

مکانیک آماری

جلسه بیست و چهارم

محمد رضا مظفری

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

اسفند ۹۹

گاز الکترونی در غیاب میدان مغناطیسی ($H = 0$)

$$\epsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

چگالی حالتها

$$g(\epsilon) = 2 \sum_k \delta(\epsilon - \epsilon_k)$$

$$\sum_k \rightarrow V \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

$$g(\epsilon) = \frac{2V}{(2\pi)^3} \int d^3k \delta(\epsilon - \epsilon_k), \quad d^3k = 4\pi k^2 dk$$

$$g(\epsilon) = \frac{V}{\pi^2} \int k^2 dk \delta\left(\epsilon - \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right)$$

گاز الکترونی در غیاب میدان مغناطیسی ($H = 0$)

$$\epsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

چگالی حالتها

$$g(\epsilon) = \frac{V}{\pi^2} \int k^2 dk \delta\left(\epsilon - \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right)$$

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}, \quad f(x_i)$$

$$\epsilon - \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} = 0 \Rightarrow k_0 = \sqrt{\frac{2m\epsilon}{\hbar^2}}$$

$$\delta\left(\epsilon - \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right) = \frac{\delta(k - k_0)}{\frac{\hbar^2 k_0}{m}}$$

گاز الکترونی در غیاب میدان مغناطیسی ($H = 0$)

$$\epsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

چگالی حالتها

$$g(\epsilon) = \frac{V}{\pi^2} \int k^2 dk \delta\left(\epsilon - \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right)$$

$$\delta\left(\epsilon - \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right) = \frac{\delta(k - k_0)}{\frac{\hbar^2 k_0}{m}}, \quad k_0 = \sqrt{\frac{2m\epsilon}{\hbar^2}}$$

$$g(\epsilon) = \frac{V}{\pi^2} \int k^2 dk \frac{\delta(k - k_0)}{\frac{\hbar^2 k_0}{m}} = \frac{V}{\pi^2} \frac{m}{\hbar^2 k_0} \int k^2 dk \delta(k - k_0)$$

$$g(\epsilon) = \frac{V}{\pi^2} \frac{m}{\hbar^2 k_0} k_0^2 = \frac{V}{\pi^2} \frac{m}{\hbar^2} k_0 = \frac{V}{\pi^2} \frac{m}{\hbar^2} \sqrt{\frac{2m\epsilon}{\hbar^2}} = \frac{V}{2\pi^2} \frac{2m}{\hbar^2} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} \sqrt{\epsilon}$$

گاز الکترونی در غیاب میدان مغناطیسی ($H = 0$)

$$\epsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

چگالی حالتها

$$g(\epsilon) = \frac{V}{2\pi^2} \frac{2m}{\hbar^2} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} \sqrt{\epsilon}$$

$$g(\epsilon) = \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{\epsilon}$$

مقدار چشمداشتی انرژی و تعداد ذرات

$$U = \int_0^\infty \epsilon g(\epsilon) f_{\text{FD}}(\epsilon) d\epsilon$$

$$N = \int_0^\infty g(\epsilon) f_{\text{FD}}(\epsilon) d\epsilon$$

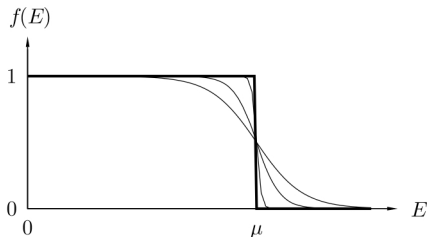
گاز الکترونی در غیاب میدان مغناطیسی ($H = 0$)
چگالی حالتها

$$g(\epsilon) = \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{\epsilon}$$

مقدار چشمداشتی انرژی و تعداد ذرات

$$U = \int_0^{\infty} \epsilon g(\epsilon) f_{\text{FD}}(\epsilon) d\epsilon, \quad N = \int_0^{\infty} g(\epsilon) f_{\text{FD}}(\epsilon) d\epsilon$$

$$f_{\text{FD}}(\epsilon) = \frac{1}{1 + e^{\beta(\epsilon - \mu)}}$$



گاز الکترونی در غیاب میدان مغناطیسی ($H = 0$)
چگالی حالتها

$$g(\epsilon) = \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{\epsilon}$$

