مکانیک آماری
جلسه بیست و سوم

محمدرضا مظفری

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

اسفند ۹۹

پارامغناطیس

تصویر کوانتومی
گشتاور مغناطیسی در هر اتم در کوانتوم بصورت یک عملگر می باشد،

$$\vec{\mu} = \mu_B(g_l\vec{L} + g_s\vec{S})$$

که در آن $\mu_B = e/2mc$ مگنتون بوهر، g_l ضریب ژیراسیون زاویه‌ای و g_s ضریب ژیراسیون اسپینی است. تکانه نهایی الکترون از جمع تکانه‌های اسپینی و زاویه ای بدست می‌آید،

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

گشتاور مغناطیسی $\vec{\mu}$ در راستای $\vec{J}$ نیست. بنابراین فقط مولفه‌ای از آن که در راستای $\vec{J}$ باشد می‌تواند پایسه باشد. برای این منظور تصویر گشتاور مغناطیسی $\vec{\mu}$ را در راستای $\vec{J}$ بررسی می‌کنیم، یعنی

$$\vec{\mu}_p = (\vec{\mu}\cdot\vec{J})\frac{\vec{J}}{J^2}$$

پارامغناطیس

تصویر کوانتومی
در عبارت

$$\vec{\mu}_p = (\vec{\mu} \cdot \vec{J}) \frac{\vec{J}}{J^2}$$

حاصلطرب $\vec{\mu} \cdot \vec{J}$ را برحسب

$$\vec{\mu} = \mu_B (g_l \vec{L} + g_s \vec{S})$$

و

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

بصورت زیر ساده می‌کنیم،

$$\begin{aligned} \vec{\mu} \cdot \vec{J} &= \mu_B (g_l \vec{L} + g_s \vec{S}) \cdot (\vec{L} + \vec{S}) \\ &= \mu_B [g_l L^2 + g_s S^2 + (g_l + g_s) \vec{L} \cdot \vec{S}] \end{aligned}$$

پارامغناطیس

تصویر کوانتومی

$$\vec{\mu}_p = (\vec{\mu}\cdot\vec{J})\frac{\vec{J}}{J^2}$$

$$\vec{\mu}\cdot\vec{J} = \mu_B[g_l L^2 + g_s S^2 + (g_l + g_s)\vec{L}\cdot\vec{S}]$$

بررسی عبارت $\vec{L}\cdot\vec{S}$

$$\vec{J}\cdot\vec{J} = (\vec{L}+\vec{S})\cdot(\vec{L}+\vec{S})$$
$$J^2 = L^2 + S^2 + 2\vec{L}\cdot\vec{S}$$

بنابراین

$$\vec{L}\cdot\vec{S} = \frac{1}{2}(J_2 - L^2 - S^2)$$

پارامغناطیس

تصویر کوانتومی

$$\vec{\mu}_p = (\vec{\mu}\cdot\vec{J})\frac{\vec{J}}{J^2}$$

$$\vec{\mu}\cdot\vec{J} = \mu_B[g_l L^2 + g_s S^2 + (g_l + g_s)\vec{L}\cdot\vec{S}]$$

$$\vec{L}\cdot\vec{S} = \frac{1}{2}(J_2 - L^2 - S^2)$$

داریم

$$\vec{\mu}\cdot\vec{J} = \frac{1}{2}\mu_B[(g_l - g_s)L^2 + (g_s - g_l)S^2 + (g_l + g_s)J^2]$$

پارامغناطیس
تصویر کوانتومی

$$\vec{\mu}_p = (\vec{\mu}\cdot\vec{J})\frac{\vec{J}}{J^2}$$

$$\vec{\mu}\cdot\vec{J} = \frac{1}{2}\mu_B[(g_l - g_s)L^2 + (g_s - g_l)S^2 + (g_l + g_s)J^2]$$

$$\vec{\mu}_p = \frac{1}{2}\mu_B[(g_l - g_s)L^2 + (g_s - g_l)S^2 + (g_l + g_s)J^2]\frac{\vec{J}}{J^2}$$

$$\vec{\mu}_p = \frac{1}{2}\mu_B\left[\frac{(g_l - g_s)L^2 + (g_s - g_l)S^2}{J^2} + (g_l + g_s)\right]\vec{J}$$

$$\boxed{L^2 : \ l(l+1)\hbar^2 \quad S^2 : \ s(s+1)\hbar^2 \quad J^2 : \ j(j+1)\hbar^2}$$

$$\vec{\mu}_p = \frac{1}{2}\mu_B\left[\frac{(g_l - g_s)l(l+1) + (g_s - g_l)s(s+1)}{j(j+1)} + (g_l + g_s)\right]\vec{J}$$

