مکانیک آماری

جلسه بیست و نهم

محمدرضا مظفری

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

اسفند ۹۹

آنسامبل کانونیک
گاز ایده‌آل تمییزناپذیر

$$\mathcal{H} = \sum_i^N \frac{p_i^2}{2m}$$

$$Z = \frac{1}{N!h^{3N}} \int \mathrm{d}^{3N}p\mathrm{d}^{3N}q e^{-\beta\mathcal{H}(p)}$$

$$Z = \frac{V^N}{N!h^{3N}} \prod_i^N \int \mathrm{d}^3p_i e^{-\beta p_i^2/2m}$$

$$Z = \frac{V^N}{N!h^{3N}} \left(4\pi \int_0^\infty p^2 e^{-\beta p^2/2m} \mathrm{d}p\right)^N = \frac{V^N (4\pi)^N}{N!h^{3N}} \left(\frac{1}{4}\sqrt{\pi(2mk_BT)^3}\right)^N$$

$$\int_0^\infty y^2 e^{-\alpha y^2} \mathrm{d}y = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$$

آنسامبل کانونیک

گاز ایده‌آل تمییزناپذیر

$$\mathcal{H} = \sum_i^N \frac{p_i^2}{2m}$$

$$Z = \frac{V^N (4\pi)^N}{N! h^{3N}} \left(\frac{1}{4} \sqrt{\pi (2mk_B T)^3} \right)^N$$

$$Z = \frac{V^N (4\pi)^N}{N! h^{3N}} \left(\frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi^3 (2mk_B T)^3}{\pi^2}} \right)^N$$

$$Z = \frac{V^N}{N! h^{3N}} (2m\pi k_B T)^{3N/2}$$

$$Z = \frac{V^N}{N!} \left(\frac{2m\pi k_B T}{h^2} \right)^{3N/2}$$

آنسامبل کانونیک
گاز ایده‌آل تمییزناپذیر

$$\mathcal{H} = \sum_{i}^{N} \frac{p_i^2}{2m}$$

$$Z = \frac{V^N}{N!} \left(\frac{2m\pi k_B T}{h^2} \right)^{3N/2}$$

طول موج حرارتی

$$\lambda_T = \frac{h}{\sqrt{2m\pi k_B T}}$$

$$Z = \frac{V^N}{N!} \frac{1}{\lambda_T^{3N}} = \frac{1}{N!} \frac{V^N}{\lambda_T^{3N}}$$

$$\boxed{Z = \frac{1}{N!} \left(\frac{V^N}{\lambda_T^3} \right)^N}$$

آنسامبل کانونیک
گاز ایده‌آل تمییزناپذیر

$$\mathcal{H} = \sum_{i}^{N} \frac{p_i^2}{2m}$$

$$Z = \frac{1}{N!}\left(\frac{V^N}{\lambda_T^3}\right)^N , \quad \lambda_T = \frac{h}{\sqrt{2m\pi k_B T}}$$

$$F = -k_B T \ln Z = -N k_B T \ln\left[\frac{V}{\lambda_T^3}\right] + k_B T \ln N!$$

برای Nهای بزرگ

$$\ln N! = N \ln N - N$$

$$F = -k_B T \ln Z = -N k_B T \ln\left[\frac{V}{\lambda_T^3}\right] + N k_B T \ln N - N k_B T$$

$$F = -N k_B T \left(\ln\left[\frac{V}{N\lambda_T^3}\right] + 1\right)$$

آنسامبل کانونیک

گاز ایده‌آل تمییزناپذیر

$$\mathcal{H} = \sum_{i}^{N} \frac{p_i^2}{2m}$$

$$F = -Nk_BT\left(\ln\left[\frac{V}{N\lambda_T^3}\right] + 1\right), \quad \lambda_T = \frac{h}{\sqrt{2m\pi k_BT}}$$

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{N,T} = \frac{Nk_BT}{V} \Rightarrow pV = Nk_BT$$

