آنالیز برداری مقدماتی

محمدرضا مظفری

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مهر ۱۴۰۰

بردارها

بطور کلی کمیتهای فیزیکی به سه دسته تقسیم می‌شوند،

- کمیتهای اسکالر (Scalar)

فقط بزرگی دارند.

مانند: جرم، دما، زمان، انرژی و ...

- کمیتهای برداری (Vector)

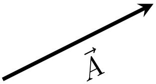
علاوه بر بزرگی شامل جهتگیری فضایی نیز می‌باشند.

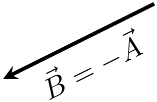
مانند: تغییر مکان، سرعت، شتاب، نیرو، میدان الکتریکی، میدان مغناطیسی و ...

- کمیتهای تانسوری (Tensor)

موکول به آینده ...

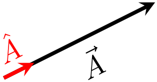
اندازه و جهت

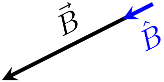




$$A = |\vec{A}|$$

$$B = |\vec{B}| = |-\vec{A}| = A$$

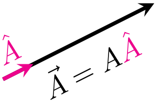




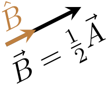
$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{A}, \quad |\hat{A}| = 1$$

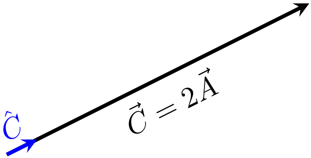
$$\hat{B} = \frac{\vec{B}}{B} = \frac{-\vec{A}}{A} = -\hat{A}, \quad |\hat{B}| = 1$$

اندازه و جهت



$$A = |\vec{A}|, \quad \hat{A} = \frac{\vec{A}}{A}, \quad \vec{A} = A\hat{A}$$





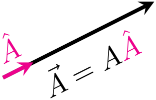
$$B = |\vec{B}| = |\frac{1}{2}\vec{A}| = \frac{1}{2}|\vec{A}| = \frac{1}{2}A$$

$$\hat{B} = \frac{\vec{B}}{B} = \frac{\frac{1}{2}\vec{A}}{\frac{1}{2}A} = \frac{\vec{A}}{A} = \hat{A}$$

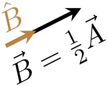
$$C = |\vec{C}| = |2\vec{A}| = 2|\vec{A}| = 2A$$

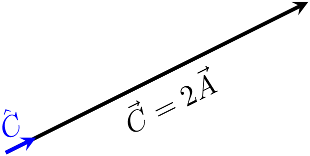
$$\hat{C} = \frac{\vec{C}}{C} = \frac{2\vec{A}}{2A} = \frac{\vec{A}}{A} = \hat{A}$$

اندازه و جهت



$$A = |\vec{A}|, \quad \hat{A} = \frac{\vec{A}}{A}, \quad \vec{A} = A\hat{A}$$





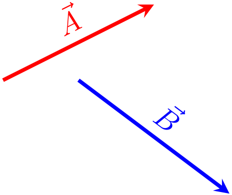
$$B = |\vec{B}| = \frac{1}{2}A, \quad \hat{B} = \hat{A}$$

$$\vec{B} = |\vec{B}|\hat{B} = \frac{1}{2}A\hat{A} = \frac{1}{2}\vec{A}$$

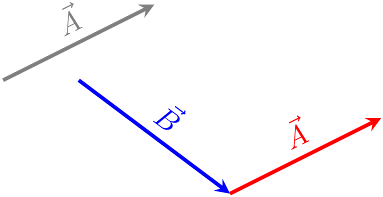
$$C = |\vec{C}| = 2A, \quad \hat{C} = \hat{A}$$

$$\vec{C} = |\vec{C}|\hat{C} = 2A\hat{A} = 2\vec{A}$$

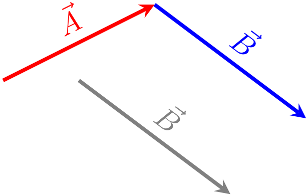
جمع هندسی بردارها



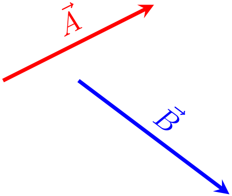
جمع برداری $\vec{B}+\vec{A}$ با روش مثلثی



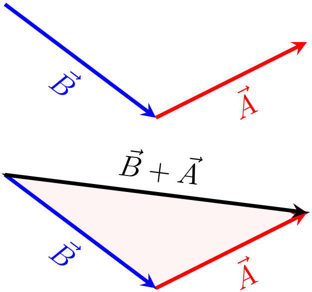
جمع برداری $\vec{A}+\vec{B}$ با روش مثلثی



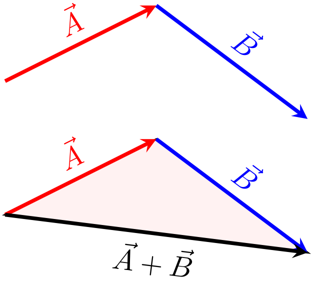
جمع هندسی بردارها



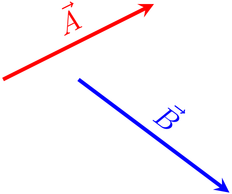
جمع برداری $\vec{B} + \vec{A}$ با روش مثلثی



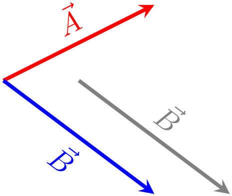
جمع برداری $\vec{A} + \vec{B}$ با روش مثلثی