پارامغناطیس

تصویر کوانتومی

$$\vec{\mu}_p = \frac{1}{2}\mu_B \left[\frac{(g_l - g_s)l(l+1) + (g_s - g_l)s(s+1)}{j(j+1)} + (g_l + g_s)\right]\vec{J}$$

ضریب لانده

$$g = \frac{1}{2}\left[\frac{(g_l - g_s)l(l+1) + (g_s - g_l)s(s+1)}{j(j+1)} + (g_l + g_s)\right]$$

$$\vec{\mu}_p = g\mu_B \vec{J}$$

انرژی **یک گشتاور دوقطبی** در میدان مغناطیسی $\vec{H} = \hat{k}H$ بصورت زیر داده می‌شود،

$$E = -\vec{\mu}_p \cdot \vec{H} = -g\mu_p H J_z$$

$$\boxed{J_z : m\hbar, \quad m = -j, -j+1, \cdots, j-1, j}$$

پارامغناطیس

تصویر کوانتومی

انرژی یک گشتاور دوقطبی در میدان مغناطیسی $\vec{H} = \hat{k}H$

$$E = -g\mu_p H m\hbar, \quad m = -j, -j+1, \cdots, j-1, j$$

اگر $\hbar$ را به داخل مگنتون بوهر $\mu_B = e\hbar/2mc$ ببریم شکل نهایی انرژی یک گشتاور دوقطبی

$$E = -g\mu_p H m, \quad m = -j, -j+1, \cdots, j-1, j$$

گشتاور دوقطبی یک دستگاه N ذره‌ای

$$E = -g\mu_p H \sum_{i=1}^{N} m_i, \quad m_i = -j, -j+1, \cdots, j-1, j$$

تابع پارش

$$Z = \sum_{m_1, \cdots, m_N = -j}^{j} e^{\beta g \mu_B H \sum_{i=1}^{N} m_i}$$

پارامغناطیس

تصویر کوانتومی

تابع پارش

$$Z = \sum_{m_1,\cdots,m_N=-j}^{j} e^{\beta g \mu_B H \sum_{i=1}^{N} m_i}$$

$$Z = \sum_{m_1,\cdots,m_N=-j}^{j} e^{\beta g \mu_B H (m_1+\cdots+m_N)}$$

$$Z = \sum_{m_1,\cdots,m_N=-j}^{j} e^{\beta g \mu_B H m_1} \ldots e^{\beta g \mu_B H m_N}$$

$$Z = \left(\sum_{m_1=-j}^{j} e^{\beta g \mu_B H m_1} \right) \cdots \left(\sum_{m_N=-j}^{j} e^{\beta g \mu_B H m_N} \right)$$

پارامغناطیس

تصویر کوانتومی

تابع پارش

$$Z = \left(\sum_{m_1=-j}^{j} e^{\beta g \mu_B H m_1} \right) \cdots \left(\sum_{m_N=-j}^{j} e^{\beta g \mu_B H m_N} \right)$$

در عبارت بالا همه پرانتزها از یکدیگر مستقل و با هم برابر هستند. بنابراین

$$\left(\sum_{m_1=-j}^{j} e^{\beta g \mu_B H m_1} \right) = \cdots = \left(\sum_{m_1=-j}^{j} e^{\beta g \mu_B H m_N} \right)$$

