# مکانیک آماری

## جلسه بیست و یکم

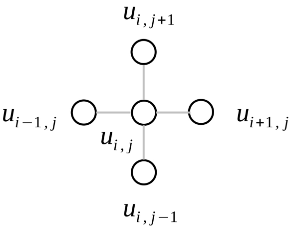
محمدرضا مظفری

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

اسفند ۹۹

# رابطه پاشندگی فونونی

شبکه دوبعدی با ثابت شبکه $a$ ثابت فنر $K$




$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{i,j} = &\frac{1}{2}m\dot{u}_{i,j}^2\\ &-\frac{1}{2}K(u_{i+1,j}-u_{i,j})^2-\frac{1}{2}K(u_{i-1,j}-u_{i,j})^2\\ &-\frac{1}{2}K(u_{i,j+1}-u_{i,j})^2-\frac{1}{2}K(u_{i,j-1}-u_{i,j})^2\end{aligned}$$

# رابطه پاشندگی فونونی

شبکه دوبعدی با ثابت شبکه $a$ ثابت فنر $K$

$$\mathcal{L}_{i,j} = \frac{1}{2}m\dot{u}_{i,j}^2 - \frac{1}{2}K(u_{i+1,j} - u_{i,j})^2 - \frac{1}{2}K(u_{i-1,j} - u_{i,j})^2 - \frac{1}{2}K(u_{i,j+1} - u_{i,j})^2 - \frac{1}{2}K(u_{i,j-1} - u_{i,j})^2$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_{i,j}}{\partial \dot{u}_{i,j}}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}_{i,j}}{\partial u_{i,j}}$$

$$m\ddot{u}_{i,j} = K(u_{i+1,j}-u_{i,j})+K(u_{i-1,j}-u_{i,j})+K(u_{i,j-1}-u_{i,j})+K(u_{i,j+1}-u_{i,j})$$

$$m\ddot{u}_{i,j} = K(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j})$$

# رابطه پاشندگی فونونی

شبکه دوبعدی با ثابت شبکه $a$ ثابت فنر $K$

$$m\ddot{u}_{i,j} = K(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j})$$

$$u_{i,j} = Ae^{-i(\omega t - iq_x a - jq_y a)}$$

$$-m\omega^2 Ae^{-i(\omega t - iq_x a - jq_y a)}$$
$$= K[e^{iq_x a} + e^{-iq_x a} + e^{iq_y a} + e^{-iq_y a} - 4]Ae^{-i(\omega t - iq_x a - jq_y a)}$$

$$-m\omega^2 = K[e^{iq_x a} + e^{-iq_x a} + e^{iq_y a} + e^{-iq_y a} - 4]$$

$$-m\omega^2 = K[2\cos q_x a + \cos q_y a - 4]$$

$$\omega^2 = \frac{2K}{m}[2 - \cos q_x a - \cos q_y a]$$

# رابطه پاشندگی فونونی

شبکه دوبعدی با ثابت شبکه $a$ ثابت فنر $K$

$$\omega^2 = \frac{2K}{m}[2 - \cos q_x a - \cos q_y a]$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{2K}{m}}[2 - \cos q_x a - \cos q_y a]^{1/2}}$$

$$v_x = \frac{\partial \omega}{\partial q_x} = \sqrt{\frac{Ka^2}{2m}} \frac{\sin q_x a}{\sqrt{2 - \cos q_x a - \cos q_y a}}$$

$$v_y = \frac{\partial \omega}{\partial q_x} = \sqrt{\frac{Ka^2}{2m}} \frac{\sin q_y a}{\sqrt{2 - \cos q_x a - \cos q_y a}}$$

