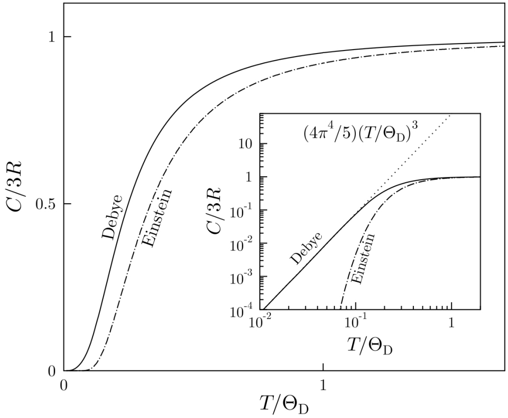
$$\lim_{T\longrightarrow 0} C \to \frac{9Nk_B}{x_D^3}\left[\int_0^{\infty}\frac{x^4e^x}{(e^x-1)^2}\mathrm{d}x\right] = \frac{9Nk_B}{x_D^3}\left[\frac{4\pi^4}{15}\right] = \frac{12\pi^4Nk_B^4}{5\hbar^3\omega_D^3}T^3$$

مدل دبای

در سه بعد

ظرفیت ویژه

$$C = \frac{9Nk_B}{x_D^3}\int_0^{x_D}\frac{x^4e^x}{(e^x-1)^2}\mathrm{d}x, \qquad \Theta_D = \frac{\hbar\omega_D}{k_B}$$



مدل دبای

در دو بعد

$$g(\omega) = \frac{4N}{\omega_D^2}\omega$$

- مدل انیشتین

$$\ln Z = 2N \ln \frac{e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega_E}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega_E}}$$

- مدل دبای

$$\ln Z = \int_0^{\omega_D} g(\omega)\mathrm{d}\omega \ln \frac{e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}}$$

$$\ln Z = \frac{4N}{\omega_D^2} \int_0^{\omega_D} \omega \ln \frac{e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} \mathrm{d}\omega$$

مدل دبای

در دو بعد

$$\ln Z = \frac{4N}{\omega_D^2}\int_0^{\omega_D}\omega \ln \frac{e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega}}{1-e^{-\beta\hbar\omega}}\mathrm{d}\omega$$

$$\ln \frac{e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega}}{1-e^{-\beta\hbar\omega}} = -\frac{1}{2}\beta\hbar\omega - \ln[1-e^{-\beta\hbar\omega}]$$

$$\ln Z = \frac{4N}{\omega_D^2}\left(-\frac{1}{2}\beta\hbar\int_0^{\omega_D}\omega^2\mathrm{d}\omega - \int_0^{\omega_D}\omega \ln[1-e^{-\beta\hbar\omega}]\mathrm{d}\omega\right)$$

$$\ln Z = -\frac{2}{3}N\beta\hbar\omega_D - \frac{4N}{\omega_D^2}\int_0^{\omega_D}\omega \ln[1-e^{-\beta\hbar\omega}]\mathrm{d}\omega$$

مدل دبای

در دو بعد

$$\ln Z = -\frac{2}{3}N\beta\hbar\omega_D - \frac{4N}{\omega_D^2}\int_0^{\omega_D}\omega\ln[1-e^{-\beta\hbar\omega}]\mathrm{d}\omega$$

انرژي داخلی

$$U = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z$$

$$U = \frac{2}{3}N\hbar\omega_D - \frac{4N}{\omega_D^2}\hbar\int_0^{\omega_D}\omega^2\frac{e^{-\beta\hbar\omega}}{1-e^{-\beta\hbar\omega}}\mathrm{d}\omega$$

$$U = \frac{2}{3}N\hbar\omega_D - \frac{4N}{\omega_D^2}\hbar\int_0^{\omega_D}\omega^2\frac{e^{-\beta\hbar\omega}}{1-e^{-\beta\hbar\omega}}\times\frac{e^{\beta\hbar\omega}}{e^{\beta\hbar\omega}}\mathrm{d}\omega$$

$$\boxed{U = \frac{2}{3}N\hbar\omega_D - \frac{4N}{\omega_D^2}\hbar\int_0^{\omega_D}\frac{\omega^2\mathrm{d}\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1}}$$

مدل دبای

در دو بعد
انرژي داخلی

$$U = \frac{2}{3} N\hbar\omega_D - \frac{4N}{\omega_D^2}\hbar \int_0^{\omega_D} \frac{\omega^2 \mathrm{d}\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}$$