بدین‌ترتیب

$$Z = \left(\sum_{m_1=-j}^{j} e^{\beta g \mu_B H m_1} \right)^N$$

پارامغناطیس
تصویر کوانتومی
تابع پارش

$$Z = \left(\sum_{m_1=-j}^{j} e^{\beta g \mu_B H m_1} \right)^N$$

اگر

$$m_1 = m'_1 - j : \quad m_1 = -j, \cdots, j \to m'_1 = 0, \cdots, 2j$$

داریم

$$\sum_{m_1=-j}^{j} e^{\beta g \mu_B H m_1} = \sum_{m'_1=0}^{2j} e^{\beta g \mu_B H (m'_1 - j)} = e^{-\beta g \mu_B H j} \sum_{m'_1=0}^{2j} e^{\beta g \mu_B H m'_1}$$

نهایتا

$$Z = \left(e^{-\beta g \mu_B H j} \sum_{m'_1=0}^{2j} e^{\beta g \mu_B H m'_1} \right)^N$$

پارامغناطیس

تصویر کوانتومی
تابع پارش

$$Z = \left(e^{-\beta g \mu_B H j} \sum_{m_1'=0}^{2j} e^{\beta g \mu_B H m_1'} \right)^N$$

اگر

$$x = e^{\beta g \mu_B H}$$

داریم

$$Z = \left(x^{-j} \sum_{m_1'=0}^{2j} x^{m_1'} \right)^N$$

پارامغناطیس

تصویر کوانتومی
تابع پارش

$$Z = \left(x^{-j} \sum_{m_1'=0}^{2j} x^{m_1'} \right)^N, \quad x = e^{\beta g \mu_B H}$$

در یک سر توانی داریم

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad |x| \ll 1$$

در ادامه قصد داریم درستی جمع زیر را بررسی کنیم،

$$\boxed{\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k}$$

پارامغناطیس

تصویر کوانتومی

$$\boxed{\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k}$$

$$1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}, \qquad |x| \ll 1$$

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^{n+1} + x^{n+2} + x^{n+3} + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

$$(1 + x + x^2 + \cdots + x^n) + x^{n+1}(1 + x + x^2 + \cdots) = \frac{1}{1-x}$$

$$\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right) + x^{n+1}\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right) = \frac{1}{1-x}$$

تصویر کوانتومی

$$\boxed{\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k}$$

$$\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right) + x^{n+1}\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right) = \frac{1}{1-x}$$

$$\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right) + x^{n+1}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1-x}$$

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

پارامغناطیس

تصویر کوانتومی
تابع پارش

$$Z=\left(x^{-j}\sum_{m_1'=0}^{2j}x^{m_1'}\right)^N,\quad x=e^{\beta g\mu_B H}$$

$$\sum_{k=0}^{n}x^k=\frac{1-x^{n+1}}{1-x},\quad |x|\ll 1$$

$$\sum_{m_1'=0}^{2j}x^{m_1'}=\frac{1-x^{2j+1}}{1-x}$$

$$Z=\left(x^{-j}\left[\frac{1-x^{2j+1}}{1-x}\right]\right)^N,\quad x=e^{\beta g\mu_B H}$$

تصویر کوانتومی
تابع پارش

$$Z = \left(x^{-j} \left[\frac{1 - x^{2j+1}}{1 - x} \right] \right)^N, \quad x = e^{\beta g \mu_B H}$$

$$Z = \left(\frac{x^{-j} - x^{j+1}}{1 - x} \right)^N, \quad x = e^{\beta g \mu_B H}$$

$$Z = \left(\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{x^{-\frac{1}{2}}} \frac{x^{-j} - x^{j+1}}{1 - x} \right)^N, \quad x = e^{\beta g \mu_B H}$$

$$Z = \left(\frac{x^{-(j+\frac{1}{2})} - x^{(j+\frac{1}{2})}}{x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}} \right)^N, \quad x = e^{\beta g \mu_B H}$$