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{N,V} = Nk_B\left(\ln\left[\frac{V}{N\lambda_T^3}\right] + 1\right) + Nk_BT\left[\left(\frac{-3}{\lambda_T}\right)\frac{h}{\sqrt{2m\pi k_B}}\left(\frac{-1}{2}T^{-3/2}\right)\right]$$

آنسامبل کانونیک
گاز ایده‌آل تمییزناپذیر

$$\mathcal{H} = \sum_{i}^{N} \frac{p_i^2}{2m}$$

$$F = -Nk_BT\left(\ln\left[\frac{V}{N\lambda_T^3}\right] + 1\right), \quad \lambda_T = \frac{h}{\sqrt{2m\pi k_BT}}$$

$$S = Nk_B\left(\ln\left[\frac{V}{N\lambda_T^3}\right] + 1\right) + Nk_BT\left[\left(\frac{-3}{\lambda_T}\right)\frac{h}{\sqrt{2m\pi k_B}}\left(\frac{-1}{2}T^{-3/2}\right)\right]$$

$$S = Nk_B\left(\ln\left[\frac{V}{N\lambda_T^3}\right] + 1\right) + Nk_BT\left[\left(\frac{3}{2\lambda_T}\right)\frac{h}{\sqrt{2m\pi k_BT}}\left(\frac{1}{T}\right)\right]$$

آنسامبل کانونیک
گاز ایده‌آل تمییزناپذیر

$$\mathcal{H} = \sum_{i}^{N} \frac{p_i^2}{2m}$$

$$F = -Nk_BT\left(\ln\left[\frac{V}{N\lambda_T^3}\right]+1\right), \quad \lambda_T = \frac{h}{\sqrt{2m\pi k_BT}}$$

$$S = Nk_B\left(\ln\left[\frac{V}{N\lambda_T^3}\right]+1\right) + Nk_BT\left[\left(\frac{3}{2\lambda_T}\right)\frac{h}{\sqrt{2m\pi k_BT}}\left(\frac{1}{T}\right)\right]$$

$$S = Nk_B\left(\ln\left[\frac{V}{N\lambda_T^3}\right]+1\right) + Nk_BT\left[\left(\frac{3}{2\lambda_T}\right)\lambda_T\left(\frac{1}{T}\right)\right]$$

$$S = Nk_B\left(\ln\left[\frac{V}{N\lambda_T^3}\right]+1\right) + \frac{3}{2}Nk_B$$

آنسامبل کانونیک

گاز ایده‌آل تمییزناپذیر

$$\mathcal{H} = \sum_i^N \frac{p_i^2}{2m}$$

$$F = -Nk_BT\left(\ln\left[\frac{V}{N\lambda_T^3}\right] + 1\right), \quad \lambda_T = \frac{h}{\sqrt{2m\pi k_BT}}$$

$$S = Nk_B\left(\ln\left[\frac{V}{N\lambda_T^3}\right] + 1\right) + \frac{3}{2}Nk_B$$

$$S = Nk_B\left(\ln\left[\frac{V}{N\lambda_T^3}\right] + \frac{5}{2}\right)$$

$$S = Nk_B\left(\ln\left[\frac{V}{N}\left(\frac{2m\pi k_BT}{h^2}\right)^{3/2}\right] + \frac{5}{2}\right)$$

آنسامبل کانونیک

گاز ایده‌آل تمییزناپذیر

$$\mathcal{H} = \sum_{i}^{N} \frac{p_i^2}{2m}$$

$$F = -Nk_BT\left(\ln\left[\frac{V}{N\lambda_T^3}\right] + 1\right), \quad \lambda_T = \frac{h}{\sqrt{2m\pi k_BT}}$$

$$\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{V,T} = -k_BT\left(\ln\left[\frac{V}{N\lambda_T^3}\right] + 1\right) - Nk_BT\frac{-1/N^2}{1/N}$$