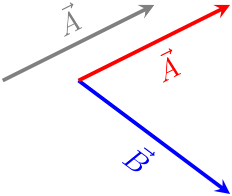


جمع هندسی بردارها

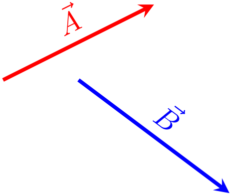


جمع برداری $\vec{A}+\vec{B}$ با روش متوازی الاضلاع

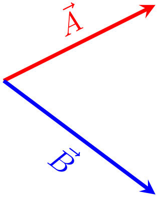


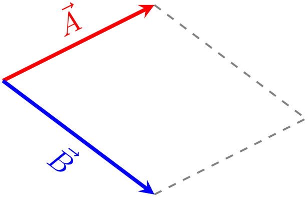


جمع هندسی بردارها

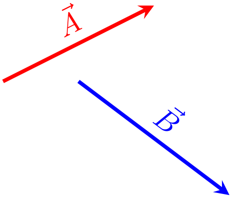


جمع برداری $\vec{A}+\vec{B}$ با روش متوازی الاضلاع

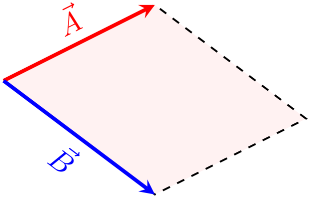


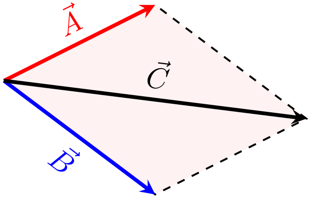


جمع هندسی بردارها

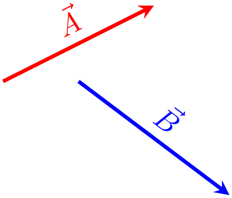


جمع برداری $\vec{B}+\vec{A}$ با روش متوازی الاضلاع

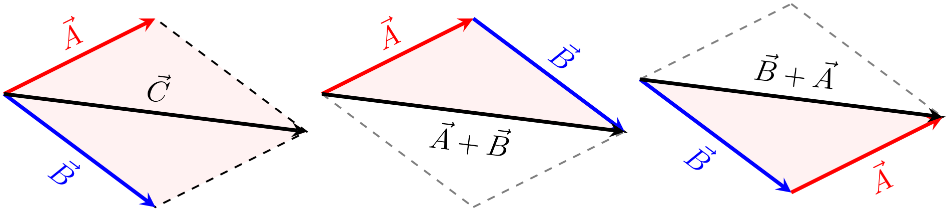




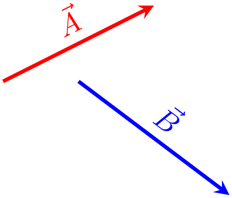
جمع هندسی بردارها



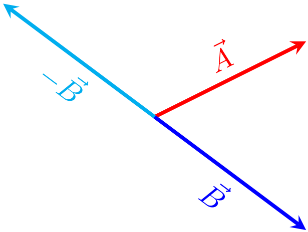
از مقایسه روش مثلثی و روش متوازی الاضلاع نتیجه می‌گیریم که $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