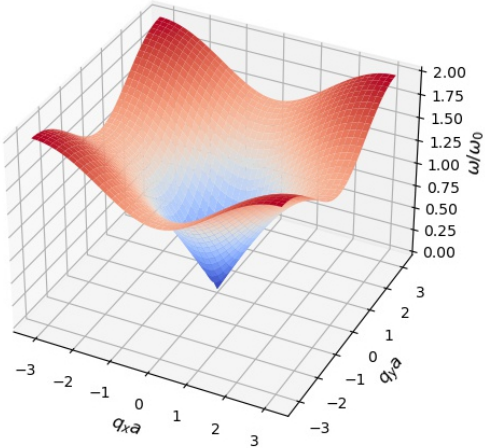
$$v_x = 0 \Rightarrow \sin q_x a = 0 \Rightarrow q_x = \pm\pi/a$$

$$v_y = 0 \Rightarrow \sin q_y a = 0 \Rightarrow q_y = \pm\pi/a$$

# رابطه پاشندگی فونونی

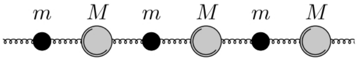
شبکه دوبعدی با ثابت شبکه $a$ ثابت فنر $K$

$$\omega = \omega_0[2 - \cos q_x a - \cos q_y a]^{1/2}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{2K}{m}}$$



# رابطه پاشندگی فونونی

در ادامه قصد داریم ارتعاشات روی یک زنجیره خطی دو اتمی را بررسی کنیم. اتمها با جرمهای $m$ و $M$ توسط یک فنر با ثابت نیرو $K$ به نزدیکترین همسایه متصل می شود. جابجایی جرم $m$ از موقعیت تعادلی با کمیت $u_n$ داده شود و جابجایی جرم $M$ برابر $v_n$ در نظر گرفته می‌شود. در اینجا $n$ نحوی تکرار یاختهی دو جرمی در زنجیره است.




لاگرانژ یاخته $n$ام بصورت

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_n = &\frac{1}{2}m\dot{u}_n^2 + \frac{1}{2}M\dot{v}_n^2 \\
&- \frac{1}{2}K(v_n - u_n)^2 - \frac{1}{2}K(u_{n+1} - v_n)^2 - \frac{1}{2}K(u_n - v_{n-1})^2
\end{aligned}
$$

داده می‌شود.

# رابطه پاشندگی فونونی

$$\mathcal{L}_n = \frac{1}{2}m\dot{u}_n^2 + \frac{1}{2}M\dot{v}_n^2$$
$$- \frac{1}{2}K(v_n - u_n)^2 - \frac{1}{2}K(u_{n+1} - v_n)^2 - \frac{1}{2}K(u_n - v_{n-1})^2$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_n}{\partial \dot{u}_n}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}_n}{\partial u_n}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_n}{\partial \dot{v}_n}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}_n}{\partial v_n}$$

$$m\ddot{u}_n = K(v_n - u_n) - K(u_n - v_{n-1}) = K(v_{n-1} - 2u_n + v_n)$$
$$M\ddot{v}_n = -K(v_n - u_n) + K(u_{n+1} - v_n) = K(u_n - 2v_n + u_{n+1})$$

# رابطه پاشندگی فونونی

$$m\ddot{u}_n = K(v_{n-1} - 2u_n + v_n)$$
$$M\ddot{v}_n = K(u_n - 2v_n + u_{n+1})$$

$$u_n = Ae^{-i(\omega t - 2nqa)}$$
$$v_n = Be^{-i(\omega t - 2nqa)}$$

$$-m\omega^2 Ae^{-i(\omega t - 2nqa)} = K(e^{-iqa}B - 2A + B)e^{-i(\omega t - 2nqa)}$$
$$-M\omega^2 Be^{-i(\omega t - 2nqa)} = K(A - 2B + Ae^{iqa})e^{-i(\omega t - 2nqa)}$$