مقدار چشمداشتی انرژی و تعداد ذرات

$$U = \int_0^{\infty} \epsilon g(\epsilon) f_{\text{FD}}(\epsilon) d\epsilon, \quad N = \int_0^{\infty} g(\epsilon) f_{\text{FD}}(\epsilon) d\epsilon$$

در $T \rightarrow 0$ پتانسیل شیمیایی برابر است با انرژی فرمی ($\mu = \epsilon_f$) و توزیع فرمی بصورت زیر داده می‌شود،

$$\mu = \epsilon_f \text{ and } f_{\text{FD}}(\epsilon) = \begin{cases} 1 & \epsilon \leq \epsilon_f \\ 0 & \epsilon > \epsilon_f \end{cases}$$

گاز الکترونی در غیاب میدان مغناطیسی ($H = 0$)
چگالی حالتها

$$g(\epsilon) = \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{\epsilon}$$

مقدار چشمداشتی انرژی و تعداد ذرات در دمای $T \rightarrow 0$

$$U = \int_0^{\epsilon_f} \epsilon g(\epsilon) d\epsilon, \quad N = \int_0^{\epsilon_f} g(\epsilon) d\epsilon$$

$$U = \int_0^{\epsilon_f} \epsilon g(\epsilon) d\epsilon = \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^{\epsilon_f} \epsilon \sqrt{\epsilon} d\epsilon = \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{2}{5} \epsilon_f^{5/2}$$

$$N = \int_0^{\epsilon_f} g(\epsilon) d\epsilon = \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^{\epsilon_f} \sqrt{\epsilon} d\epsilon = \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{2}{3} \epsilon_f^{3/2}$$

گاز الکترونی در غیاب میدان مغناطیسی ($H = 0$)
چگالی حالتها

$$g(\epsilon) = \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{\epsilon}$$

مقدار چشمداشتی انرژی و تعداد ذرات در دمای $T \rightarrow 0$

$$U = \frac{V}{5\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \epsilon_f^{5/2}, \quad N = \frac{V}{3\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \epsilon_f^{3/2}$$

$$\frac{U}{N} = \frac{3}{5} \epsilon_f$$

$$3\pi^2 \frac{N}{V} = \left(\frac{2m\epsilon_f}{\hbar^2} \right)^{3/2} = k_f^{3/2}$$

$$U = \frac{3}{5} N \epsilon_f$$

$$\epsilon_f = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3}$$

گاز الکترونی در حضور میدان مغناطیسی ($H \neq 0$)

$$\epsilon_{k,\uparrow} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu_B H, \quad \epsilon_{k,\downarrow} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \mu_B H$$

چگالی حالتها

$$g_{\uparrow}(\epsilon) = \sum_k \delta(\epsilon - \epsilon_{k,\uparrow}), \quad g_{\downarrow}(\epsilon) = \sum_k \delta(\epsilon - \epsilon_{k,\downarrow})$$

$$\sum_k \rightarrow V \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}, \quad d^3 k = 4\pi k^2 dk$$

$$g_{\uparrow\downarrow}(\epsilon) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3 k \delta(\epsilon - \epsilon_{k,\uparrow\downarrow})$$

$$g_{\uparrow\downarrow}(\epsilon) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3 k \delta(\epsilon \pm \mu_B H - \frac{\hbar^2 k^2}{2m})$$

گاز الکترونی در حضور میدان مغناطیسی ($H \neq 0$)

$$\epsilon_{k,\uparrow} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu_B H, \quad \epsilon_{k,\downarrow} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \mu_B H$$

