# مکانیک آماری
## جلسه بیست و دوم

محمدرضا مظفری

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

اسفند ۹۹

# پارامغناطیس

## تصویر کلاسیکی

سیستمی از $N$ دوقطبی یکسان $\mu$ را نظر بگیرید که سمتگیری در آنها با اعمال میدان مغناطیسی $\vec{H}$ آزادانه می‌تواند تغییر کند. اگر از حرکت انتقالی این دوقطبی ها صرفه‌نظر کنیم، می توانیم انرژی سیستم تحت بررسی را بصورت زیر مشخص کرد،

$$E = -\sum_{i=1}^{N} \vec{\mu}_i \cdot \vec{H}$$

اگر جهت میدان $\vec{H}$ را در امتدا محور $z$ فرض کنیم، سمتگیری هر دوقطبی نسبت به محور $z$ بصورت

$$\{(\theta_1, \phi_1), (\theta_2, \phi_2), \cdots, (\theta_N, \phi_N)\}$$

داده می‌شود و انرژی بصورت زیر مشخص می‌شود،

$$E = -\mu H \sum_{i=1}^{N} \cos\theta_i$$

# پارامغناطیس

## تصویر کلاسیکی

تابع پارش سیستم

$$Z = \int \mathrm{d}\Omega_1 \int \mathrm{d}\Omega_2 \cdots \int \mathrm{d}\Omega_N e^{\beta\mu H(\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cdots+\cos\theta_N)}$$

که

$$\begin{cases} \mathrm{d}\Omega_1 & = \sin\theta_1 \mathrm{d}\theta_1 \mathrm{d}\phi_1 \\ \mathrm{d}\Omega_2 & = \sin\theta_2 \mathrm{d}\theta_2 \mathrm{d}\phi_2 \\ & \vdots \\ \mathrm{d}\Omega_N & = \sin\theta_N \mathrm{d}\theta_N \mathrm{d}\phi_N \end{cases}$$

و

$$0 \le \theta_i \le \pi, \qquad 0 \le \phi_i \le 2\pi$$

$$i = 1, 2, \ldots, N$$

# پارامغناطیس
## تصویر کلاسیکی
### تابع پارش سیستم

$$Z = \int \mathrm{d}\Omega_1 \int \mathrm{d}\Omega_2 \cdots \int \mathrm{d}\Omega_N e^{\beta\mu H(\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cdots+\cos\theta_N)}$$

$$Z = \left[\int \mathrm{d}\Omega_1 e^{\beta\mu H\cos\theta_1}\right]\left[\int \mathrm{d}\Omega_2 e^{\beta\mu H\cos\theta_2}\right]\cdots\left[\int \mathrm{d}\Omega_N e^{\beta\mu H\cos\theta_N}\right]$$

$$Z_1 = \int \mathrm{d}\Omega_1 e^{\beta\mu H\cos\theta_1} = \left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi_1\right)\left(\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta_1 \sin\theta_1 e^{\beta\mu H\cos\theta_1}\right)$$

$$Z_2 = \int \mathrm{d}\Omega_2 e^{\beta\mu H\cos\theta_2} = \left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi_2\right)\left(\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta_2 \sin\theta_2 e^{\beta\mu H\cos\theta_2}\right)$$

$$\vdots$$

$$Z_N = \int \mathrm{d}\Omega_N e^{\beta\mu H\cos\theta_N} = \left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi_N\right)\left(\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta_N \sin\theta_N e^{\beta\mu H\cos\theta_N}\right)$$

