مکانیک آماری
جلسه بیست و پنجم

محمدرضا مظفری

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

اسفند ۹۹

فرومغناطیس

۱ برخلاف اتمهای پارامغناطیس که فقط با میدان مغناطیسی خارجی برهمکنش می کنند. اسپین‌های اتمی در مواد فرومغناطیس علاوه بر میدان خارجی با یکدیگر نیز برهمکنش می‌کنند.

۲ برهمکنشهای اسپینی از خواص مکانیک کوانتومی نشات می‌گیرد. این برهمکنش‌ها که برهمکنش‌های تبادلی exchange نامیده می‌شوند، برای اسپین‌های iام و jام متناسب با $\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$ است.

۳ در حضور میدان خارجی اعمالی انرژي یک سیستم فرومغناطیسی بصورت زیر داده می‌شود،

$$E = -\sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j - \sum_i g\mu_B \vec{S}_i \cdot \vec{H}$$

هامیلتونی بالا به مدل هایزنبرگ شناخته می‌شود. علامت $\langle ij \rangle$ نشان می‌دهد که حالت $i = j$ کنارگذاشته می‌شود چون اسپین‌ها فقط با یکدیگر برهمکنش می‌کنند. معمولا برهمکنش‌ها محدود به همسایه اول می‌شود

۴ ضرایب J_{ij}ها انتگرال تبادلی نامیده می‌شود و معمولا برای نزدیکترین همسایه‌ها محاسبه می‌شود.

$$J_{ij} > 0 : \quad \cdots \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow \cdots \quad \text{فرومغناطیس}$$

$$J_{ij} < 0 : \quad \cdots \uparrow\downarrow\uparrow\downarrow \cdots \quad \text{آنتی‌فرومغناطیس}$$

۵ تقریب میدان متوسط (mean field approximation): در این روش به یک اسپین $\vec{S}_i$ برچسب زده می‌شود در حالیکه اسپین های دیگر فقط با مقدار متوسط شان $\langle \vec{S}_j \rangle$ ظاهر می‌شوند.

$$E_i = -\sum_j J_{ij} \vec{S}_i \cdot \langle \vec{S}_j \rangle - g\mu_B \vec{S}_i \cdot \vec{H}$$

فرومغناطیس

۶ تقریب میدان متوسط

$$E_i = -\sum_j J_{ij} \vec{S}_i \cdot \langle \vec{S}_j \rangle - g\mu_B \vec{S}_i \cdot \vec{H}$$

یا

$$E_i = \vec{S}_i \cdot \vec{H}_i^{\text{eff}}$$

که در آن

$$\vec{H}_i^{\text{eff}} = -\sum_j J_{ij} \langle \vec{S}_j \rangle - g\mu_B \vec{H}$$

در عبارت بالا میدان $\vec{H}_i^{\text{eff}}$ میدان موثر روی اسپین iام است. در غیاب میدان اعمالی $\vec{H}$ مقدار $\vec{H}_i^{\text{eff}}$ برابر صفر نیست. این تقریب اولین بار توسط Weiss پیشنهاد شد که آنرا میدان مولکولی Weiss نیز می‌نامند.

۷ انرژي نهایی برابر است با

$$E = \frac{1}{2} \sum_i E_i$$

فرومغناطیس

۸ در ادامه و برای سادگی فقط مولفه‌ی z اسپین را بررسی می‌کنیم که مدل برداری هایزنبرگ به یک مدل شناخته شده‌ی جبری بنام مدل آیزینگ تبدیل می‌شود.

۹ با فرض اینکه میدان خارجی هم در امتداد z باشد، انرژي در مدل آیزینگ بصورت زیر داده می‌شود،

$$E = -\sum_{\langle ij\rangle} J_{ij} S_{zi} S_{zj} - \sum_i g\mu_B S_{zi} H \cdot$$

۱۰ همچنین برای سادگی بیشتر S_z را به S تغییر می‌دهیم،

$$E = -\sum_{\langle ij\rangle} J_{ij} S_i S_j - \sum_i g\mu_B S_i H \cdot$$

۱۱ اعمال تقریب میدان متوسط روی اسپین iام

$$E_i = -\sum_j J_{ij} \langle S_j\rangle S_i - g\mu_B S_i H \cdot$$

فرومغناطیس

۱۲ تقریب میدان متوسط روی اسپین iام

$$E_i = -\sum_j J_{ij} \langle S_j \rangle S_i - g\mu_B S_i H \cdot$$

یا

$$E_i = -g\mu_B S_i H_i^{\text{eff}}$$

که در آن

$$H_i^{\text{eff}} = \frac{1}{g\mu_B} \sum_j J_{ij} \langle S_j \rangle + H$$

در عبارت بالا میدان H_i^{eff} میدان موثر روی اسپین iام است.