چگالی حالتها

$$g_{\uparrow\downarrow}(\epsilon) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k \delta(\epsilon \pm \mu_B H - \frac{\hbar^2 k^2}{2m})$$

$$g_{\uparrow}(\epsilon) = \frac{V}{2\pi^2} \int k^2 dk \frac{\delta(k - k_0)}{\frac{\hbar^2 k_0}{m}}, \quad k_0 = \sqrt{\frac{2m(\epsilon + \mu_B H)}{\hbar^2}}$$

$$g_{\uparrow}(\epsilon) = \frac{V}{2\pi^2} \frac{m k_0}{\hbar^2}, \quad k_0 = \sqrt{\frac{2m(\epsilon + \mu_B H)}{\hbar^2}}$$

$$g_{\uparrow}(\epsilon) = \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{\epsilon + \mu_B H}$$

گاز الکترونی در حضور میدان مغناطیسی ($H \neq 0$)

$$\epsilon_{k,\uparrow} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu_B H, \quad \epsilon_{k,\downarrow} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \mu_B H$$

چگالی حالتها

$$g_{\uparrow\downarrow}(\epsilon) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k \delta(\epsilon \pm \mu_B H - \frac{\hbar^2 k^2}{2m})$$

$$g_{\downarrow}(\epsilon) = \frac{V}{2\pi^2} \int k^2 dk \frac{\delta(k - k_0)}{\frac{\hbar^2 k_0}{m}}, \quad k_0 = \sqrt{\frac{2m(\epsilon - \mu_B H)}{\hbar^2}}$$

$$g_{\downarrow}(\epsilon) = \frac{V}{2\pi^2} \frac{m k_0}{\hbar^2}, \quad k_0 = \sqrt{\frac{2m(\epsilon - \mu_B H)}{\hbar^2}}$$

$$g_{\downarrow}(\epsilon) = \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{\epsilon - \mu_B H}$$

گاز الکترونی در حضور میدان مغناطیسی ($H \neq 0$)
چگالی حالتها

$$g_{\uparrow}(\epsilon) = \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{\epsilon + \mu_B H}$$

$$g_{\downarrow}(\epsilon) = \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{\epsilon - \mu_B H}$$

اگر

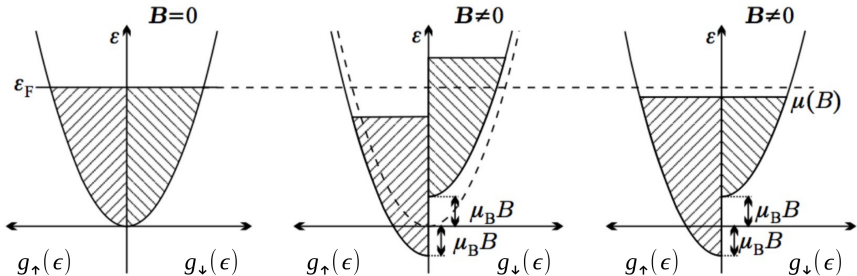
$$g(\epsilon_f) = \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{\epsilon_f}$$

$$g_{\uparrow}(\epsilon) = \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{\epsilon_f} \sqrt{\frac{\epsilon + \mu_B H}{\epsilon_f}} = \frac{1}{2} g(\epsilon_f) \sqrt{\frac{\epsilon + \mu_B H}{\epsilon_f}}$$

$$g_{\downarrow}(\epsilon) = \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{\epsilon_f} \sqrt{\frac{\epsilon - \mu_B H}{\epsilon_f}} = \frac{1}{2} g(\epsilon_f) \sqrt{\frac{\epsilon - \mu_B H}{\epsilon_f}}$$

گاز الکترونی در حضور میدان مغناطیسی ($H \neq 0$)
چگالی حالتها

$$g_{\uparrow\downarrow}(\epsilon) = \frac{1}{2}g(\epsilon_f) \sqrt{\frac{\epsilon \pm \mu_B H}{\epsilon_f}}$$



<https://spot.colorado.edu/~radzihov>

گاز الکترونی در حضور میدان مغناطیسی ($H \neq 0$)
چگالی حالتها

$$g_{\uparrow\downarrow}(\epsilon) = \frac{1}{2}g(\epsilon_f)\sqrt{\frac{\epsilon \pm \mu_B H}{\epsilon_f}}$$