تابع پارش سیستم

$$Z=\int \mathrm{d}\Omega_1 \int \mathrm{d}\Omega_2 \cdots \int \mathrm{d}\Omega_N e^{\beta\mu H(\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cdots+\cos\theta_N)}$$

$$Z=\left[\int \mathrm{d}\Omega_1 e^{\beta\mu H\cos\theta_1}\right]\left[\int \mathrm{d}\Omega_2 e^{\beta\mu H\cos\theta_2}\right]\cdots\left[\int \mathrm{d}\Omega_N e^{\beta\mu H\cos\theta_N}\right]$$

$$Z_1=\frac{4\pi}{\beta\mu H}\sinh\beta\mu H$$
$$Z_2=\frac{4\pi}{\beta\mu H}\sinh\beta\mu H$$
$$\vdots$$
$$Z_N=\frac{4\pi}{\beta\mu H}\sinh\beta\mu H$$

$$Z_1=Z_2=\cdots=Z_N$$

$$Z=Z_1^N=\left(\frac{4\pi}{\beta\mu H}\right)^N\sinh^N\beta\mu H$$

# پارامغناطیس

**تصویر کلاسیکی**

تابع پارش سیستم

$$Z = Z_1^N = \left(4\pi \frac{\sinh \beta\mu H}{\beta\mu H}\right)^N$$

انرژی آزاد هلمهولتز

$$F = -k_B T \ln Z = -N k_B T \ln \left(4\pi \frac{\sinh \beta\mu H}{\beta\mu H}\right)$$

مقدار چشمداشتی مغناطش

$$\langle \vec{M} \rangle = \frac{\int \mathrm{d}\Omega_1 \cdots \int \mathrm{d}\Omega_N (\vec{\mu}_1 + \cdots + \vec{\mu}_N) e^{\beta\mu H(\cos\theta_1 + \cdots + \cos\theta_N)}}{\int \mathrm{d}\Omega_1 \cdots \int \mathrm{d}\Omega_N e^{\beta\mu H(\cos\theta_1 + \cdots + \cos\theta_N)}}$$

# پارامغناطیس

## تصویر کلاسیکی

مقدار چشمداشتی مغناطش

$$\langle \vec{M} \rangle = \frac{\int \mathrm{d}\Omega_1 \int \mathrm{d}\Omega_2 \cdots \int \mathrm{d}\Omega_N (\vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_2 \cdots + \vec{\mu}_N) e^{\beta \mu H (\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cdots + \cos\theta_N)}}{\int \mathrm{d}\Omega_1 \int \mathrm{d}\Omega_2 \cdots \int \mathrm{d}\Omega_N e^{\beta \mu H (\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cdots + \cos\theta_N)}}$$

$$\langle \vec{M} \rangle = \frac{\int \mathrm{d}\Omega_1 \int \mathrm{d}\Omega_2 \cdots \int \mathrm{d}\Omega_N (\vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_2 \cdots + \vec{\mu}_N) e^{\beta \mu H (\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cdots + \cos\theta_N)}}{Z}$$

$$\int \mathrm{d}\Omega_1 \cdots \int \mathrm{d}\Omega_i \cdots \int \mathrm{d}\Omega_N (\vec{\mu}_1 + \cdots + \vec{\mu}_i + \cdots \vec{\mu}_N) e^{\beta \mu H (\cos\theta_1 + \cdots + \cos\theta_i + \cdots + \cos\theta_N)}$$

$$\vec{\mu}_i = \mu(\sin\theta_i \cos\phi_i \hat{i} + \sin\theta_i \sin\phi_i \hat{j} + \cos\theta_i \hat{k})$$

# پارامغناطیس

## تصویر کلاسیکی

### مقدار چشمداشتی مغناطش

$$\int \mathrm{d}\Omega_1 \cdots \int \mathrm{d}\Omega_i \cdots \int \mathrm{d}\Omega_N (\vec{\mu}_1 + \cdots + \vec{\mu}_i + \cdots \vec{\mu}_N) e^{\beta\mu H(\cos\theta_1 + \cdots + \cos\theta_i + \cdots + \cos\theta_N)}$$

$$= \left(\int \mathrm{d}\Omega_1 \vec{\mu}_1 e^{\beta\mu H\cos\theta_1}\right) \cdots \left(\int \mathrm{d}\Omega_i e^{\beta\mu H\cos\theta_i}\right) \cdots \left(\int \mathrm{d}\Omega_N e^{\beta\mu H\cos\theta_N}\right)$$