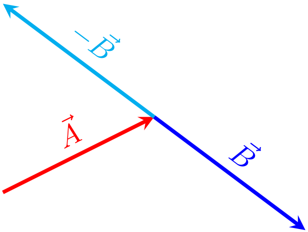


جمع هندسی بردارها

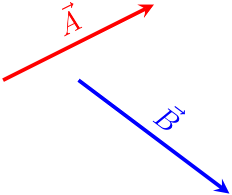


جمع برداری $\vec{A}-\vec{B}$

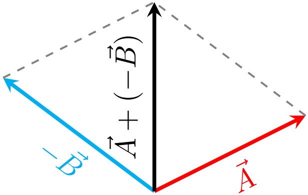


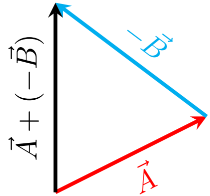


جمع هندسی بردارها

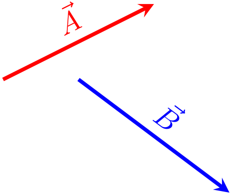


جمع برداری $\vec{A}-\vec{B}$

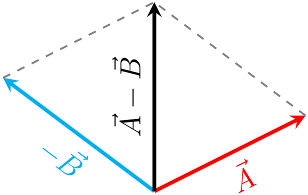


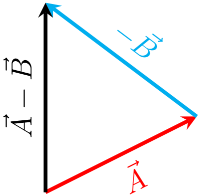


جمع هندسی بردارها

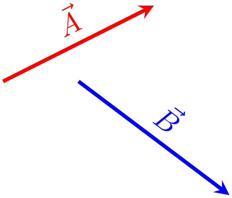


جمع برداری $\vec{A} + (-\vec{B}) = \vec{A} - \vec{B}$

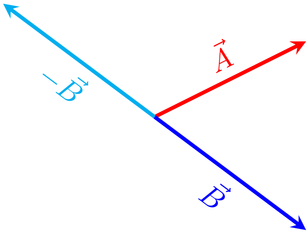


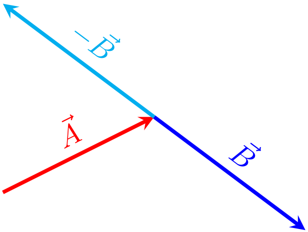


جمع هندسی بردارها

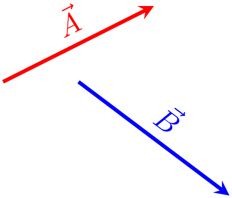


جمع برداری $-\vec{B}+\vec{A}$

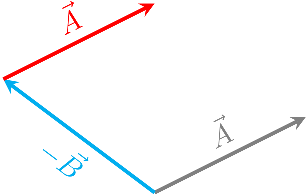


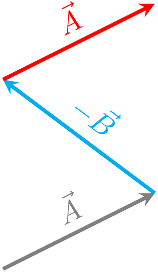


جمع هندسی بردارها

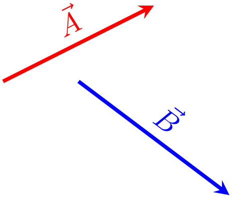


جمع برداری $-\vec{B}+\vec{A}$

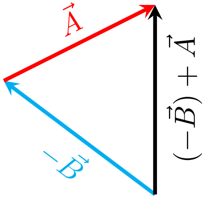


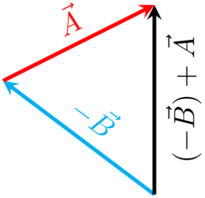


جمع هندسی بردارها

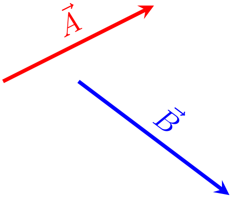


جمع برداری $\vec{A} + -\vec{B}$

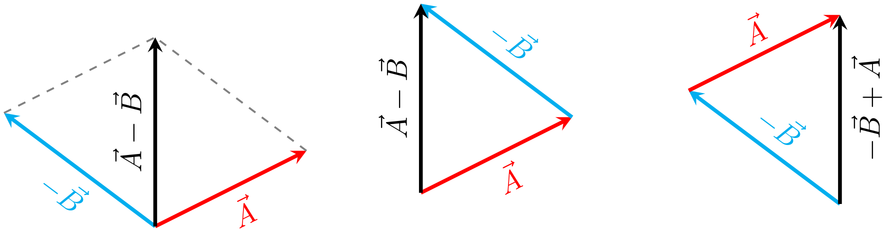




جمع هندسی بردارها

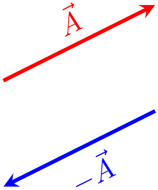


جمع برداری $\vec{A} + (-\vec{B}) = (-\vec{B}) + \vec{A} = \vec{A} - \vec{B}$



جمع هندسی بردارها

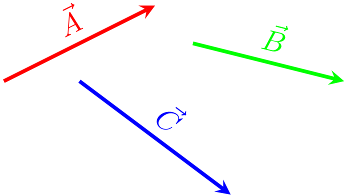
جمع یک بردار با معکوس جهت خود



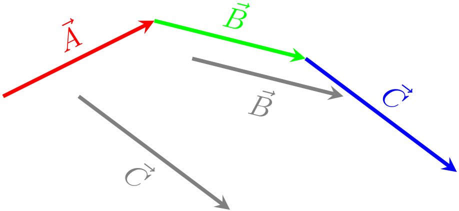
$$\vec{A} + (-\vec{A}) = (-\vec{A}) + \vec{A} = 0$$

$$\vec{A} = 0 + \vec{A} = \vec{A} + 0$$

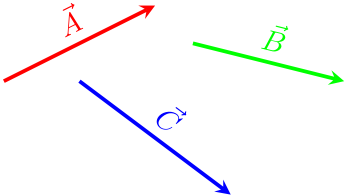
خاصیت شرکت‌پذیری جمع برداری



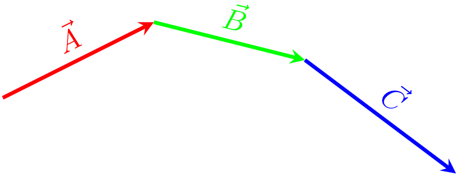
جمع برداری $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$