محاسبه گشتاور دو قطبی $M = \mu_B(N_{\uparrow} - N_{\downarrow})$

$$N_{\uparrow} = \int_{-\mu_B H}^{\infty} g_{\uparrow}(\epsilon) f_{FD}(\epsilon) d\epsilon$$

$$N_{\downarrow} = \int_{\mu_B H}^{\infty} g_{\downarrow}(\epsilon) f_{FD}(\epsilon) d\epsilon$$

در دمای $T \rightarrow 0$

$$\mu = \epsilon_f \text{ and } f_{FD}(\epsilon) = \begin{cases} 1 & \epsilon \leq \epsilon_f \\ 0 & \epsilon > \epsilon_f \end{cases}$$

$$N_{\uparrow} = \int_{-\mu_B H}^{\epsilon_f} g_{\uparrow}(\epsilon) d\epsilon$$

$$N_{\downarrow} = \int_{\mu_B H}^{\epsilon_f} g_{\downarrow}(\epsilon) d\epsilon$$

گاز الکترونی در حضور میدان مغناطیسی ($H \neq 0$)
چگالی حالتها

$$g_{\uparrow\downarrow}(\epsilon) = \frac{1}{2}g(\epsilon_f) \sqrt{\frac{\epsilon \pm \mu_B H}{\epsilon_f}}$$

محاسبه گشتاور دو قطبی $M = \mu_B(N_{\uparrow} - N_{\downarrow})$ در دمای $T \rightarrow 0$

$$N_{\uparrow} = \int_{-\mu_B H}^{\epsilon_f} g_{\uparrow}(\epsilon) d\epsilon = \frac{1}{2}g(\epsilon_f) \frac{1}{\sqrt{\epsilon_f}} \int_{-\mu_B H}^{\epsilon_f} \sqrt{\epsilon + \mu_B H} d\epsilon$$

$$N_{\downarrow} = \int_{\mu_B H}^{\epsilon_f} g_{\downarrow}(\epsilon) d\epsilon = \frac{1}{2}g(\epsilon_f) \frac{1}{\sqrt{\epsilon_f}} \int_{\mu_B H}^{\epsilon_f} \sqrt{\epsilon - \mu_B H} d\epsilon$$

$$x = \epsilon + \mu_B H \Rightarrow dx = d\epsilon, \quad N_{\uparrow} = \frac{1}{2}g(\epsilon_f) \frac{1}{\sqrt{\epsilon_f}} \int_0^{\epsilon_f + \mu_B H} \sqrt{x} dx$$

$$y = \epsilon - \mu_B H \Rightarrow dy = d\epsilon, \quad N_{\downarrow} = \frac{1}{2}g(\epsilon_f) \frac{1}{\sqrt{\epsilon_f}} \int_0^{\epsilon_f - \mu_B H} \sqrt{y} dy$$

گاز الکترونی در حضور میدان مغناطیسی ($H \neq 0$)
چگالی حالتها

$$g_{\uparrow\downarrow}(\epsilon) = \frac{1}{2}g(\epsilon_f)\sqrt{\frac{\epsilon \pm \mu_B H}{\epsilon_f}}$$

محاسبه گشتاور دو قطبی $M = \mu_B(N_{\uparrow} - N_{\downarrow})$ در دمای $T \rightarrow 0$

$$N_{\uparrow} = \frac{1}{2}g(\epsilon_f)\frac{1}{\sqrt{\epsilon_f}}\int_0^{\epsilon_f + \mu_B H}\sqrt{x}dx = \frac{1}{3}g(\epsilon_f)\epsilon_f\left(\frac{\epsilon_f + \mu_B H}{\epsilon_f}\right)^{3/2}$$

$$N_{\downarrow} = \frac{1}{2}g(\epsilon_f)\frac{1}{\sqrt{\epsilon_f}}\int_0^{\epsilon_f - \mu_B H}\sqrt{y}dy = \frac{1}{3}g(\epsilon_f)\epsilon_f\left(\frac{\epsilon_f - \mu_B H}{\epsilon_f}\right)^{3/2}$$

می دانیم

$$g(\epsilon_f) = \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\sqrt{\epsilon_f}$$