$$\mu = -k_BT\left(\ln\left[\frac{V}{N\lambda_T^3}\right] + 1\right) + k_BT$$

$$\mu = -k_BT\ln\left[\frac{V}{N\lambda_T^3}\right]$$

آنسامبل کانونیک
گاز ایده‌آل تمییزناپذیر

$$\mathcal{H} = \sum_i^N \frac{p_i^2}{2m}$$

$$F = -Nk_BT\left(\ln\left[\frac{V}{N\lambda_T^3}\right] + 1\right), \quad \lambda_T = \frac{h}{\sqrt{2m\pi k_BT}}$$

$$S = Nk_B\left(\ln\left[\frac{V}{N\lambda_T^3}\right] + \frac{5}{2}\right)$$

$$F = E - TS \Rightarrow E = F + TS$$

$$E = -Nk_BT\left(\ln\left[\frac{V}{N\lambda_T^3}\right] + 1\right) + Nk_BT\left(\ln\left[\frac{V}{N\lambda_T^3}\right] + \frac{5}{2}\right)$$

$$E = \frac{3}{2}Nk_BT$$

آنسامبل کانونیک

گاز ایده‌آل تمییزناپذیر

$$\mathcal{H} = \sum_{i}^{N} \frac{p_i^2}{2m}$$

$$S = Nk_B \left(\ln \left[\frac{V}{N} \left(\frac{2m\pi k_B T}{h^2} \right)^{3/2} \right] + \frac{5}{2} \right)$$

$$E = \frac{3}{2} N k_B T$$

$$S = Nk_B \left(\ln \left[\frac{V}{N} \left(\frac{4m\pi E}{3Nh^2} \right)^{3/2} \right] + \frac{5}{2} \right)$$

رابطه بالا نشان می‌دهد که انتروپی‌های بدست آمده از هر دو روش آنسامبل میکروکانونیک و آنسامبل کانونیک با یکدیگر یکسان هستند.

آنسامبل کانونیک

نوسانگر هماهنگ ساده تمییزپذیر

$$\mathcal{H} = \sum_i^N \left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} k q_i^2 \right)$$

$$Z = \frac{1}{h^{3N}} \int \mathrm{d}^{3N}p \mathrm{d}^{3N}q e^{-\beta \mathcal{H}(p,q)}$$

$$Z = \frac{1}{h^{3N}} \prod_i^N \left(\int \mathrm{d}^3 p_i e^{-\beta p_i^2/2m} \right) \left(\int \mathrm{d}^3 p_i e^{-\beta k q_i^2/2} \right)$$

$$Z = \frac{1}{h^{3N}} \left(4\pi \int_0^\infty p^2 e^{-\beta p^2/2m} \mathrm{d}p \right)^N \left(4\pi \int_0^\infty q^2 e^{-\beta k q^2/2} \mathrm{d}q \right)^N$$

$$\int_0^\infty y^2 e^{-\alpha y^2} \mathrm{d}y = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$$

آنسامبل کانونیک

نوسانگر هماهنگ ساده تمییزپذیر

$$\mathcal{H}=\sum_{i}^{N}\left(\frac{p_i^2}{2m}+\frac{1}{2}kq_i^2\right)$$

$$Z=\frac{1}{h^{3N}}\left(4\pi\int_0^\infty p^2e^{-\beta p^2/2m}\mathrm{d}p\right)^N\left(4\pi\int_0^\infty q^2e^{-\beta kq^2/2}\mathrm{d}q\right)^N$$

$$\int_0^\infty y^2e^{-\alpha y^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$$

$$Z=\frac{1}{h^{3N}}\left(4\pi\int_0^\infty p^2e^{-\beta p^2/2m}\mathrm{d}p\right)^N\left(4\pi\int_0^\infty q^2e^{-\beta kq^2/2}\mathrm{d}q\right)^N$$

$$Z=\frac{1}{h^{3N}}\left(\pi\sqrt{\pi(2mk_BT)^3}\right)^N\left(\pi\sqrt{\pi\left(\frac{2k_BT}{k}\right)^3}\right)^N$$