$$+ \cdots +$$

$$\left(\int \mathrm{d}\Omega_1 e^{\beta\mu H\cos\theta_1}\right) \cdots \left(\int \mathrm{d}\Omega_i \vec{\mu}_i e^{\beta\mu H\cos\theta_i}\right) \cdots \left(\int \mathrm{d}\Omega_N e^{\beta\mu H\cos\theta_N}\right)$$

$$+ \cdots +$$

$$\left(\int \mathrm{d}\Omega_1 e^{\beta\mu H\cos\theta_1}\right) \cdots \left(\int \mathrm{d}\Omega_i e^{\beta\mu H\cos\theta_i}\right) \cdots \left(\int \mathrm{d}\Omega_N \vec{\mu}_N e^{\beta\mu H\cos\theta_N}\right)$$

## پارامغناطیس

### تصویر کلاسیکی

مقدار چشمداشتی مغناطش

$$\int \mathrm{d}\Omega_1 \cdots \int \mathrm{d}\Omega_i \cdots \int \mathrm{d}\Omega_N (\vec{\mu}_1 + \cdots + \vec{\mu}_i + \cdots \vec{\mu}_N) e^{\beta\mu H(\cos\theta_1 + \cdots + \cos\theta_i + \cdots + \cos\theta_N)}$$

$$= \left(\int \mathrm{d}\Omega_1 \vec{\mu}_1 e^{\beta\mu H\cos\theta_1}\right) \cdots \left(\int \mathrm{d}\Omega_i e^{\beta\mu H\cos\theta_i}\right) \cdots \left(\int \mathrm{d}\Omega_N e^{\beta\mu H\cos\theta_N}\right)$$

$$+ \cdots +$$

$$\left(\int \mathrm{d}\Omega_1 e^{\beta\mu H\cos\theta_1}\right) \cdots \left(\int \mathrm{d}\Omega_i \vec{\mu}_i e^{\beta\mu H\cos\theta_i}\right) \cdots \left(\int \mathrm{d}\Omega_N e^{\beta\mu H\cos\theta_N}\right)$$

$$+ \cdots +$$

$$\left(\int \mathrm{d}\Omega_1 e^{\beta\mu H\cos\theta_1}\right) \cdots \left(\int \mathrm{d}\Omega_i e^{\beta\mu H\cos\theta_i}\right) \cdots \left(\int \mathrm{d}\Omega_N \vec{\mu}_N e^{\beta\mu H\cos\theta_N}\right)$$

## پارامغناطیس

### تصویر کلاسیکی

مقدار چشمداشتی مغناطش

$$\int \mathrm{d}\Omega_1 \cdots \int \mathrm{d}\Omega_i \cdots \int \mathrm{d}\Omega_N (\vec{\mu}_1 + \cdots + \vec{\mu}_i + \cdots \vec{\mu}_N) e^{\beta\mu H(\cos\theta_1 + \cdots + \cos\theta_i + \cdots + \cos\theta_N)}$$

$$= \left(\int \mathrm{d}\Omega_1 \vec{\mu}_1 e^{\beta\mu H\cos\theta_1}\right) \cdots \left(4\pi \frac{\sinh\beta\mu H}{\beta\mu H}\right) \cdots \left(4\pi \frac{\sinh\beta\mu H}{\beta\mu H}\right)$$

$$+ \cdots +$$

$$\left(4\pi \frac{\sinh\beta\mu H}{\beta\mu H}\right) \cdots \left(\int \mathrm{d}\Omega_i \vec{\mu}_i e^{\beta\mu H\cos\theta_i}\right) \cdots \left(4\pi \frac{\sinh\beta\mu H}{\beta\mu H}\right)$$

$$+ \cdots +$$

$$\left(4\pi \frac{\sinh\beta\mu H}{\beta\mu H}\right) \cdots \left(4\pi \frac{\sinh\beta\mu H}{\beta\mu H}\right) \cdots \left(\int \mathrm{d}\Omega_N \vec{\mu}_N e^{\beta\mu H\cos\theta_N}\right)$$