گاز الکترونی در حضور میدان مغناطیسی ($H \neq 0$)
چگالی حالتها

$$g_{\uparrow\downarrow}(\epsilon) = \frac{1}{2}g(\epsilon_f) \sqrt{\frac{\epsilon \pm \mu_B H}{\epsilon_f}}$$

محاسبه گشتاور دو قطبی ($M = \mu_B(N_{\uparrow} - N_{\downarrow})$) در دمای $T \rightarrow 0$

$$N_{\uparrow} = \frac{V}{6\pi^2\hbar^3} [2m(\epsilon_f + \mu_B H)]^{3/2}$$

$$N_{\downarrow} = \frac{V}{6\pi^2\hbar^3} [2m(\epsilon_f - \mu_B H)]^{3/2}$$

$$M = \mu_B(N_{\uparrow} - N_{\downarrow}) = \frac{V\mu_B}{6\pi^2\hbar^3} \left([2m(\epsilon_f + \mu_B H)]^{3/2} - [2m(\epsilon_f - \mu_B H)]^{3/2} \right)$$

گاز الکترونی در حضور میدان مغناطیسی ($H \neq 0$)
چگالی حالتها

$$g_{\uparrow\downarrow}(\epsilon) = \frac{1}{2}g(\epsilon_f) \sqrt{\frac{\epsilon \pm \mu_B H}{\epsilon_f}}$$

گشتاور دو قطبی در دمای $T \rightarrow 0$

$$M = \frac{V\mu_B}{6\pi^2\hbar^3} \left([2m(\epsilon_f + \mu_B H)]^{3/2} - [2m(\epsilon_f - \mu_B H)]^{3/2} \right)$$

پذیرفتاری مغناطیسی

$$\chi = \lim_{H \rightarrow 0} \frac{\partial M}{\partial H}$$

$$\chi = \frac{V\mu_B^2}{2\pi^2\hbar^3} (2m)^{3/2} \sqrt{\epsilon_f} = \chi_0$$

گاز الکترونی در حضور میدان مغناطیسی ($H \neq 0$)
چگالی حالتها

$$g_{\uparrow\downarrow}(\epsilon) = \frac{1}{2}g(\epsilon_f) \sqrt{\frac{\epsilon \pm \mu_B H}{\epsilon_f}}$$

وابستگی دمایی گشتاور دو قطبی در دماهای پایین $M = \mu_B(N_{\uparrow} - N_{\downarrow})$

$$N_{\uparrow} = \int_{-\mu_B H}^{\infty} g_{\uparrow}(\epsilon) f_{\text{FD}}(\epsilon) d\epsilon$$

$$N_{\downarrow} = \int_{\mu_B H}^{\infty} g_{\downarrow}(\epsilon) f_{\text{FD}}(\epsilon) d\epsilon$$

$$N_{\uparrow} = \int_{-\mu_B H}^{\infty} g_{\uparrow}(\epsilon) f_{\text{FD}}(\epsilon) d\epsilon = \frac{1}{2}g(\epsilon_f) \frac{1}{\sqrt{\epsilon_f}} \int_{-\mu_B H}^{\infty} \sqrt{\epsilon + \mu_B H} f_{\text{FD}}(\epsilon) d\epsilon$$

$$N_{\downarrow} = \int_{\mu_B H}^{\infty} g_{\downarrow}(\epsilon) f_{\text{FD}}(\epsilon) d\epsilon = \frac{1}{2}g(\epsilon_f) \frac{1}{\sqrt{\epsilon_f}} \int_{\mu_B H}^{\infty} \sqrt{\epsilon - \mu_B H} f_{\text{FD}}(\epsilon) d\epsilon$$

گاز الکترونی در حضور میدان مغناطیسی ($H \neq 0$)
چگالی حالتها

$$g_{\uparrow\downarrow}(\epsilon) = \frac{1}{2}g(\epsilon_f) \sqrt{\frac{\epsilon \pm \mu_B H}{\epsilon_f}}$$