$$-m\omega^2 A = K(e^{-iqa}B - 2A + B)$$
$$-M\omega^2 B = K(A - 2B + Ae^{iqa})$$

# رابطه پاشندگی فونونی

$$-m\omega^2 A = K(e^{-iqa}B - 2A + B)$$
$$-M\omega^2 B = K(A - 2B + Ae^{iqa})$$

$$\begin{bmatrix} -2K & K(1+e^{-iqa}) \\ K(1+e^{iqa}) & -2K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m\omega^2 & 0 \\ 0 & -M\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2K + m\omega^2 & K(1+e^{-iqa}) \\ K(1+e^{iqa}) & -2K + M\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -2K + m\omega^2 & K(1+e^{-iqa}) \\ K(1+e^{iqa}) & -2K + M\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(-2K + m\omega^2)(-2K + M\omega^2) - K^2(1+e^{-iqa})(1+e^{+iqa}) = 0$$

$$mM\omega^4 - 2K(m+M)\omega^2 + 2K^2(1-\cos qa) = 0$$

# رابطه پاشندگی فونونی

$$mM\omega^4 - 2K(m+M)\omega^2 + 2K^2(1-\cos qa) = 0$$

$$mM\omega^4 - 2K(m+M)\omega^2 + 4K^2\sin^2\left(\frac{qa}{2}\right) = 0$$

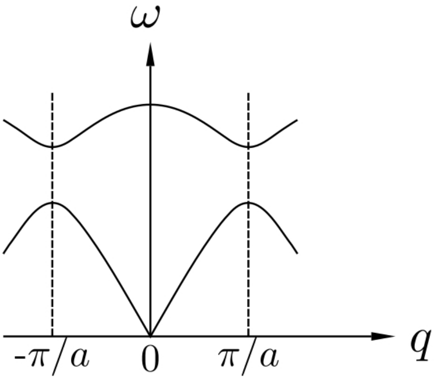
$$\omega^2 = \frac{K(m+M) \pm \sqrt{K^2(m+M)^2 - 4mMK^2\sin^2\left(\frac{qa}{2}\right)}}{mM}$$

$$\omega^2 = \frac{K(m+M)}{mM}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4mM}{(m+M)^2}\sin^2\left(\frac{qa}{2}\right)}\right)$$

$$\boxed{\omega_\pm = \sqrt{\frac{K(m+M)}{mM}}\sqrt{\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4mM}{(m+M)^2}\sin^2\left(\frac{qa}{2}\right)}\right)}}$$

# رابطه پاشندگی فونونی

$$\omega_\pm = \sqrt{\frac{K(m+M)}{mM}}\sqrt{\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4mM}{(m+M)^2}\sin^2\left(\frac{qa}{2}\right)}\right)}$$




$$q = 0:$$

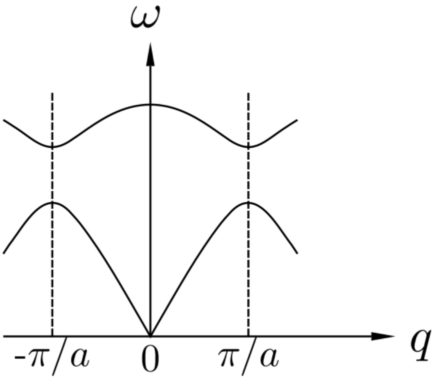
$$\omega_- = \left(\frac{Ka^2}{2K(m+M)}\right)^{1/2} q$$

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{2K(m+M)}{mM}}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial q} = 0 \Rightarrow qa = \pm\pi$$

# رابطه پاشندگی فونونی

$$\omega_{\pm} = \sqrt{\frac{K(m+M)}{mM}}\sqrt{\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4mM}{(m+M)^2}\sin^2\left(\frac{qa}{2}\right)}\right)}$$




$$\frac{\partial \omega}{\partial q} = 0 \Rightarrow qa = \pm\pi$$

$$M > m:$$

$$\omega_{-} = \sqrt{\frac{2K}{m}}$$

$$\omega_{+} = \sqrt{\frac{2K}{M}}$$

# رابطه پاشندگی فونونی