# پارامغناطیس
## تصویر کلاسیکی
### مقدار چشمداشتی مغناطش

$$\int \mathrm{d}\Omega_1 \cdots \int \mathrm{d}\Omega_i \cdots \int \mathrm{d}\Omega_N (\vec{\mu}_1 + \cdots + \vec{\mu}_i + \cdots \vec{\mu}_N) e^{\beta\mu H(\cos\theta_1 + \cdots + \cos\theta_i + \cdots + \cos\theta_N)}$$

$$= \left(\int \mathrm{d}\Omega_1 \vec{\mu}_1 e^{\beta\mu H\cos\theta_1}\right) \cdots \left(4\pi \frac{\sinh\beta\mu H}{\beta\mu H}\right) \cdots \left(4\pi \frac{\sinh\beta\mu H}{\beta\mu H}\right)$$

$$+ \cdots +$$

$$\left(4\pi \frac{\sinh\beta\mu H}{\beta\mu H}\right) \cdots \left(\int \mathrm{d}\Omega_i \vec{\mu}_i e^{\beta\mu H\cos\theta_i}\right) \cdots \left(4\pi \frac{\sinh\beta\mu H}{\beta\mu H}\right)$$

$$+ \cdots +$$

$$\left(4\pi \frac{\sinh\beta\mu H}{\beta\mu H}\right) \cdots \left(4\pi \frac{\sinh\beta\mu H}{\beta\mu H}\right) \cdots \left(\int \mathrm{d}\Omega_N \vec{\mu}_N e^{\beta\mu H\cos\theta_N}\right)$$

# پارامغناطیس

## تصویر کلاسیکی

### مقدار چشمداشتی مغناطش

$$\int \mathrm{d}\Omega_1 \cdots \int \mathrm{d}\Omega_i \cdots \int \mathrm{d}\Omega_N (\vec{\mu}_1 + \cdots + \vec{\mu}_i + \cdots \vec{\mu}_N) e^{\beta\mu H(\cos\theta_1 + \cdots + \cos\theta_i + \cdots + \cos\theta_N)}$$

$$= \left( \int \mathrm{d}\Omega_1 \vec{\mu}_1 e^{\beta\mu H \cos\theta_1} \right) \left( 4\pi \frac{\sinh \beta\mu H}{\beta\mu H} \right)^{N-1}$$

$$+ \cdots +$$

$$\left( \int \mathrm{d}\Omega_i \vec{\mu}_i e^{\beta\mu H \cos\theta_i} \right) \left( 4\pi \frac{\sinh \beta\mu H}{\beta\mu H} \right)^{N-1}$$

$$+ \cdots +$$

$$\left( \int \mathrm{d}\Omega_N \vec{\mu}_N e^{\beta\mu H \cos\theta_N} \right) \left( 4\pi \frac{\sinh \beta\mu H}{\beta\mu H} \right)^{N-1}$$

# پارامغناطیس

## تصویر کلاسیکی

### مقدار چشمداشتی مغناطش

$$\vec{\mu}_i = \mu(\sin\theta_i \cos\phi_i \hat{i} + \sin\theta_i \sin\phi_i \hat{j} + \cos\theta_i \hat{k})$$