وابستگی دمایی گشتاور دو قطبی در دماهای پایین $M = \mu_B(N_{\uparrow} - N_{\downarrow})$

$$N_{\uparrow} = \frac{1}{2}g(\epsilon_f) \frac{1}{\sqrt{\epsilon_f}} \int_{-\mu_B H}^{\infty} \sqrt{\epsilon + \mu_B H} f_{FD}(\epsilon) d\epsilon$$

$$N_{\downarrow} = \frac{1}{2}g(\epsilon_f) \frac{1}{\sqrt{\epsilon_f}} \int_{\mu_B H}^{\infty} \sqrt{\epsilon - \mu_B H} f_{FD}(\epsilon) d\epsilon$$

$$x = \epsilon + \mu_B H \Rightarrow dx = d\epsilon, \quad N_{\uparrow} = \frac{1}{2}g(\epsilon_f) \frac{1}{\sqrt{\epsilon_f}} \int_0^{\infty} \sqrt{x} f_{FD}(x - \mu_B H) dx$$

$$y = \epsilon - \mu_B H \Rightarrow dy = d\epsilon, \quad N_{\downarrow} = \frac{1}{2}g(\epsilon_f) \frac{1}{\sqrt{\epsilon_f}} \int_0^{\infty} \sqrt{y} f_{FD}(y + \mu_B H) dy$$

گاز الکترونی در حضور میدان مغناطیسی ($H \neq 0$)

وابستگی دمایی گشتاور دو قطبی در دماهای پایین $M = \mu_B(N_{\uparrow} - N_{\downarrow})$

$$N_{\uparrow} = \frac{1}{2}g(\epsilon_f) \frac{1}{\sqrt{\epsilon_f}} \int_0^{\infty} \sqrt{x} f_{FD}(x - \mu_B H) dx$$

$$N_{\uparrow} = \frac{1}{2}g(\epsilon_f) \frac{1}{\sqrt{\epsilon_f}} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{1 + e^{\beta[x - (\epsilon_f + \mu_B H)]}} dx$$

با استفاده از بسط سامرفلد

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{1 + e^{\beta[x - (\epsilon_f + \mu_B H)]}} dx = \frac{2}{3}(\epsilon_f + \mu_B H)^{3/2} + \frac{\pi^2}{6}(k_B T)^2 \frac{1}{2\sqrt{\epsilon_f + \mu_B H}} + \dots$$

$$N_{\uparrow} = \frac{1}{2}g(\epsilon_f) \frac{1}{\sqrt{\epsilon_f}} \left[\frac{2}{3}(\epsilon_f + \mu_B H)^{3/2} + \frac{\pi^2}{12}(k_B T)^2 \frac{1}{\sqrt{\epsilon_f + \mu_B H}} + \dots \right]$$

گاز الکترونی در حضور میدان مغناطیسی ($H \neq 0$)

وابستگی دمایی گشتاور دوقطبی در دماهای پایین $M = \mu_B(N_{\uparrow} - N_{\downarrow})$

$$N_{\downarrow} = \frac{1}{2}g(\epsilon_f) \frac{1}{\sqrt{\epsilon_f}} \int_0^{\infty} \sqrt{y} f_{FD}(y + \mu_B H) dy$$

$$N_{\downarrow} = \frac{1}{2}g(\epsilon_f) \frac{1}{\sqrt{\epsilon_f}} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{y}}{1 + e^{\beta[y - (\epsilon_f - \mu_B H)]}} dy$$

با استفاده از بسط سامرفلد

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{y}}{1 + e^{\beta[y - (\epsilon_f - \mu_B H)]}} dx = \frac{2}{3}(\epsilon_f - \mu_B H)^{3/2} + \frac{\pi^2}{6}(k_B T)^2 \frac{1}{2\sqrt{\epsilon_f - \mu_B H}} + \dots$$

$$N_{\downarrow} = \frac{1}{2}g(\epsilon_f) \frac{1}{\sqrt{\epsilon_f}} \left[\frac{2}{3}(\epsilon_f - \mu_B H)^{3/2} + \frac{\pi^2}{12}(k_B T)^2 \frac{1}{\sqrt{\epsilon_f - \mu_B H}} + \dots \right]$$