تصویر کوانتومی
تابع پارش

$$Z = \left(\frac{x^{-(j+\frac{1}{2})} - x^{(j+\frac{1}{2})}}{x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}} \right)^N , \quad x = e^{\beta g \mu_B H}$$

$$Z = \left(\frac{x^{(j+\frac{1}{2})} - x^{-(j+\frac{1}{2})}}{x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}} \right)^N , \quad x = e^{\beta g \mu_B H}$$

$$Z = \left(\frac{2 \sinh (j + \frac{1}{2}) \beta g \mu_B H}{2 \sinh \frac{1}{2} \beta g \mu_B H} \right)^N$$

$$Z = \left(\frac{\sinh (j + \frac{1}{2}) \beta g \mu_B H}{\sinh \frac{1}{2} \beta g \mu_B H} \right)^N$$

پارامغناطیس

تصویر کوانتومی

تابع پارش

$$Z = \left(\frac{\sinh(j+\frac{1}{2})\beta g \mu_B H}{\sinh \frac{1}{2}\beta g \mu_B H} \right)^N$$

انرژی آزاد هلمهولتز

$$F = -k_B T \ln Z = -N k_B T \ln \left(\frac{\sinh(j+\frac{1}{2})\beta g \mu_B H}{\sinh \frac{1}{2}\beta g \mu_B H} \right)$$

مقدار متوسط گشتاور دوقطبی

$$\langle M \rangle = -\frac{\partial F}{\partial H} = -\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial H} = -\beta g \mu_B \frac{\partial F}{\partial x}, \quad x = \beta g \mu_B H$$

$$F(x) = -N k_B T \ln \left(\frac{\sinh(j+\frac{1}{2})x}{\sinh \frac{1}{2}x} \right)$$

تصویر کوانتومی

مقدار متوسط گشتاور دوقطبی

$$\langle M\rangle = -\beta g\mu_B \frac{\partial F}{\partial x}, \quad x = \beta g\mu_B H$$

$$F(x) = -Nk_B T \ln\left(\frac{\sinh(j+\frac{1}{2})x}{\sinh\frac{1}{2}x}\right)$$

$$\langle M\rangle = Ng\mu_B\left((j+\frac{1}{2})\frac{\cosh(j+\frac{1}{2})x}{\sinh(j+\frac{1}{2})x} - \frac{1}{2}\frac{\cosh\frac{1}{2}x}{\sinh\frac{1}{2}x}\right), \quad x = \beta g\mu_B H$$

$$\langle M\rangle = Ng\mu_B\left((j+\frac{1}{2})\coth(j+\frac{1}{2})x - \frac{1}{2}\coth\frac{1}{2}x\right), \quad x = \beta g\mu_B H$$

پارامغناطیس

تصویر کوانتومی

مقدار متوسط گشتاور دوقطبی

$$\langle M\rangle = Ng\mu_B\left((j+\frac{1}{2})\coth(j+\frac{1}{2})x - \frac{1}{2}\coth\frac{1}{2}x\right), \quad x=\beta g\mu_B H$$

$$\langle M\rangle = Ng\mu_B\left[(j+\frac{1}{2})\coth(j+\frac{1}{2})\beta g\mu_B H - \frac{1}{2}\coth\frac{1}{2}\beta g\mu_B H\right]$$

$$\langle M\rangle = Ng\mu_B\left[j(1+\frac{1}{2j})\coth(1+\frac{1}{2j})\beta g\mu_B Hj - j\frac{1}{2j}\coth\frac{1}{2j}\beta g\mu_B Hj\right]$$

$$\langle M\rangle = Ng\mu_B j\left[(1+\frac{1}{2j})\coth(1+\frac{1}{2j})\beta g\mu_B Hj - \frac{1}{2j}\coth\frac{1}{2j}\beta g\mu_B Hj\right]$$

تصویر کوانتومی

مقدار متوسط گشتاور دوقطبی

$$\langle M\rangle = Ng\mu_B j\left[(1+\frac{1}{2j})\coth(1+\frac{1}{2j})\beta g\mu_B Hj - \frac{1}{2j}\coth\frac{1}{2j}\beta g\mu_B Hj\right]$$

$$\boxed{\langle M\rangle = Ng\mu_B j\left[(1+\frac{1}{2j})\coth(1+\frac{1}{2j})y - \frac{1}{2j}\coth\frac{1}{2j}y\right], \quad y=\beta g\mu_B Hj}$$