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}\Omega_1 \vec{\mu}_1 e^{\beta\mu H\cos\theta_1} &= \hat{i}\int \mathrm{d}\Omega_1 \mu \sin\theta_1 \cos\phi_1 e^{\beta\mu H\cos\theta_1} \\ &+ \hat{j}\int \mathrm{d}\Omega_1 \mu \sin\theta_1 \sin\phi_1 e^{\beta\mu H\cos\theta_1} \\ &+ \hat{k}\int \mathrm{d}\Omega_1 \mu \cos\theta_1 e^{\beta\mu H\cos\theta_1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}\Omega_1 \vec{\mu}_1 e^{\beta\mu H\cos\theta_1} &= \hat{i}\mu\left(\int_0^{2\pi} \cos\phi_1 \mathrm{d}\phi_1\right)\left(\int_0^{\pi} \sin^2\theta_1 e^{\beta\mu H\cos\theta_1}\mathrm{d}\theta_1\right) \\ &+ \hat{j}\mu\left(\int_0^{2\pi} \sin\phi_1 \mathrm{d}\phi_1\right)\left(\int_0^{\pi} \sin^2\theta_1 e^{\beta\mu H\cos\theta_1}\mathrm{d}\theta_1\right) \\ &+ \hat{k}\mu\left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi_1\right)\left(\int_0^{\pi} \cos\theta_1 \sin\theta_1 e^{\beta\mu H\cos\theta_1}\mathrm{d}\theta_1\right)\end{aligned}$$

# پارامغناطیس

## تصویر کلاسیکی

مقدار چشمداشتی مغناطش

$$
\begin{aligned}
\int \mathrm{d}\Omega_1 \vec{\mu}_1 e^{\beta\mu H\cos\theta_1} &= \hat{i}\mu\left(\int_0^{2\pi}\cos\phi_1 \mathrm{d}\phi_1\right)\left(\int_0^{\pi}\sin^2\theta_1 e^{\beta\mu H\cos\theta_1}\mathrm{d}\theta_1\right)\\
&+\hat{j}\mu\left(\int_0^{2\pi}\sin\phi_1 \mathrm{d}\phi_1\right)\left(\int_0^{\pi}\sin^2\theta_1 e^{\beta\mu H\cos\theta_1}\mathrm{d}\theta_1\right)\\
&+\hat{k}\mu\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi_1\right)\left(\int_0^{\pi}\cos\theta_1\sin\theta_1 e^{\beta\mu H\cos\theta_1}\mathrm{d}\theta_1\right)
\end{aligned}
$$

$$
\int_0^{2\pi}\cos\phi_1 \mathrm{d}\phi_1 = \int_0^{2\pi}\sin\phi_1 \mathrm{d}\phi_1 = 0
$$

$$
\int \mathrm{d}\Omega_1 \vec{\mu}_1 e^{\beta\mu H\cos\theta_1} = \hat{k}2\pi\mu\left(\int_0^{\pi}\cos\theta_1\sin\theta_1 e^{\beta\mu H\cos\theta_1}\mathrm{d}\theta_1\right)
$$

# پارامغناطیس

## تصویر کلاسیکی

### مقدار چشمداشتی مغناطش

$$\int \mathrm{d}\Omega_1 \vec{\mu}_1 e^{\beta\mu H\cos\theta_1} = \hat{k} 2\pi\mu \left( \int_0^\pi \cos\theta_1 \sin\theta_1 e^{\beta\mu H\cos\theta_1} \mathrm{d}\theta_1 \right)$$

$$x = \cos\theta_1 \Rightarrow \mathrm{d}x = -\sin\theta_1 \mathrm{d}\theta_1$$

$$\int_0^\pi \cos\theta_1 \sin\theta_1 e^{\beta\mu H\cos\theta_1} \mathrm{d}\theta_1 = \int_{-1}^1 x e^{\beta\mu H x} \mathrm{d}x$$

$$= \left[ \frac{x e^{\beta\mu H x}}{\beta\mu H} - \frac{e^{\beta\mu H x}}{(\beta\mu H)^2} \right]_{-1}^1$$

$$\int \mathrm{d}\Omega_1 \vec{\mu}_1 e^{\beta\mu H\cos\theta_1} = \hat{k} 4\pi\mu \left( \frac{\cosh\beta\mu H}{\beta\mu H} - \frac{\sinh\beta\mu H}{(\beta\mu H)^2} \right)$$