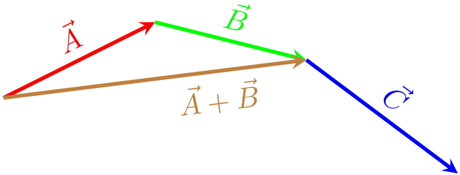


خاصیت شرکت‌پذیری جمع برداری

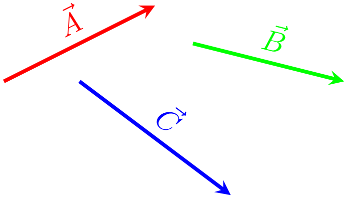


جمع برداری $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$

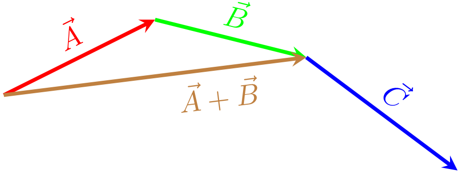


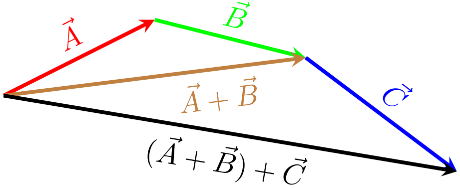


خاصیت شرکت‌پذیری جمع برداری

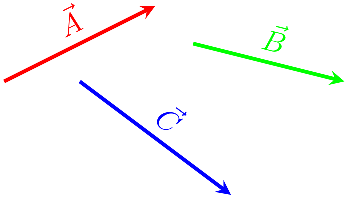


جمع برداری $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$

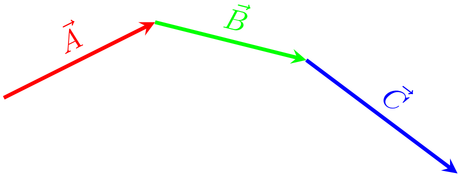


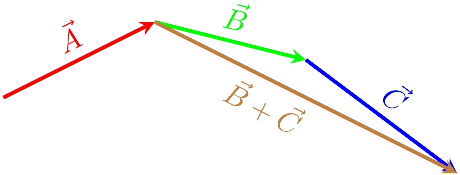


خاصیت شرکت‌پذیری جمع برداری

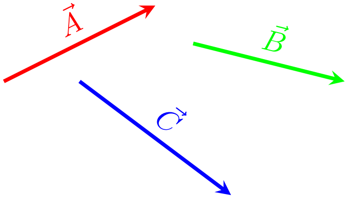


جمع برداری $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$

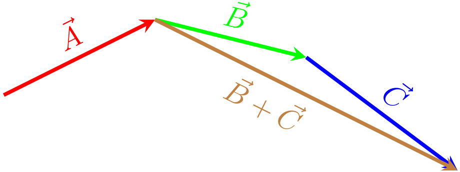


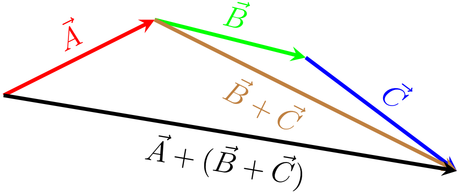


خاصیت شرکت‌پذیری جمع برداری

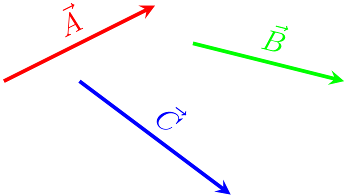


جمع برداری $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$

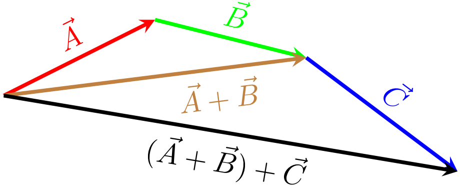


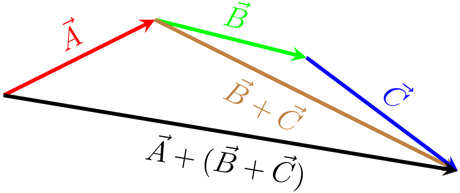


خاصیت شرکت‌پذیری جمع برداری



جمع برداری $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}=\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$





ضرب برداری

بطور کلی ضرب برداری به دو دسته تقسیم می‌شوند،

- ضرب داخلی (inner product)

نتیجه حاصلضرب داخلی دو بردار یک اسکالر است.

کاربردها: محاسبه کار، محاسبه انرژی یک دوقطبی در حضور میدان خارجی و ...

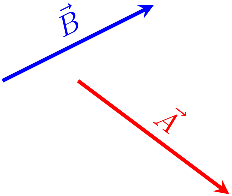
- ضرب خارجی (cross product or vector product or outer product)

نتیجه حاصلضرب خارجی دو بردار یک بردار است.

کاربردها: محاسبه گشتاور نیرو، محاسبه اندازه حرکت زاویه‌ای و ...

ضرب داخلی

بررسی زاویه‌ی دو بردار



تعریف ضرب داخلی

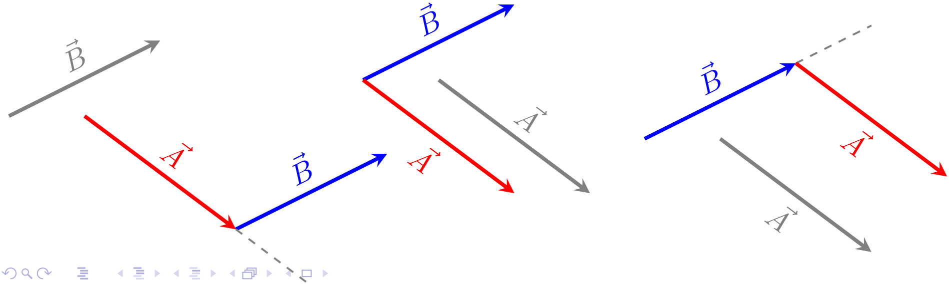
$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta}$$

که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

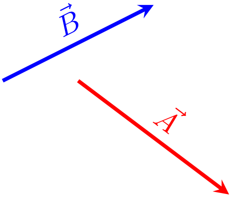
و

$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$



ضرب داخلی

بررسی زاویه‌ی دو بردار



تعریف ضرب داخلی

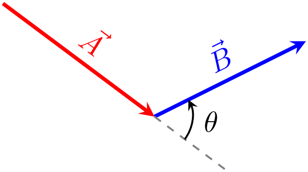
$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta}$$

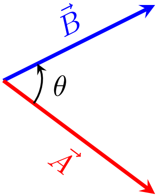
که

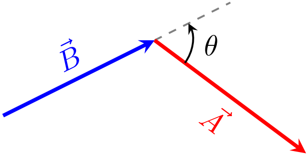
$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A},\vec{B})$$







تعریف ضرب داخلی

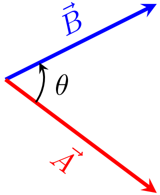
$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta}$$

که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A},\vec{B})$$



محدوده‌ی ضرب داخلی دو بردار

$$0 \le \theta \le \pi \Rightarrow -1 \le \cos\theta \le 1$$

$$-AB \le AB\cos\theta \le AB$$

$$-AB \le \vec{A}\cdot\vec{B} \le AB$$

$$|\vec{A}\cdot\vec{B}| \le AB$$

حالتهای خاص ضرب داخلی دو بردار

$$\theta = 0 \Rightarrow \vec{A}\cdot\vec{B} = AB$$

$$\theta = \pi \Rightarrow \vec{A}\cdot\vec{B} = -AB$$

$$\theta = \pi/2 \Rightarrow \vec{A}\cdot\vec{B} = 0$$

تعریف ضرب داخلی

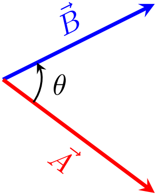
$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta}$$

که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A},\vec{B})$$

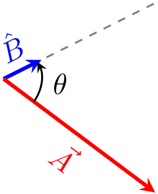


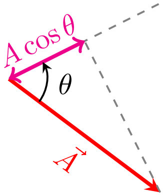
تصویر بردار $\vec{A}$ بر راستا بردار $\vec{B}$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$$

$$\vec{A}\cdot\frac{\vec{B}}{B} = A\cos\theta$$

$$\vec{A}\cdot\hat{B} = A\cos\theta$$

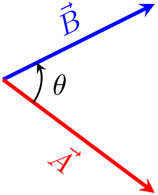




ضرب داخلی

تعریف ضرب داخلی

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta}$$



که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

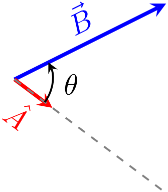
$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$

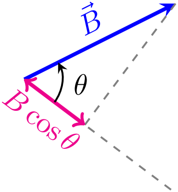
تصویر بردار $\vec{B}$ بر راستا بردار $\vec{A}$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$$

$$\frac{\vec{A}}{A}\cdot\vec{B} = B\cos\theta$$

$$\hat{A}\cdot\vec{B} = B\cos\theta$$





ضرب داخلی

تعریف ضرب داخلی

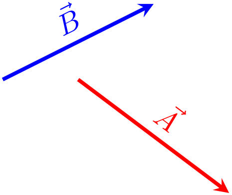
$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta}$$