۱۳ فرض می‌کنیم که مغناطش همگی اتمها یکسان و هم‌ارز باشند،

$$H_i^{\text{eff}} = \frac{\langle S \rangle}{g\mu_B} \sum_j J_{ij} + H$$

فرومغناطیس

$$H_i^{\text{eff}} = \frac{\langle S \rangle}{g\mu_B} \sum_j J_{ij} + H$$

۱۴ در اینجا ضریب جفت‌شدگی اسپینی J_{ij} را یکسان و محدود به نزدیکترین همسایه در نظر می‌گیریم.

$$\sum_j J_{ij} = pJ \Rightarrow H_i^{\text{eff}} = \frac{\langle S \rangle}{g\mu_B} pJ + H$$

که در آن p تعداد همسایه‌های اول در شبکه تحت بررسی می‌باشد. برای یک زنجیره مقدار p برای با ۲ است و برای یک شبکه مربعی مقدار p برابر ۴ است.

۱۵ میدان موثر مستقل از اسپین می‌باشد،

$$H^{\text{eff}} = \frac{\langle S \rangle}{g\mu_B} pJ + H$$

و فقط تابعی از تعداد همسایه‌های اول می‌باشد.

فرومغناطیس

$$H^{\text{eff}} = \frac{\langle S\rangle}{g\mu_B}pJ + H = \lambda\langle S\rangle + H, \qquad \lambda = \frac{pJ}{g\mu_B}$$

۱۶ انرژي سیستم تحت بررسی بصورت زیر داده می‌شود

$$E = \frac{1}{2}\sum_i E_i = -\frac{1}{2}g\mu_B\sum_i S_i H^{\text{eff}}$$

و

$$E = -\frac{1}{2}g\mu_B H^{\text{eff}}\sum_i S_i$$

۱۵ شکل انرژي بدست آمده برای ماده فرومغناطیس در تقریب میدان متوسط هم‌ارز با شکل انرژي ماده پارامغناطیس در میدان خارجی است.

فرومغناطیس

در یک ماده پارامغناطیس مغناطش نهایی سیستم توسط تابع بریلوئن داده می‌شود،

$$\langle M\rangle = \frac{N}{V} g\mu_B s B_s(\frac{g\mu_B H s}{k_B T}), \quad M_s = \frac{N}{V} g\mu_B s$$

اگر مغناطش را بصورت

$$\langle M\rangle = \frac{N}{V} g\mu_B \langle S\rangle$$

تعریف کنیم، بنابراین

$$\langle S\rangle = s B_s(\frac{g\mu_B H s}{k_B T})$$

در یک ماده فرومغناطیس کافی است H را در تابع بریلوئن به H^{eff} تبدیل کنیم.

$$H \to H^{\text{eff}} : \quad \langle S\rangle = s B_s(\frac{g\mu_B H^{\text{eff}} s}{k_B T})$$

$$\langle S\rangle = s B_s(\frac{g\mu_B \lambda \langle S\rangle s}{k_B T} + \frac{g\mu_B H s}{k_B T})$$

فرومغناطیس

$$\langle S\rangle = sB_s\left(\frac{g\mu_B\lambda\langle S\rangle s}{k_BT} + \frac{g\mu_B Hs}{k_BT}\right), \qquad \lambda = \frac{pJ}{g\mu_B}$$

$$\frac{\langle S\rangle}{s} = B_s\left(\frac{pJs^2}{k_BT}\frac{\langle S\rangle}{s} + \frac{g\mu_B Hs}{k_BT}\right)$$

$$\alpha = \frac{pJs^2}{k_BT}, \quad h = \frac{g\mu_B Hs}{k_BT}$$

$$\frac{\langle S\rangle}{s} = B_s\left(\alpha\frac{\langle S\rangle}{s} + h\right)$$

$$\mu = \frac{\langle S\rangle}{s}$$

$$\boxed{\mu = B_s(\alpha\mu + h), \quad \alpha = \frac{pJs^2}{k_BT}, \quad h = \frac{g\mu_B Hs}{k_BT}, \quad \mu = \frac{\langle S\rangle}{s}}$$

فرومغناطیس

اگر میدان اعمالی برابر با صفر باشد.

$$H = 0,\ \text{or}\ h = 0 \Rightarrow \mu = B_s(\alpha\mu), \quad \alpha = \frac{pJs^2}{k_B T}, \quad \mu = \frac{\langle S \rangle}{s}$$

اگر

$$T_c = \frac{pJs^2}{k_B}$$

بنابراین

$$\mu = B_s(\frac{\mu}{t}), \quad t = \frac{T}{T_c}, \quad \mu = \frac{\langle S \rangle}{s}$$

اگر $s = 1/2$

$$B_{1/2} = \tanh(\mu/t)$$

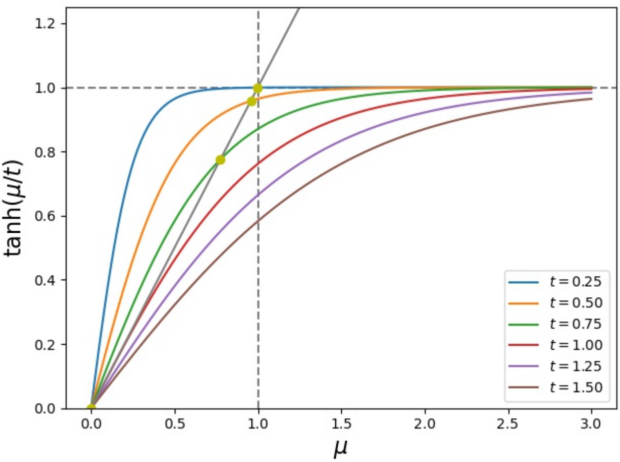
و

$$\boxed{\mu = \tanh(\mu/t)}$$

فرومغناطیس

اگر میدان اعمالی برابر با صفر باشد.