# پارامغناطیس

**تصویر کلاسیکی**

مقدار چشمداشتی مغناطش

$$\int \mathrm{d}\Omega_1 \vec{\mu}_1 e^{\beta\mu H\cos\theta_1} = \hat{k}4\pi\mu\left(\frac{\cosh\beta\mu H}{\beta\mu H} - \frac{\sinh\beta\mu H}{(\beta\mu H)^2}\right)$$

$$\vdots$$

$$\int \mathrm{d}\Omega_i \vec{\mu}_i e^{\beta\mu H\cos\theta_i} = \hat{k}4\pi\mu\left(\frac{\cosh\beta\mu H}{\beta\mu H} - \frac{\sinh\beta\mu H}{(\beta\mu H)^2}\right)$$

$$\vdots$$

$$\int \mathrm{d}\Omega_N \vec{\mu}_N e^{\beta\mu H\cos\theta_N} = \hat{k}4\pi\mu\left(\frac{\cosh\beta\mu H}{\beta\mu H} - \frac{\sinh\beta\mu H}{(\beta\mu H)^2}\right)$$

# پارامغناطیس
## تصویر کلاسیکی
### مقدار چشمداشتی مغناطش

$$\int \mathrm{d}\Omega_1 \cdots \int \mathrm{d}\Omega_i \cdots \int \mathrm{d}\Omega_N (\vec{\mu}_1 + \cdots + \vec{\mu}_i + \cdots \vec{\mu}_N) e^{\beta\mu H(\cos\theta_1 + \cdots + \cos\theta_i + \cdots + \cos\theta_N)}$$

$$= \left( \int \mathrm{d}\Omega_1 \vec{\mu}_1 e^{\beta\mu H \cos\theta_1} \right) \left( 4\pi \frac{\sinh \beta\mu H}{\beta\mu H} \right)^{N-1}$$

$$+ \cdots +$$

$$\left( \int \mathrm{d}\Omega_i \vec{\mu}_i e^{\beta\mu H \cos\theta_i} \right) \left( 4\pi \frac{\sinh \beta\mu H}{\beta\mu H} \right)^{N-1}$$

$$+ \cdots +$$

$$\left( \int \mathrm{d}\Omega_N \vec{\mu}_N e^{\beta\mu H \cos\theta_N} \right) \left( 4\pi \frac{\sinh \beta\mu H}{\beta\mu H} \right)^{N-1}$$

# پارامغناطیس
## تصویر کلاسیکی
### مقدار چشمداشتی مغناطش

$$\int \mathrm{d}\Omega_1 \cdots \int \mathrm{d}\Omega_i \cdots \int \mathrm{d}\Omega_N (\vec{\mu}_1 + \cdots + \vec{\mu}_i + \cdots \vec{\mu}_N) e^{\beta\mu H(\cos\theta_1 + \cdots + \cos\theta_i + \cdots + \cos\theta_i}$$

$$= \hat{k} 4\pi\mu \left( \frac{\cosh\beta\mu H}{\beta\mu H} - \frac{\sinh\beta\mu H}{(\beta\mu H)^2} \right) \left( 4\pi \frac{\sinh\beta\mu H}{\beta\mu H} \right)^{N-1}$$

$$+ \cdots +$$

$$\hat{k} 4\pi\mu \left( \frac{\cosh\beta\mu H}{\beta\mu H} - \frac{\sinh\beta\mu H}{(\beta\mu H)^2} \right) \left( 4\pi \frac{\sinh\beta\mu H}{\beta\mu H} \right)^{N-1}$$

$$+ \cdots +$$

$$\hat{k} 4\pi\mu \left( \frac{\cosh\beta\mu H}{\beta\mu H} - \frac{\sinh\beta\mu H}{(\beta\mu H)^2} \right) \left( 4\pi \frac{\sinh\beta\mu H}{\beta\mu H} \right)^{N-1}$$

$$= \hat{k} 4\pi N\mu \left( \frac{\cosh\beta\mu H}{\beta\mu H} - \frac{\sinh\beta\mu H}{(\beta\mu H)^2} \right) \left( 4\pi \frac{\sinh\beta\mu H}{\beta\mu H} \right)^{N-1}$$

