مکانیک آماری
جلسه بیست و هشتم

محمدرضا مظفری

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

اسفند ۹۹

آنسامبل میکروکانونیک

گاز ایده‌آل فوق نسبیتی تمییزناپذیر: مربوط به ذراتی می‌شود که با جرم صفر و سرعت نور حرکت می کنند(فوتون).

$$\mathcal{H} = \sum_{i}^{N} c|\vec{p}_i|$$

$$|\vec{p}_i| = \sqrt{p_{ix}^2 + p_{iy}^2 + p_{iz}^2}$$

تقریب

$$\langle p_{ix}^2 \rangle = \langle p_{iy}^2 \rangle = \langle p_{iz}^2 \rangle = \frac{1}{3}\langle p_i^2 \rangle$$

$$\sqrt{\langle p_i^2 \rangle} = \sqrt{3\langle p_{ix}^2 \rangle} = \sqrt{3\langle p_{iy}^2 \rangle} = \sqrt{3\langle p_{iz}^2 \rangle}$$

یا

$$\sqrt{\langle p_i^2 \rangle} = \frac{1}{3}\left(\sqrt{3\langle p_{ix}^2 \rangle} + \sqrt{3\langle p_{iy}^2 \rangle} + \sqrt{3\langle p_{iz}^2 \rangle}\right)$$

آنسامبل میکروکانونیک

گاز ایده‌آل فوق نسبیتی تمییزناپذیر

$$\mathcal{H} = \sum_{i}^{N} c|\vec{p}_i|$$

$$|\vec{p}_i| = \sqrt{p_{ix}^2 + p_{iy}^2 + p_{iz}^2}$$

تقریب

$$\sqrt{\langle p_i^2 \rangle} = \frac{1}{3}\left(\sqrt{3\langle p_{ix}^2 \rangle} + \sqrt{3\langle p_{iy}^2 \rangle} + \sqrt{3\langle p_{iz}^2 \rangle}\right)$$

$$\sqrt{\langle p_i^2 \rangle} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\sqrt{\langle p_{ix}^2 \rangle} + \sqrt{\langle p_{iy}^2 \rangle} + \sqrt{\langle p_{iz}^2 \rangle}\right)$$

$$|\vec{p}_i| = \sqrt{p_{ix}^2 + p_{iy}^2 + p_{iz}^2} \approx \frac{\sqrt{3}}{3}(|p_{ix}| + |p_{iy}| + |p_{iz}|)$$

آنسامبل میکروکانونیک

گاز ایده‌آل فوق نسبیتی تمییزناپذیر

$$\mathcal{H} = \sum_i^N c|\vec{p}_i|$$

$$|\vec{p}_i| = \sqrt{p_{ix}^2 + p_{iy}^2 + p_{iz}^2} \approx \frac{\sqrt{3}}{3}(|p_{ix}| + |p_{iy}| + |p_{iz}|)$$

$$\mathcal{H} = \sum_i^N \frac{c}{\sqrt{3}}(|p_{ix}| + |p_{iy}| + |p_{iz}|)$$

حجم نهایی فضای فاز

$$\Phi(E, V, N) = \frac{1}{N!}\frac{1}{h^{3N}}\int_{\mathcal{H}\leq E} \prod_i^{3N} \mathrm{d}q_i \mathrm{d}p_i$$

گاز ایده‌آل فوق نسبیتی تمییزناپذیر

$$\mathcal{H} = \sum_i^N \frac{c}{\sqrt{3}}(|p_{ix}| + |p_{iy}| + |p_{iz}|)$$

$$\Phi(E,V,N) = \frac{1}{N!}\frac{1}{h^{3N}} \int\limits_{\mathcal{H}\leq E} \prod_i^{3N} \mathrm{d}q_i \mathrm{d}p_i$$

$$\Phi(E,V,N) = \frac{1}{N!}\frac{V^N}{h^{3N}} \int\limits_{\frac{c}{\sqrt{3}}(|p_1|+\cdots+|p_{3N}|)\leq E} \mathrm{d}p_1 \cdots \int \mathrm{d}p_{3N}$$

$$\Phi(E,V,N) = \frac{1}{N!}\frac{V^N}{h^{3N}} \int\limits_{\frac{c}{\sqrt{3}E}(|p_1|+\cdots+|p_{3N}|)\leq 1} \mathrm{d}p_1 \cdots \int \mathrm{d}p_{3N}$$

$$y_i = \frac{c}{E\sqrt{3}}p_i \Rightarrow \mathrm{d}p_i = \frac{\sqrt{3}E}{c}\mathrm{d}y_i$$