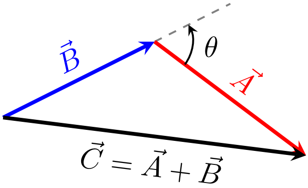
که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$





<u>قانون کوسینوسها</u>

$$\vec{C}\cdot\vec{C} = (\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{A}+\vec{B})$$

$$\vec{C}\cdot\vec{C} = \vec{A}\cdot\vec{A} + \vec{B}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{B}\cdot\vec{A}$$

$$\vec{C}\cdot\vec{C} = C^2, \quad \vec{A}\cdot\vec{A} = A^2$$

$$\vec{B}\cdot\vec{B} = B^2, \quad \vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$$

ضرب داخلی

تعریف ضرب داخلی

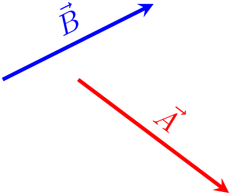
$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta}$$

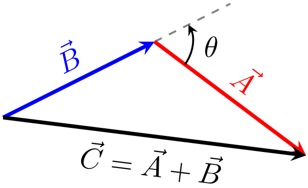
که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A},\vec{B})$$





قانون کوسینوسها

$$\vec{C}\cdot\vec{C} = (\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{A}+\vec{B})$$

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2\vec{A}\cdot\vec{B}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$$

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta$$

ضرب داخلی

تعریف ضرب داخلی

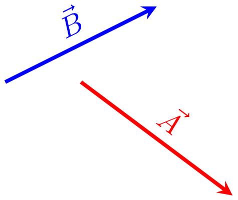
$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta}$$

که

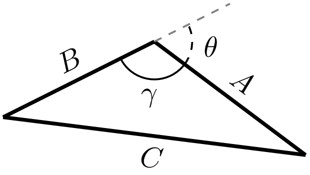
$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$



قانون کوسینوسها



$$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta$$

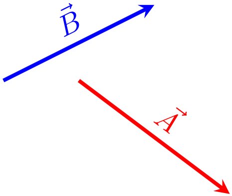
$$\gamma = \pi - \theta \Rightarrow \cos\gamma = \cos(\pi - \theta)$$

$$\cos\gamma = -\cos\theta$$

$$\boxed{C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\gamma}$$

ضرب خارجی

تعریف بزرگی ضرب خارجی دو بردار



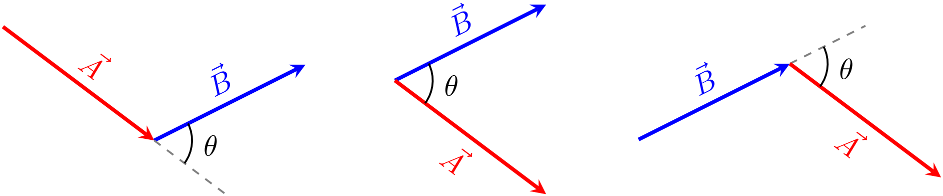
$$\boxed{|\vec{A} \times \vec{B}| = AB|\sin\theta|}$$

که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$



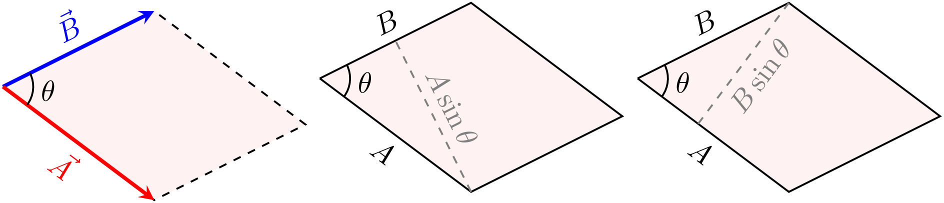
ضرب خارجی

تعریف بزرگی ضرب خارجی دو بردار

$$|\vec{A}\times\vec{B}| = AB|\sin\theta|$$

مساحت سطح متوازی الاضلاع تشکیل شده بوسیله بردارها

$$S = |\vec{A}\times\vec{B}| = AB\sin\theta \qquad S = BH = B(A\sin\theta) \qquad S = AH = A(B\sin\theta)$$



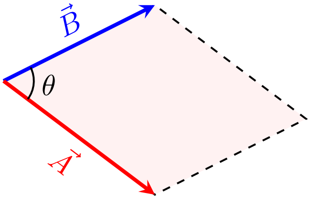
ضرب خارجی

تعریف بزرگی ضرب خارجی دو بردار

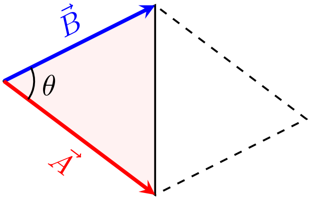
$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB|\sin\theta|$$

مساحت مثلث تشکیل شده بوسیله بردارها

$$S = |\vec{A} \times \vec{B}|$$

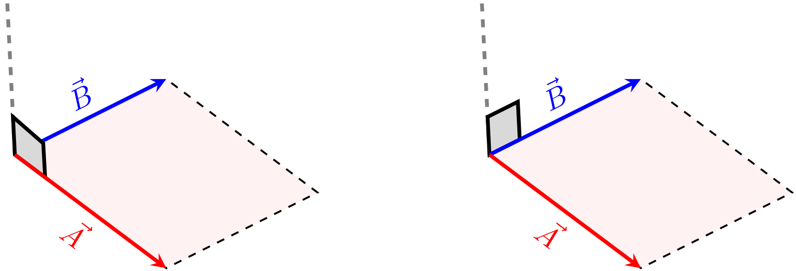


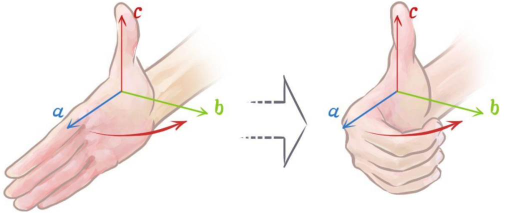
$$S = \frac{1}{2}|\vec{A} \times \vec{B}|$$