# پارامغناطیس

**تصویر کلاسیکی**

مقدار چشمداشتی مغناطش

$$\langle\vec{M}\rangle = \frac{\int \mathrm{d}\Omega_1 \cdots \int \mathrm{d}\Omega_N (\vec{\mu}_1 + \cdots + \vec{\mu}_N) e^{\beta\mu H(\cos\theta_1 + \cdots + \cos\theta_N)}}{Z}$$

$$\int \mathrm{d}\Omega_1 \cdots \int \mathrm{d}\Omega_N (\vec{\mu}_1 + \cdots + \vec{\mu}_N) e^{\beta\mu H(\cos\theta_1 + \cdots + \cos\theta_N)}$$

$$= \hat{k} 4\pi N\mu \left(\frac{\cosh\beta\mu H}{\beta\mu H} - \frac{\sinh\beta\mu H}{(\beta\mu H)^2}\right)\left(4\pi\frac{\sinh\beta\mu H}{\beta\mu H}\right)^{N-1}$$

$$Z = \left(4\pi\frac{\sinh\beta\mu H}{\beta\mu H}\right)^N$$

# پارامغناطیس

## تصویر کلاسیکی

مقدار چشمداشتی مغناطش

$$\langle\vec{M}\rangle = \frac{\int \mathrm{d}\Omega_1 \cdots \int \mathrm{d}\Omega_N (\vec{\mu}_1 + \cdots + \vec{\mu}_N) e^{\beta\mu H(\cos\theta_1 + \cdots + \cos\theta_N)}}{Z}$$

$$\langle\vec{M}\rangle = \hat{k} N\mu \left(\frac{\cosh\beta\mu H}{\beta\mu H} - \frac{\sinh\beta\mu H}{(\beta\mu H)^2}\right)\left(\frac{\beta\mu H}{\sinh\beta\mu H}\right)$$

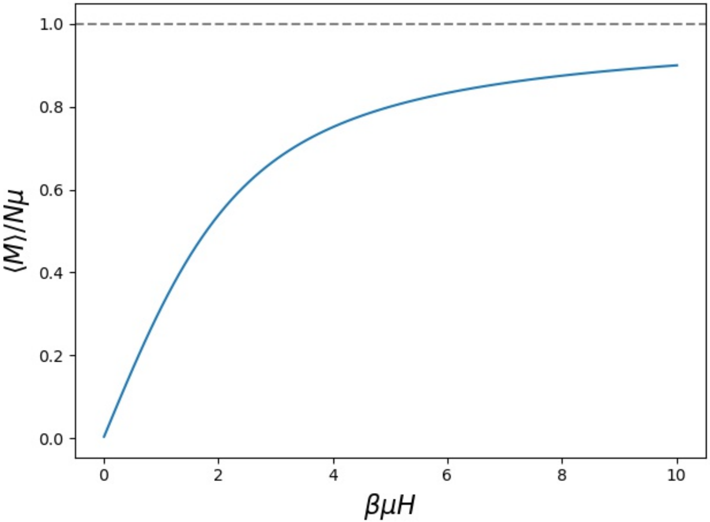
$$\langle\vec{M}\rangle = \hat{k} N\mu \left(\coth\beta\mu H - \frac{1}{\beta\mu H}\right)$$

تابع لانژوین:

$$L(x) = \coth x - \frac{1}{x}$$

$$\boxed{\langle\vec{M}\rangle = \hat{k} N\mu L(\beta\mu H)}$$

# پارامغناطیس
## تصویر کلاسیکی



# پارامغناطیس

## تصویر کلاسیکی

مقدار چشمداشتی مغناطش

$$\langle \vec{M} \rangle = \hat{k} N\mu \left( \coth \beta\mu H - \frac{1}{\beta\mu H} \right)$$