آنسامبل میکروکانونیک

گاز ایده‌آل فوق نسبیتی تمییزناپذیر

$$\mathcal{H} = \sum_i^N \frac{c}{\sqrt{3}}(|p_{ix}| + |p_{iy}| + |p_{iz}|)$$

$$\Phi(E,V,N) = \frac{1}{N!}\frac{V^N}{h^{3N}} \int\limits_{\frac{c}{\sqrt{3}E}(|p_1|+\cdots+|p_{3N}|)\leq 1} \mathrm{d}p_1 \cdots \int \mathrm{d}p_{3N}$$

$$y_i = \frac{c}{\sqrt{3}E} p_i \Rightarrow \mathrm{d}p_i = \frac{\sqrt{3}E}{c}\mathrm{d}y_i$$

$$\Phi(E,V,N) = \frac{1}{N!}\frac{V^N}{h^{3N}} \left(\frac{\sqrt{3}E}{c}\right)^{3N} \int\limits_{(|y_1|+\cdots+|y_{3N}|)\leq 1} \mathrm{d}y_1 \cdots \int \mathrm{d}y_{3N}$$

$$\int\limits_{(|y_1|+\cdots+|y_{3N}|)\leq 1} \mathrm{d}y_1 \cdots \int \mathrm{d}y_{3N} = ?$$

آنسامبل میکروکانونیک

گاز ایده‌آل فوق نسبیتی تمییزناپذیر

$$V_n = \int\limits_{|q_1|+\cdots+|q_n|\leq R} \mathrm{d}q_1 \cdots \int \mathrm{d}q_n = C_n R^n, \quad C_n = ?$$

$$\mathrm{d}V_n = nC_n R^{n-1}\mathrm{d}R$$

در دوبعد

$$V_2 = \int\limits_{(|x|+|y|)\leq R} \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y = \frac{2^2}{2!}R^2$$

در سه‌بعد

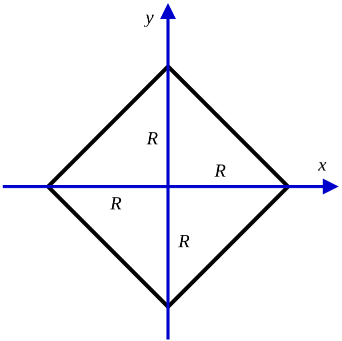
$$V_3 = \int\limits_{(|x|+|y|+|z|)\leq R} \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y \int \mathrm{d}z = \frac{2^3}{3!}R^3$$

با ادامه روند در دوبعد و سه‌بعد انتظار داریم که در nبعد

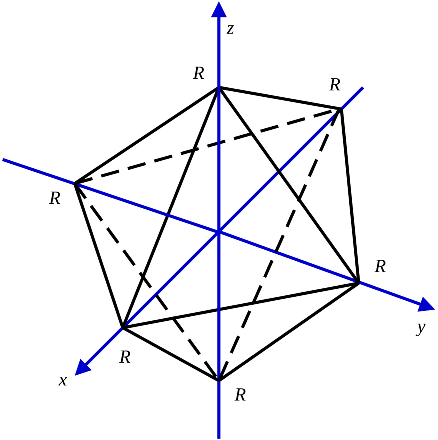
$$V_n = \frac{2^n}{n!}R^n \Rightarrow C_n = \frac{2^n}{n!}$$

آنسامبل میکروکانونیک

گاز ایده‌آل فوق نسبیتی تمییزناپذیر



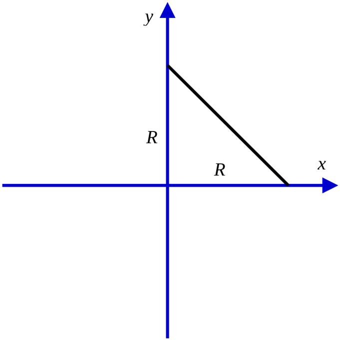
$$4\left(\frac{1}{2}R^2\right)=\frac{4}{2}R^2=\frac{2^2}{2!}R^2$$



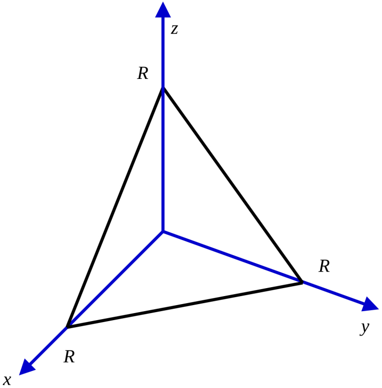
$$8\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}R^2\right)R\right)=\frac{8}{6}R^3=\frac{2^3}{3!}R^3$$