ظرفیت ویژه

$$C = \frac{\partial U}{\partial T}$$

$$C = \left(\frac{\partial U}{\partial \beta}\right)\left(\frac{\partial \beta}{\partial T}\right) = -\frac{1}{k_B T^2}\frac{\partial U}{\partial \beta} = -k_B\beta^2\frac{\partial U}{\partial \beta}$$

$$\boxed{C = \frac{4N}{\omega_D^2} k_B \hbar^2 \beta^2 \int_0^{\omega_D} \frac{\omega^3 e^{\beta\hbar\omega}}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)^2} \mathrm{d}\omega}$$

مدل دبای

در دو بعد

انرژي داخلی

$$U = \frac{2}{3} N\hbar\omega_D - \frac{4N}{\omega_D^2}\hbar \int_0^{\omega_D} \frac{\omega^2 \mathrm{d}\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}$$

ظرفیت ویژه

$$C = \frac{4N}{\omega_D^2} k_B \hbar^2 \beta^2 \int_0^{\omega_D} \frac{\omega^3 e^{\beta\hbar\omega}}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)^2} \mathrm{d}\omega$$

$$x = \beta\hbar\omega \Rightarrow \mathrm{d}x = \beta\hbar \mathrm{d}\omega, \qquad x_D = \beta\hbar\omega_D$$

$$C = \frac{4N}{(\beta\hbar\omega_D)^2} k_B \int_0^{x_D} \frac{x^3 e^x}{(e^x - 1)^2} \mathrm{d}x$$

$$\boxed{C = \frac{4Nk_B}{x_D^2} \int_0^{x_D} \frac{x^3 e^x}{(e^x - 1)^2} \mathrm{d}x}$$

مدل دبای

در دو بعد

ظرفیت ویژه

$$C = \frac{4Nk_B}{x_D^2} \int_0^{x_D} \frac{x^3 e^x}{(e^x-1)^2} \mathrm{d}x$$

حالتهای حدی:

- دماهای بالا $T \longrightarrow \infty \; (x \longrightarrow 0)$

$$e^x = 1 + x + \cdots, \quad \frac{x^3 e^x}{(e^x-1)^2} \approx \frac{x^3(1+x)}{x^2} \approx x$$

$$\lim_{T \longrightarrow \infty} C \rightarrow \frac{4Nk_B}{x_D^2} \int_0^{x_D} x \mathrm{d}x = 2Nk_B$$

- دماهای پایین $T \longrightarrow 0 \; (x \longrightarrow \infty)$

$$\lim_{T \longrightarrow 0} C \rightarrow \frac{4Nk_B}{x_D^2} \left[\int_0^{\infty} \frac{x^3 e^x}{(e^x-1)^2} \mathrm{d}x \right] = \frac{4Nk_B}{x_D^2} \left[\frac{\pi^4}{15} \right] = \frac{4\pi^4 N k_B^3}{15\hbar^3 \omega_D^2} T^2$$

مدل دبای

در یک بعد

$$g(\omega) = \frac{N}{\omega_D}$$

- مدل انیشتین

$$\ln Z = N \ln \frac{e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega_E}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega_E}}$$

- مدل دبای

$$\ln Z = \int_0^{\omega_D} g(\omega) \mathrm{d}\omega \ln \frac{e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}}$$

$$\ln Z = \frac{N}{\omega_D} \int_0^{\omega_D} \ln \frac{e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} \mathrm{d}\omega$$

مدل دبای

در یک بعد

$$\ln Z = \frac{N}{\omega_D} \int_0^{\omega_D} \ln \frac{e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} \mathrm{d}\omega$$

$$\ln \frac{e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} = -\frac{1}{2}\beta\hbar\omega - \ln[1 - e^{-\beta\hbar\omega}]$$

$$\ln Z = \frac{N}{\omega_D} \left(-\frac{1}{2}\beta\hbar \int_0^{\omega_D} \omega \mathrm{d}\omega - \int_0^{\omega_D} \ln[1 - e^{-\beta\hbar\omega}] \mathrm{d}\omega \right)$$

$$\ln Z = -\frac{1}{4} N\beta\hbar\omega_D - \frac{N}{\omega_D} \int_0^{\omega_D} \ln[1 - e^{-\beta\hbar\omega}] \mathrm{d}\omega$$