آنسامبل کانونیک

نوسانگر هماهنگ ساده تمییزپذیر

$$\mathcal{H} = \sum_{i}^{N} \left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} k q_i^2 \right)$$

$$Z = \frac{1}{h^{3N}} \left(\pi \sqrt{\pi (2mk_BT)^3} \right)^N \left(\pi \sqrt{\pi \left(\frac{2k_BT}{k} \right)^3} \right)^N$$

$$Z = \frac{1}{h^{3N}} \left(\sqrt{(2\pi mk_BT)^3} \right)^N \left(\sqrt{\left(\frac{2\pi k_BT}{k} \right)^3} \right)^N$$

$$Z = \frac{(2\pi)^{3N/2} (2\pi)^{3N/2}}{h^{3N}} \left(\sqrt{\frac{m}{k}} \right)^{3N} (k_BT)^{3N/2} (k_BT)^{3N/2}$$

آنسامبل کانونیک

نوسانگر هماهنگ ساده تمییزپذیر

$$\mathcal{H} = \sum_{i}^{N} \left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} k q_i^2 \right)$$

$$Z = \frac{(2\pi)^{3N/2}(2\pi)^{3N/2}}{h^{3N}} \left(\sqrt{\frac{m}{k}} \right)^{3N} (k_B T)^{3N/2} (k_B T)^{3N/2}$$

$$Z = \frac{(2\pi)^{3N}}{h^{3N}} \left(\sqrt{\frac{m}{k}} \right)^{3N} (k_B T)^{3N}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

$$Z = \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega_0} \right)^{3N}$$

آنسامبل کانونیک
نوسانگر هماهنگ ساده تمییزپذیر

$$\mathcal{H} = \sum_{i}^{N} \left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} k q_i^2 \right)$$

$$Z = \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega_0} \right)^{3N} , \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$F = -k_B T \ln Z = -3N k_B T \ln \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega_0} \right)$$

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_{N,T} = 0$$

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_{N,V} = 3N k_B \ln \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega_0} \right) + 3N k_B T \left(\frac{1}{T} \right)$$

$$S = 3N k_B \left(\ln \left[\frac{k_B T}{\hbar \omega_0} \right] + 1 \right)$$

آنسامبل کانونیک

نوسانگر هماهنگ ساده تمییزپذیر

$$\mathcal{H} = \sum_{i}^{N} \left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} k q_i^2 \right)$$

$$F = -k_B T \ln Z = -3N k_B T \ln \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega_0} \right)$$

$$\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N} \right)_{V,T} = -3 k_B T \ln \left[\frac{k_B T}{\hbar \omega_0} \right]$$

$$\mu = -3 k_B T \ln \left[\frac{k_B T}{\hbar \omega_0} \right]$$

آنسامبل کانونیک

نوسانگر هماهنگ ساده تمییزپذیر

$$\mathcal{H} = \sum_i^N \left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} k q_i^2 \right)$$

$$F = -k_B T \ln Z = -3N k_B T \ln \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega_0} \right)$$

$$S = 3N k_B \left(\ln \left[\frac{k_B T}{\hbar \omega_0} \right] + 1 \right)$$

$$F = E - TS \Rightarrow E = F + TS$$

$$E = -3N k_B T \ln \left[\frac{k_B T}{\hbar \omega_0} \right] + 3N k_B T \left(\ln \left[\frac{k_B T}{\hbar \omega_0} \right] + 1 \right)$$

$$E = 3N k_B T$$

آنسامبل کانونیک

نوسانگر هماهنگ ساده تمییزپذیر

$$\mathcal{H} = \sum_{i}^{N} \left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} k q_i^2 \right)$$

$$S = 3Nk_B \left(\ln \left[\frac{k_B T}{\hbar \omega_0} \right] + 1 \right)$$

$$E = 3Nk_B T$$

$$S = 3Nk_B \left(\ln \left[\frac{E}{3N\hbar \omega_0} \right] + 1 \right)$$

رابطه بالا نشان می‌دهد که انتروپی‌های بدست آمده از هر دو روش آنسامبل میکروکانونیک و آنسامبل کانونیک با یکدیگر یکسان هستند.