تعریف تابع بریلوئن $B_j(y)$

$$B_j(y) = (1+\frac{1}{2j})\coth(1+\frac{1}{2j})y - \frac{1}{2j}\coth\frac{1}{2j}y$$

بنابراین

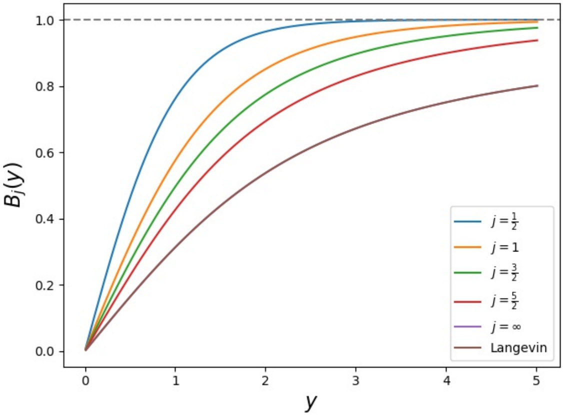
$$\langle M\rangle = Ng\mu_B jB_j(y), \quad y=\beta g\mu_B Hj$$

پارامغناطیس

تصویر کوانتومی

تابع بریلوئن

$$B_j(y) = (1+\frac{1}{2j})\coth(1+\frac{1}{2j})y - \frac{1}{2j}\coth\frac{1}{2j}y$$

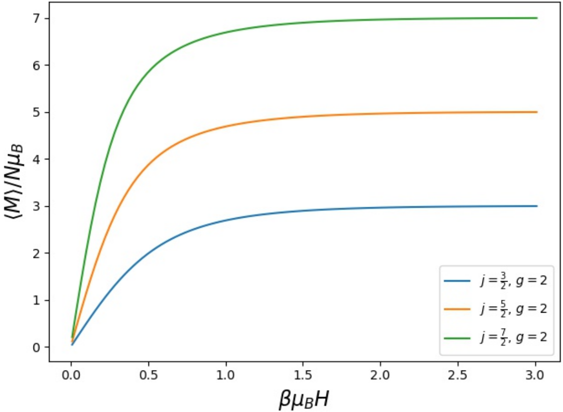


پارامغناطیس

تصویر کوانتومی

مقدار متوسط گشتاور دوقطبی

$$\langle M \rangle = Ng\mu_B j B_j(y), \quad y = \beta g \mu_B H j$$



پارامغناطیس

تصویر کوانتومی
مقدار متوسط گشتاور دوقطبی

$$\langle M \rangle = Ng\mu_B \left((j+\frac{1}{2}) \coth(j+\frac{1}{2})x - \frac{1}{2} \coth \frac{1}{2} x \right), \quad x = \beta g \mu_B H$$

در حد میدانهای کوچک $H \to 0$:

$$\langle M \rangle \simeq Ng\mu_B \left[\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3}(j+\frac{1}{2})^2 x + \cdots \right) - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{12} x + \cdots \right) \right]$$

$$\langle M \rangle \simeq \frac{Ng\mu_B j(j+1)}{3} x + \cdots$$

$$\langle M \rangle \simeq \frac{Ng^2\mu_B^2 j(j+1)}{3k_B T} H + \cdots$$

پارامغناطیس

تصویر کوانتومی
مقدار متوسط گشتاور دوقطبی در حد میدانهای کوچک

$$\langle M \rangle \simeq \frac{Ng^2\mu_B^2 j(j+1)}{3k_B T} H + \cdots$$

پذیرفتاری مغناطیسی

$$\chi = \lim_{H\to 0} \frac{\partial \langle M \rangle}{\partial H}$$

$$\boxed{\chi = \frac{Ng^2\mu_B^2 j(j+1)}{3k_B T} = \frac{C}{T}, \qquad C = \frac{Ng^2\mu_B^2 j(j+1)}{3k_B}}$$

تصویر کلاسیکی پذیرفتاری مغناطیسی

$$\chi = \frac{N\mu^2}{3k_B T} = \frac{C}{T}, \qquad C = \frac{N\mu^2}{3k_B}$$