آنسامبل میکروکانونیک

گاز ایده‌آل فوق نسبیتی تمییزناپذیر



$$4\left(\frac{1}{2}R^2\right)=\frac{4}{2}R^2=\frac{2^2}{2!}R^2$$



$$8\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}R^2\right)R\right)=\frac{8}{6}R^3=\frac{2^3}{3!}R^3$$

آنسامبل میکروکانونیک
گاز ایده‌آل فوق نسبیتی تمییزناپذیر

$$V_n = \int\limits_{|q_1|+\cdots+|q_n|\leq R} \mathrm{d}q_1 \cdots \int \mathrm{d}q_n = C_n R^n, \quad C_n =?$$

$$\mathrm{d}V_n = nC_n R^{n-1}\mathrm{d}R$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x_1\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x_n e^{-(x_1+\cdots+x_n)} &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_1}\mathrm{d}x_1\right)\cdots\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_n}\mathrm{d}x_n\right)\\ &= 2^n\left(\int_{0}^{\infty} e^{-x_1}\mathrm{d}x_1\right)\cdots\left(\int_{0}^{\infty} e^{-x_n}\mathrm{d}x_n\right)\\ &= 2^n\left(\int_{0}^{\infty} e^{-x_1}\mathrm{d}x_1\right)^n = 2^n\end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x_1\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x_n e^{-(x_1+\cdots+x_n)} = 2^n \qquad (۱)$$

آنسامبل میکروکانونیک

گاز ایده‌آل فوق نسبیتی تمییزناپذیر

$$V_n = \int\limits_{|q_1|+\cdots+|q_n|\leq R} \mathrm{d}q_1 \cdots \int \mathrm{d}q_n = C_n R^n, \quad C_n = ?$$

$$\mathrm{d}V_n = n C_n R^{n-1} \mathrm{d}R$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_n e^{-(x_1+\cdots+x_n)} &= n C_n \int_0^{\infty} R^{n-1} e^{-R} \mathrm{d}R \\ &= n C_n (n-1)! \\ &= C_n n!\end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_n e^{-(x_1+\cdots+x_n)} = C_n n! \qquad (۲)$$

آنسامبل میکروکانونیک

گاز ایده‌آل فوق نسبیتی تمییزناپذیر

$$V_n = \underset{|q_1|+\cdots+|q_n|\le R}{\int \mathrm{d}q_1 \cdots \int \mathrm{d}q_n} = C_n R^n, \quad C_n = ?$$

$$\mathrm{d}V_n = n C_n R^{n-1} \mathrm{d}R$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_n e^{-(x_1+\cdots+x_n)} = 2^n \quad ①$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_n e^{-(x_1+\cdots+x_n)} = C_n n! \quad ②$$

$$① \text{ and } ② \Rightarrow C_n = \frac{2^n}{n!} \Rightarrow \boxed{V_n = \frac{2^n}{n!} R^n}$$

آنسامبل میکروکانونیک

گاز ایده‌آل فوق نسبیتی تمییزناپذیر

$$\mathcal{H} = \sum_i^N \frac{c}{\sqrt{3}}(|p_{ix}| + |p_{iy}| + |p_{iz}|)$$

$$\Phi(E,V,N) = \frac{1}{N!}\frac{V^N}{h^{3N}}\left(\frac{\sqrt{3}E}{c}\right)^{3N} \int\limits_{(|y_1|+\cdots+|y_{3N}|)\leq 1} \mathrm{d}y_1 \cdots \int \mathrm{d}y_{3N}$$

$$\boxed{\int\limits_{|q_1|+\cdots+|q_n|\leq R} \mathrm{d}q_1 \cdots \int \mathrm{d}q_n = \frac{2^n}{n!}R^n}$$

$$\Phi(E,V,N) = \frac{1}{N!}\frac{V^N}{h^{3N}}\left(\frac{\sqrt{3}E}{c}\right)^{3N} \frac{2^{3N}}{(3N)!}$$