گاز الکترونی در حضور میدان مغناطیسی ($H \neq 0$)

وابستگی دمایی گشتاور دو قطبی در دماهای پایین ($N_{\uparrow} - N_{\downarrow}$)

$$M = \mu_B(N_{\uparrow} - N_{\downarrow})$$

$$N_{\uparrow} = \frac{1}{2}g(\epsilon_f) \frac{1}{\sqrt{\epsilon_f}} \left[\frac{2}{3}(\epsilon_f + \mu_B H)^{3/2} + \frac{\pi^2}{12}(k_B T)^2 \frac{1}{\sqrt{\epsilon_f + \mu_B H}} + \dots \right]$$

$$N_{\downarrow} = \frac{1}{2}g(\epsilon_f) \frac{1}{\sqrt{\epsilon_f}} \left[\frac{2}{3}(\epsilon_f - \mu_B H)^{3/2} + \frac{\pi^2}{12}(k_B T)^2 \frac{1}{\sqrt{\epsilon_f - \mu_B H}} + \dots \right]$$

$$M = \mu_B \frac{1}{2}g(\epsilon_f) \frac{1}{\sqrt{\epsilon_f}} \left[\frac{2}{3} \left((\epsilon_f + \mu_B H)^{3/2} - (\epsilon_f - \mu_B H)^{3/2} \right) + \frac{\pi^2}{12}(k_B T)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon_f + \mu_B H}} - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_f - \mu_B H}} \right) + \dots \right]$$

گاز الکترونی در حضور میدان مغناطیسی ($H \neq 0$)
وابستگی دمایی گشتاور دو قطبی در دماهای پایین

$$M = \mu_B \frac{1}{2} g(\epsilon_f) \frac{1}{\sqrt{\epsilon_f}} \left[\frac{2}{3} \left((\epsilon_f + \mu_B H)^{3/2} - (\epsilon_f - \mu_B H)^{3/2} \right) + \frac{\pi^2}{12} (k_B T)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon_f + \mu_B H}} - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_f - \mu_B H}} \right) + \dots \right]$$

پذیرفتاری مغناطیسی در دماهای پایین

$$\chi = \lim_{H \rightarrow 0} \frac{\partial M}{\partial H}$$

$$\chi = \mu_B \frac{1}{2} g(\epsilon_f) \frac{1}{\sqrt{\epsilon_f}} \left[\frac{2}{3} \left(\frac{3}{2} \mu_B \sqrt{\epsilon_f} + \frac{3}{2} \mu_B \sqrt{\epsilon_f} \right) + \frac{\pi^2}{12} (k_B T)^2 \left(-\frac{1}{2} \mu_B \epsilon_f^{-3/2} - \frac{1}{2} \mu_B \epsilon_f^{-3/2} \right) + \dots \right]$$

گاز الکترونی در حضور میدان مغناطیسی ($H \neq 0$)
پذیرفتاری مغناطیسی در دماهای پایین

$$\chi = \mu_B \frac{1}{2} g(\epsilon_f) \frac{1}{\sqrt{\epsilon_f}} \left[\frac{2}{3} \left(\frac{3}{2} \mu_B \sqrt{\epsilon_f} + \frac{3}{2} \mu_B \sqrt{\epsilon_f} \right) + \frac{\pi^2}{12} (k_B T)^2 \left(-\frac{1}{2} \mu_B \epsilon_f^{-3/2} - \frac{1}{2} \mu_B \epsilon_f^{-3/2} \right) + \dots \right]$$

$$\chi = \mu_B^2 g(\epsilon_f) \left[1 + \frac{\pi^2}{24} \left(\frac{k_B T}{\epsilon_f} \right)^2 + \dots \right]$$

$$\chi \simeq \frac{V \mu_B^2}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{\epsilon_f} \left[1 + \frac{\pi^2}{24} \left(\frac{k_B T}{\epsilon_f} \right)^2 \right]$$

$$\chi \simeq \chi_0 \left[1 + \frac{\pi^2}{24} \left(\frac{k_B T}{\epsilon_f} \right)^2 \right]$$