ضرب خارجی

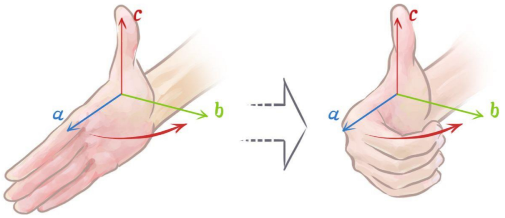
تعیین جهت ضرب خارجی دو بردار با استفاده از قاعده دست راست

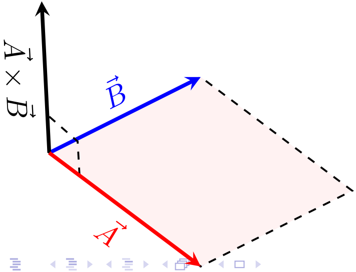


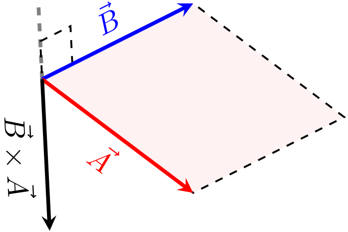


ضرب خارجی

تعیین جهت ضرب خارجی دو بردار با استفاده از قاعده دست راست

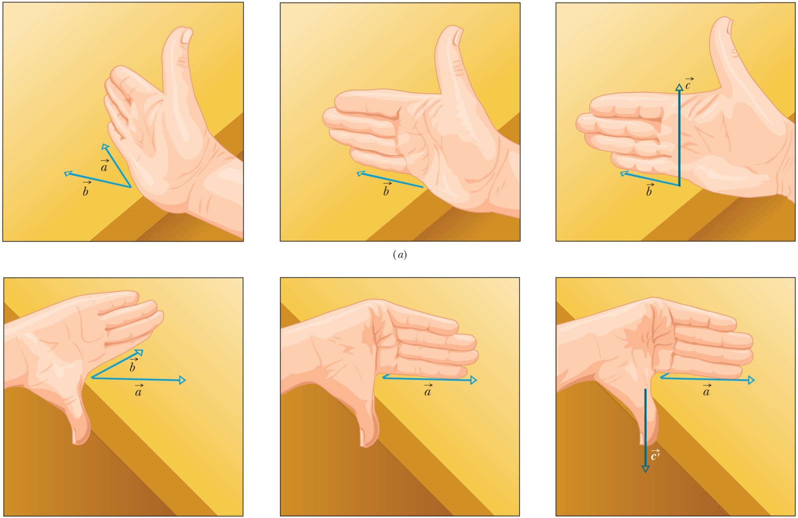






ضرب خارجی

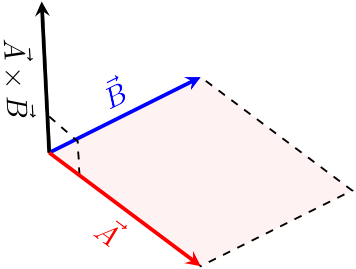
تعیین جهت ضرب خارجی دو بردار با استفاده از قاعده دست راست

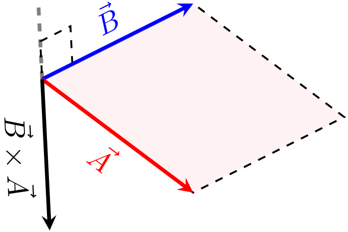


(a)

ضرب خارجی

تعیین جهت ضرب خارجی دو بردار با استفاده از قاعده دست راست





$$\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A} \Rightarrow |\vec{A}\times\vec{B}| = |\vec{B}\times\vec{A}|$$

<u>حالتهای خاص ضرب خارجی دو بردار</u>

$$\theta = 0,\pi \Rightarrow \vec{A}\times\vec{B} = 0 \text{ or } |\vec{A}\times\vec{B}| = 0$$

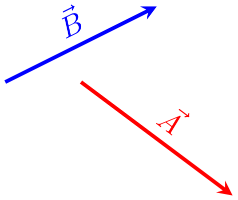
$$\theta = \pi/2 \Rightarrow |\vec{A}\times\vec{B}| = AB$$

<u>محدوده‌ی ضرب خارجی دو بردار</u>

$$0 \leq \sin\theta \leq 1$$

$$0 \leq |\vec{A}\times\vec{B}| \leq AB$$

ضرب خارجی



تعریف بزرگی ضرب خارجی

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB|\sin\theta|$$

که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$

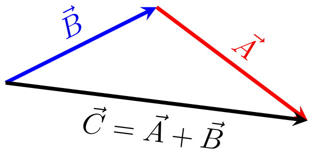
<u>قانون سینوسها</u>

$$\vec{C} \times \vec{C} = (\vec{A} + \vec{B}) \times \vec{C}$$

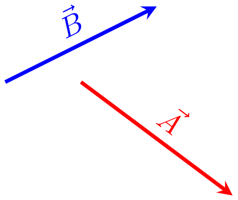
$$0 = \vec{A} \times \vec{C} + \vec{B} \times \vec{C}$$

$$\vec{A} \times \vec{C} = -\vec{B} \times \vec{C}$$

$$|\vec{A} \times \vec{C}| = |\vec{B} \times \vec{C}|$$



ضرب خارجی



قانون سینوسها

$$|\vec{A}\times\vec{C}| = |\vec{B}\times\vec{C}|$$

$$AC|\sin\beta| = BC|\sin\alpha|$$

$$\boxed{\frac{|\sin\beta|}{B} = \frac{|\sin\alpha|}{A}} \qquad (۱)$$

تعریف بزرگی ضرب خارجی

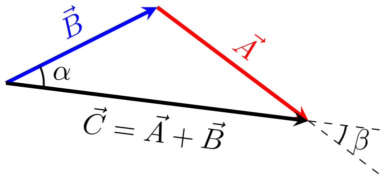
$$|\vec{A}\times\vec{B}| = AB|\sin\theta|$$