آنسامبل میکروکانونیک

گاز ایده‌آل فوق نسبیتی تمییزناپذیر

$$\mathcal{H} = \sum_{i}^{N} \frac{c}{\sqrt{3}}(|p_{ix}| + |p_{iy}| + |p_{iz}|)$$

$$\Phi(E,V,N) = \frac{1}{N!}\frac{V^N}{h^{3N}}\left(\frac{\sqrt{3}E}{c}\right)^{3N}\frac{2^{3N}}{(3N)!}$$

$$\Phi(E,V,N) = \frac{V^N}{N!}\frac{1}{(3N)!}\left(\frac{2\sqrt{3}E}{hc}\right)^{3N}$$

تعداد حالتها بازای $E \leq \mathcal{H} \leq E + \delta E$

$$\Omega(E,V,N) = \frac{\partial \Phi}{\partial E}\delta E, \quad |\frac{\delta E}{E}| \ll 1$$

آنسامبل میکروکانونیک

گاز ایده‌آل فوق نسبیتی تمییزناپذیر

$$\mathcal{H} = \sum_i^N \frac{c}{\sqrt{3}}(|p_{ix}| + |p_{iy}| + |p_{iz}|)$$

$$\Phi(E, V, N) = \frac{V^N}{N!} \frac{1}{(3N)!} \left(\frac{2\sqrt{3}E}{hc} \right)^{3N}$$

تعداد حالتها بازای $E \leq \mathcal{H} \leq E + \delta E$

$$\Omega(E, V, N) = \frac{\partial \Phi}{\partial E} \delta E, \quad |\frac{\delta E}{E}| \ll 1$$

$$\Omega(E, V, N) = \frac{V^N}{N!} \frac{3N}{(3N)!} \left(\frac{2\sqrt{3}E}{hc} \right)^{3N} \frac{\delta E}{E}$$

آنسامبل میکروکانونیک

گاز ایده‌آل فوق نسبیتی تمییزناپذیر

$$\mathcal{H} = \sum_{i}^{N} \frac{c}{\sqrt{3}} \left(|p_{ix}| + |p_{iy}| + |p_{iz}| \right)$$

$$\Omega(E, V, N) = \frac{V^N}{N!} \frac{3N}{(3N)!} \left(\frac{2\sqrt{3}E}{hc} \right)^{3N} \frac{\delta E}{E}$$

$$\begin{aligned} S = N k_B \ln \left[V \left(\frac{2\sqrt{3}E}{hc} \right)^3 \right] &+ k_B \ln(3N) + k_B \ln \left(\frac{\delta E}{E} \right) \\ &- N k_B \ln N + N k_B \\ &- (3N) k_B \ln(3N) + (3N) k_B \end{aligned}$$

و اینکه

$$|\frac{\delta E}{E}| \ll 1 \Rightarrow \ln \left(\frac{\delta E}{E} \right) \to 0, \quad \ln(3N) \to 0$$

آنسامبل میکروکانونیک

گاز ایده‌آل فوق نسبیتی تمییزناپذیر

$$\mathcal{H} = \sum_{i}^{N} \frac{c}{\sqrt{3}}(|p_{ix}| + |p_{iy}| + |p_{iz}|)$$

$$S = Nk_B \ln\left[\frac{V}{N}\left(\frac{2\sqrt{3}E}{3Nhc}\right)^3\right] + 4Nk_B$$

$$S = Nk_B\left(\ln\left[\frac{V}{N}\left(\frac{2\sqrt{3}E}{3Nhc}\right)^3\right] + 4\right)$$

$$\boxed{S = Nk_B\left(\ln\left[\frac{V}{N}\left(\frac{2E}{\sqrt{3}Nhc}\right)^3\right] + 4\right)}$$

آنسامبل میکروکانونیک

گاز ایده‌آل فوق نسبیتی تمییزناپذیر

$$S = Nk_B\left(\ln\left[\frac{V}{N}\left(\frac{2E}{\sqrt{3}Nhc}\right)^3\right]+4\right)$$

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{N,V} = 3Nk_B\frac{E^{3N-1}}{E^{3N}} = \frac{3Nk_B}{E} \Rightarrow E = 3Nk_BT$$

$$\frac{p}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{N,E} = Nk_B\frac{V^{N-1}}{V^N} = Nk_B\frac{1}{V} \Rightarrow pV = Nk_BT$$

$$pV = Nk_BT \text{ and } E = 3Nk_BT \Rightarrow p = \frac{1}{3}\frac{E}{V}$$

$$-\frac{\mu}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{V,E} = k_B\left(\ln\left[\frac{V}{N}\left(\frac{2E}{\sqrt{3}Nhc}\right)^3\right]+4\right) - 4k_B$$

$$-\frac{\mu}{T} = k_B\ln\left[\frac{V}{N}\left(\frac{2E}{\sqrt{3}Nhc}\right)^3\right]$$