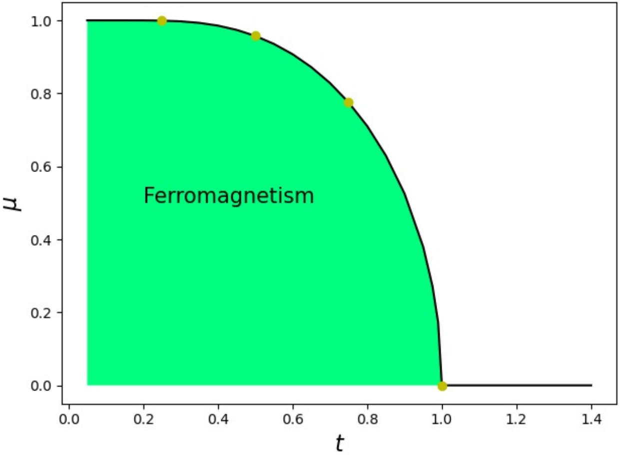
$$\mu = \tanh(\mu/t), \quad t = \frac{T}{T_c}, \quad \mu = \frac{\langle S\rangle}{s}, \quad s = \frac{1}{2}$$



فرومغناطیس

اگر میدان اعمالی برابر با صفر باشد.

$$\mu = \tanh(\mu/t), \quad t = \frac{T}{T_c}, \quad \mu = \frac{\langle S \rangle}{s}, \quad s = \frac{1}{2}$$



فرومغناطیس

$$\mu = \tanh(\mu/t + h), \quad t = \frac{T}{T_c}, \quad \mu = \frac{\langle S \rangle}{s}, \quad s = \frac{1}{2}$$

$$M = \frac{N}{V} g\mu_B \langle S \rangle = \frac{N}{V} g\mu_B s\mu, \quad h = \frac{g\mu_B H s}{k_B T}$$

پذیرفتاری مغناطیسی

$$\chi = \lim_{H\to 0} \frac{\partial M}{\partial H} = \frac{N}{V} \frac{(g\mu_B s)^2}{k_B T} \lim_{h\to 0} \frac{\partial \mu}{\partial h}$$

از طرفین عبارت $\mu = \tanh(\mu/t + h)$ نسبت به h مشتق می‌گیریم،

$$\frac{\partial \mu}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial h} \tanh(\mu/t + h)$$

فرومغناطیس

پذیرفتاری مغناطیسی

$$\chi = \lim_{H\to 0}\frac{\partial M}{\partial H} = \frac{N}{V}\frac{(g\mu_B s)^2}{k_B T}\lim_{h\to 0}\frac{\partial \mu}{\partial h}, \quad s=\frac{1}{2}$$

از طرفین عبارت $\mu = \tanh(\mu/t+h)$ نسبت به h مشتق می‌گیریم،

$$\frac{\partial \mu}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial h}\tanh(\mu/t+h)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial h}\tanh(\mu/t+h) \Rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial h} = \left(\frac{1}{t}\frac{\partial \mu}{\partial h}+1\right)\frac{1}{\cosh^2(\mu/t+h)}$$

در حالت $\mu\to 0$ و $h\to 0$

$$\left(1-\frac{1}{t}\right)\frac{\partial \mu}{\partial h} = 1 \Rightarrow \left(1-\frac{T_c}{T}\right)\frac{\partial \mu}{\partial h} = 1 \Rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial h} = \frac{T}{T-T_c}$$

فرومغناطیس

پذیرفتاری مغناطیسی

$$\chi = \lim_{H\to 0}\frac{\partial M}{\partial H} = \frac{N}{V}\frac{(g\mu_B s)^2}{k_B T}\lim_{h\to 0}\frac{\partial \mu}{\partial h}, \quad s = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial h} = \frac{T}{T - T_c}$$

$$\chi = \frac{N}{V}\frac{(g\mu_B s)^2}{k_B}\frac{1}{T - T_c}$$

$$\chi = \frac{N}{V}\frac{(g\mu_B s)^2}{k_B T_c}\frac{1}{t - 1}$$

$$\chi = \chi_0\frac{1}{t-1}, \quad \chi_0 = \frac{N}{V}\frac{(g\mu_B s)^2}{k_B T_c}$$

فرومغناطیس
پذیرفتاری مغناطیسی

$$\chi = \chi_0 \frac{1}{t-1}, \quad \chi_0 = \frac{N}{V}\frac{(g\mu_B s)^2}{k_B T_c}$$