که

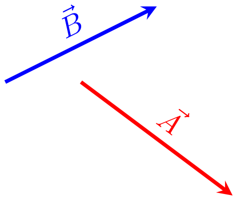
$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$



ضرب خارجی



قانون سینوسها

$$\color{magenta}{\vec{A}\times}\color{black}\vec{C} = \color{magenta}{\vec{A}\times}\color{black}(\vec{A}+\vec{B})$$

$$\vec{A}\times\vec{C} = \vec{A}\times\vec{A} + \vec{A}\times\vec{B}$$

$$\vec{A}\times\vec{C} = 0 + \vec{A}\times\vec{B}$$

$$|\vec{A}\times\vec{C}| = |\vec{A}\times\vec{B}|$$

تعریف بزرگی ضرب خارجی

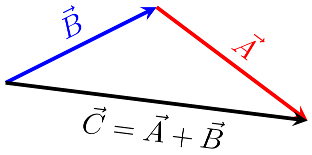
$$|\vec{A}\times\vec{B}| = AB|\sin\theta|$$

که

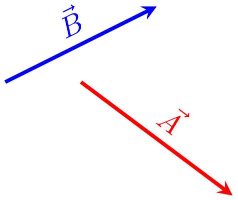
$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A},\vec{B})$$



ضرب خارجی



<u>قانون سینوسها</u>

$$|\vec{A}\times\vec{C}| = |\vec{A}\times\vec{B}|$$

$$AC|\sin\beta| = AB|\sin\theta|$$

$$\sin\theta = \sin(\pi-\gamma) = \sin\gamma$$

$$AC|\sin\beta| = AB|\sin\gamma|$$

تعریف بزرگی ضرب خارجی

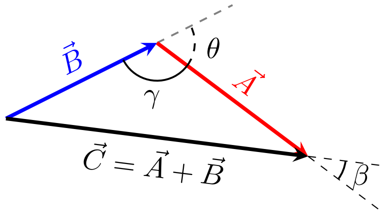
$$|\vec{A}\times\vec{B}| = AB|\sin\theta|$$

که

$$A = |\vec{A}|,\quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A},\vec{B})$$



ضرب خارجی

تعریف بزرگی ضرب خارجی

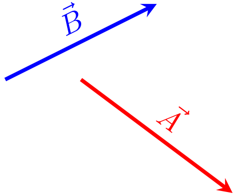
$$|\vec{A}\times\vec{B}| = AB|\sin\theta|$$

که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A},\vec{B})$$

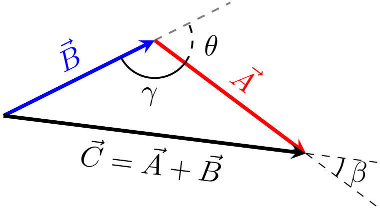


قانون سینوسها

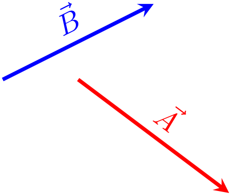
$$|\vec{A}\times\vec{C}| = |\vec{A}\times\vec{B}|$$

$$AC|\sin\beta| = AB|\sin\gamma|$$

$$\boxed{\frac{|\sin\beta|}{B} = \frac{|\sin\gamma|}{C}} \qquad ۲$$



ضرب خارجی



<u>قانون سینوسها</u>

$$\frac{|\sin\beta|}{B} = \frac{|\sin\alpha|}{A} \qquad ۱$$

$$\frac{|\sin\beta|}{B} = \frac{|\sin\gamma|}{C} \qquad ۲$$

$$\boxed{\frac{|\sin\alpha|}{A} = \frac{|\sin\beta|}{B} = \frac{|\sin\gamma|}{C}}$$

تعریف بزرگی ضرب خارجی

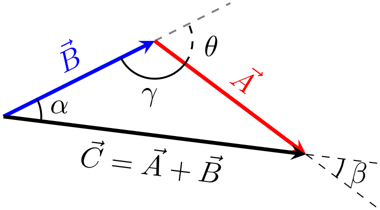
$$|\vec{A}\times\vec{B}| = AB|\sin\theta|$$

که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

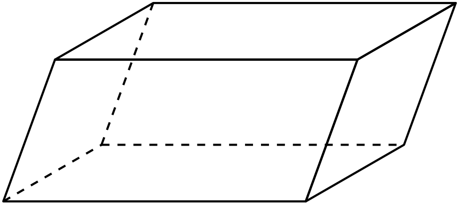
و

$$\theta = \angle(\vec{A},\vec{B})$$

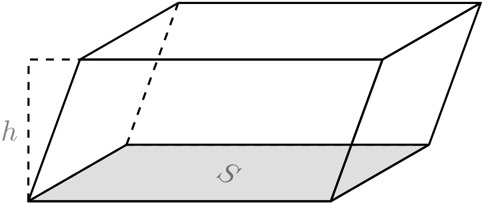


ضرب سه‌گانه‌ی اسکالر

محاسبه حجم متوازی السطوح

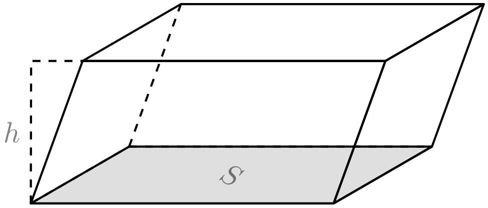


$$V = hS$$

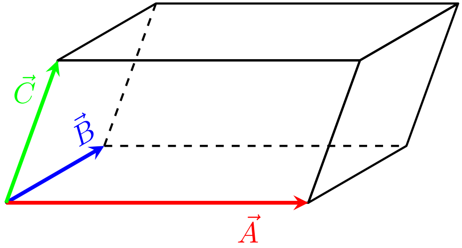


ضرب سه‌گانه‌ی اسکالر

محاسبه حجم متوازی السطوح

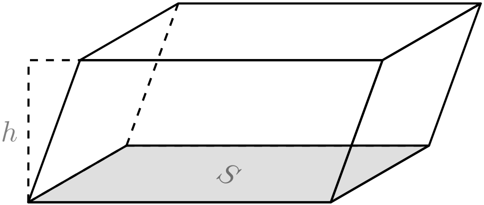


سه بردار $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ و $\vec{C}$ را مطابق شکل زیر اعمال می کنیم،