آنسامبل کانونیک

گاز ایده‌آل فوق نسبیتی تمییزناپذیر

$$\mathcal{H} = \sum_{i}^{N} c|\vec{p}_i|$$

$$Z = \frac{1}{N!h^{3N}} \int \mathrm{d}^{3N}p\mathrm{d}^{3N}q e^{-\beta\mathcal{H}(p)}$$

$$Z = \frac{V^N}{N!h^{3N}} \prod_{i}^{N} \int \mathrm{d}^3 p_i e^{-\beta c p_i}$$

$$Z = \frac{V^N}{N!h^{3N}} \left(4\pi \int_0^\infty p^2 e^{-\beta c p} \mathrm{d}p\right)^N = \frac{V^N (4\pi)^N}{N!(\beta h c)^{3N}} \left(\int_0^\infty y^2 e^{-y} \mathrm{d}y\right)^N$$

$$y = \beta c p \Rightarrow \mathrm{d}y = \beta c \mathrm{d}p \Rightarrow \frac{1}{\beta c}\mathrm{d}y = \beta c \mathrm{d}p$$

آنسامبل کانونیک

گاز ایده‌آل فوق نسبیتی تمییزناپذیر

$$\mathcal{H} = \sum_{i}^{N} c|\vec{p}_i|$$

$$Z = \frac{V^N (4\pi)^N}{N!(\beta hc)^{3N}} \left(\int_0^\infty y^2 e^{-y} \mathrm{d}y \right)^N$$

$$\int_0^\infty y^2 e^{-y} \mathrm{d}y = 2!$$

$$Z = \frac{V^N (8\pi)^N}{N!(\beta hc)^{3N}}$$

$$F = -k_B T \ln Z = -N k_B T \ln \left[\frac{V(8\pi)}{(\beta hc)^3} \right] + N k_B T \ln N - N k_B T$$

آنسامبل کانونیک

گاز ایده‌آل فوق نسبیتی تمییزناپذیر

$$\mathcal{H} = \sum_i^N c|\vec{p}_i|$$

$$F = -Nk_BT\ln\left[\frac{V(8\pi)}{(\beta hc)^3}\right] + Nk_BT\ln N - Nk_BT$$

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right) = \frac{Nk_BT}{V} \Rightarrow pV = Nk_BT$$

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right) = Nk_B\ln\left[\frac{V(8\pi)}{(\beta hc)^3}\right] + Nk_BT\frac{3}{T} - Nk_B\ln N + Nk_B$$

$$S = Nk_B\left(\ln\left[\frac{V(8\pi)}{N(\beta hc)^3}\right] + 4\right)$$

گاز ایده‌آل فوق نسبیتی تمییزناپذیر

$$\mathcal{H} = \sum_{i}^{N} c|\vec{p}_i|$$

$$F = -Nk_BT\ln\left[\frac{V(8\pi)}{(\beta hc)^3}\right] + Nk_BT\ln N - Nk_BT$$

$$\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right) = -k_BT\ln\left[\frac{V(8\pi)}{(\beta hc)^3}\right] + k_BT\ln N$$

$$\mu = -k_BT\ln\left[\frac{V(8\pi)}{N(\beta hc)^3}\right]$$

$$E = F+TS = -Nk_BT\left(\ln\left[\frac{V(8\pi)}{N(\beta hc)^3}\right]+1\right)+Nk_BT\left(\ln\left[\frac{V(8\pi)}{N(\beta hc)^3}\right]+4\right)$$

$$E = 3Nk_BT$$

آنسامبل کانونیک

گاز ایده‌آل فوق نسبیتی تمییزناپذیر

$$\mathcal{H} = \sum_{i}^{N} c|\vec{p}_i|$$

$$S = Nk_B\left(\ln\left[\frac{V(8\pi)}{N(\beta hc)^3}\right] + 4\right) = Nk_B\left(\ln\left[\frac{8\pi V}{N}\left(\frac{k_BT}{hc}\right)^3\right] + 4\right)$$

$$E = 3Nk_BT \Rightarrow k_BT = \frac{E}{3N}$$

$$S = Nk_B\left(\ln\left[\frac{8\pi V}{N}\left(\frac{E}{3Nhc}\right)^3\right] + 4\right)$$

رابطه بالا نشان می‌دهد که انتروپی‌های بدست آمده از هر از روش آنسامبل میکروکانونیک و آنسامبل کانونیک با یکدیگر یکسان نیستند.