بزرگی مقدار چشمداشتی مغناطش

$$\langle M \rangle = N\mu \left( \coth \beta\mu H - \frac{1}{\beta\mu H} \right)$$

در حد میدانهای کوچک $H \to 0$ :

$$\langle M \rangle \simeq N\mu \left( \frac{1}{\beta\mu H} + \frac{\beta\mu H}{3} - \frac{(\beta\mu H)^3}{45} + \cdots - \frac{1}{\beta\mu H} \right)$$

$$\langle M \rangle \simeq N\mu \left( \frac{\beta\mu H}{3} - \frac{(\beta\mu H)^3}{45} + \cdots \right)$$

# پارامغناطیس

**تصویر کلاسیکی**
بزرگی مقدار چشمداشتی مغناطش

$$\langle M\rangle = N\mu\left(\coth\beta\mu H - \frac{1}{\beta\mu H}\right)$$

در حد میدانهای کوچک $H \to 0$ :

$$\langle M\rangle \simeq N\mu\left(\frac{\beta\mu H}{3} - \frac{(\beta\mu H)^3}{45} + \cdots\right)$$

پذیرفتاری مغناطیسی

$$\chi = \lim_{H\to 0}\frac{\partial\langle M\rangle}{\partial H}$$

$$\chi = \frac{N\mu^2}{3k_BT} = \frac{C}{T}, \qquad C = \frac{N\mu^2}{3k_B}$$

# پارامغناطیس

## تصویر کلاسیکی

انرژی آزاد هلمهولتز

$$F = -k_B T \ln Z = -N k_B T \ln\left(4\pi \frac{\sinh \beta\mu H}{\beta\mu H}\right)$$

بزرگی مقدار چشمداشتی مغناطش

$$\boxed{\langle M\rangle = -\frac{\partial F}{\partial H}}$$

اگر $x = \beta\mu H$

$$\langle M\rangle = -\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial H} = -\beta\mu\frac{\partial F}{\partial x}$$

$$\langle M\rangle = N\mu\frac{\frac{\cosh x}{x} - \frac{\sinh x}{x^2}}{\frac{\sinh x}{x}} = N\mu\left(\coth x - \frac{1}{x}\right) = N\mu\left(\coth\beta\mu H - \frac{1}{\beta\mu H}\right)$$

# پارامغناطیس

## تصویر کلاسیکی

انرژی آزاد هلمهولتز

$$F = -k_B T \ln Z = -N k_B T \ln\left(4\pi \frac{\sinh \beta\mu H}{\beta\mu H}\right)$$

آنتروپی

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T}$$

$$S = N k_B \ln\left(4\pi \frac{\sinh \beta\mu H}{\beta\mu H}\right) - N k_B T \frac{\mu H}{k_B T^2}\left(\coth \beta\mu H - \frac{1}{\beta\mu H}\right)$$

$$S = -\frac{F}{T} - \frac{H}{T}\langle M\rangle \Rightarrow ST = -F - H\langle M\rangle$$

می‌دانیم $U = F + ST$

$$U = -H\langle M\rangle$$

# پارامغناطیس

**تصویر کلاسیکی**

انرژی داخلی

$$U = -H\langle M\rangle$$

ظرفیت گرمایی

$$C = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{\partial x}{\partial T}\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad x = \beta\mu H$$

$$C = Nk_B(\beta\mu H)^2 \frac{\partial}{\partial x}L(x) = Nk_B x^2 \frac{\partial}{\partial x}L(x)$$

$$C = Nk_B x^2 \left(-\frac{1}{\sinh^2 x} + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$\boxed{C = Nk_B\left(1 - \frac{x^2}{\sinh^2 x}\right)}$$

## پارامغناطیس

### تصویر کلاسیکی