مدل دبای

در یک بعد

$$\ln Z = -\frac{1}{4}N\beta\hbar\omega_D - \frac{N}{\omega_D}\int_0^{\omega_D}\ln[1-e^{-\beta\hbar\omega}]\mathrm{d}\omega$$

انرژي داخلی

$$U = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z$$

$$U = \frac{1}{4}N\hbar\omega_D - \frac{N}{\omega_D}\hbar\int_0^{\omega_D}\omega\frac{e^{-\beta\hbar\omega}}{1-e^{-\beta\hbar\omega}}\mathrm{d}\omega$$

$$U = \frac{1}{4}N\hbar\omega_D - \frac{N}{\omega_D}\hbar\int_0^{\omega_D}\omega\frac{e^{-\beta\hbar\omega}}{1-e^{-\beta\hbar\omega}}\times\frac{e^{\beta\hbar\omega}}{e^{\beta\hbar\omega}}\mathrm{d}\omega$$

$$\boxed{U = \frac{1}{4}N\hbar\omega_D - \frac{N}{\omega_D}\hbar\int_0^{\omega_D}\frac{\omega\mathrm{d}\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1}}$$

مدل دبای

در یک بعد

انرژي داخلی

$$U = \frac{1}{4}N\hbar\omega_D - \frac{N}{\omega_D}\hbar\int_0^{\omega_D}\frac{\omega \mathrm{d}\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1}$$

ظرفیت ویژه

$$C = \frac{\partial U}{\partial T}$$

$$C = \left(\frac{\partial U}{\partial \beta}\right)\left(\frac{\partial \beta}{\partial T}\right) = -\frac{1}{k_B T^2}\frac{\partial U}{\partial \beta} = -k_B\beta^2\frac{\partial U}{\partial \beta}$$

$$\boxed{C = \frac{N}{\omega_D}k_B\hbar^2\beta^2\int_0^{\omega_D}\frac{\omega^2 e^{\beta\hbar\omega}}{(e^{\beta\hbar\omega}-1)^2}\mathrm{d}\omega}$$

مدل دبای

در یک بعد

انرژي داخلی

$$U = \frac{1}{4}N\hbar\omega_D - \frac{N}{\omega_D}\hbar\int_0^{\omega_D}\frac{\omega\mathrm{d}\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1}$$

ظرفیت ویژه

$$C = \frac{N}{\omega_D}k_B\hbar^2\beta^2\int_0^{\omega_D}\frac{\omega^2 e^{\beta\hbar\omega}}{(e^{\beta\hbar\omega}-1)^2}\mathrm{d}\omega$$

$$x = \beta\hbar\omega \Rightarrow \mathrm{d}x = \beta\hbar\mathrm{d}\omega, \qquad x_D = \beta\hbar\omega_D$$

$$C = \frac{N}{\beta\hbar\omega_D}k_B\int_0^{x_D}\frac{x^2 e^x}{(e^x-1)^2}\mathrm{d}x$$

$$\boxed{C = \frac{Nk_B}{x_D}\int_0^{x_D}\frac{x^2 e^x}{(e^x-1)^2}\mathrm{d}x}$$

مدل دبای
در یک بعد
ظرفیت ویژه

$$C = \frac{Nk_B}{x_D}\int_0^{x_D} \frac{x^2 e^x}{(e^x-1)^2}\mathrm{d}x$$

حالتهای حدی:

- دماهای بالا $T \longrightarrow \infty \, (x \longrightarrow 0)$

$$e^x = 1 + x + \cdots \,, \quad \frac{x^2 e^x}{(e^x-1)^2} \approx \frac{x^3(1+x)}{x^2} \approx 1$$

$$\lim_{T\longrightarrow\infty} C \rightarrow \frac{Nk_B}{x_D}\int_0^{x_D} \mathrm{d}x = Nk_B$$

- دماهای پایین $T \longrightarrow 0 \, (x \longrightarrow \infty)$

$$\lim_{T\longrightarrow 0} C \rightarrow \frac{Nk_B}{x_D}\left[\int_0^{\infty} \frac{x^2 e^x}{(e^x-1)^2}\mathrm{d}x\right] = \frac{Nk_B}{x_D}\left[\frac{\pi^2}{3}\right] = \frac{\pi^2 Nk_B^2}{3\hbar\omega_D}T$$