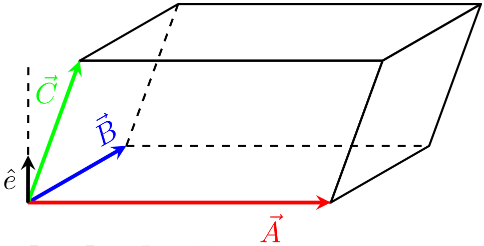
ضرب سه‌گانه‌ی اسکالر

محاسبه حجم متوازی السطوح



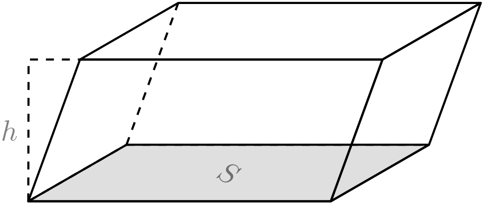
محاسبه مساحت سطح تشکیل شده بوسیله‌ی بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$

$$S = |\vec{A} \times \vec{B}|$$



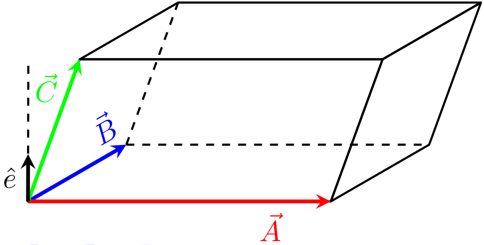
ضرب سه‌گانه‌ی اسکالر

محاسبه حجم متوازی السطوح



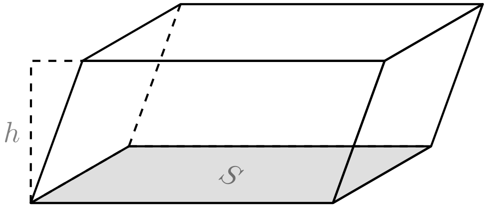
محاسبه بردار یکه عمود بر سطح
تشکیل شده از بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$

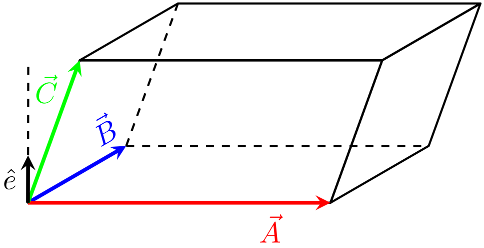
$$\hat{e} = \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|}$$



ضرب سه‌گانه‌ی اسکالر

محاسبه حجم متوازی السطوح





$$\hat{e} = \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|}$$

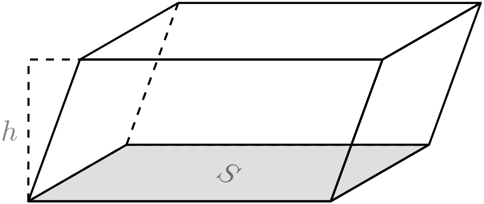
محاسبه ارتفاع h

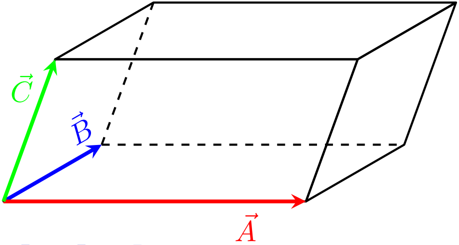
$$h = \hat{e} \cdot \vec{C}$$

$$h = \frac{\vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C}}{|\vec{A} \times \vec{B}|}$$

ضرب سه‌گانه‌ی اسکالر

محاسبه حجم متوازی السطوح





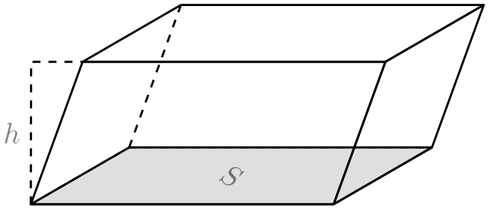
$$h = \frac{\vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C}}{|\vec{A} \times \vec{B}|}$$

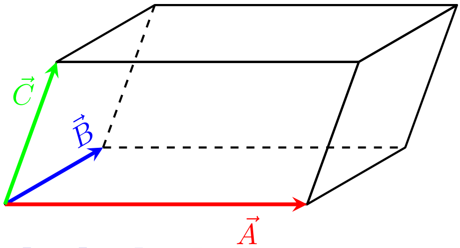
$$S = |\vec{A} \times \vec{B}|$$

$$V = hS = \frac{\vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C}}{|\vec{A} \times \vec{B}|} |\vec{A} \times \vec{B}|$$

ضرب سه‌گانه‌ی اسکالر

محاسبه حجم متوازی السطوح

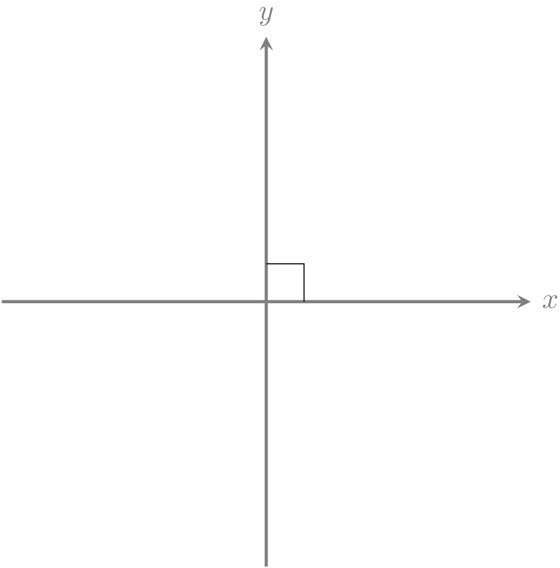




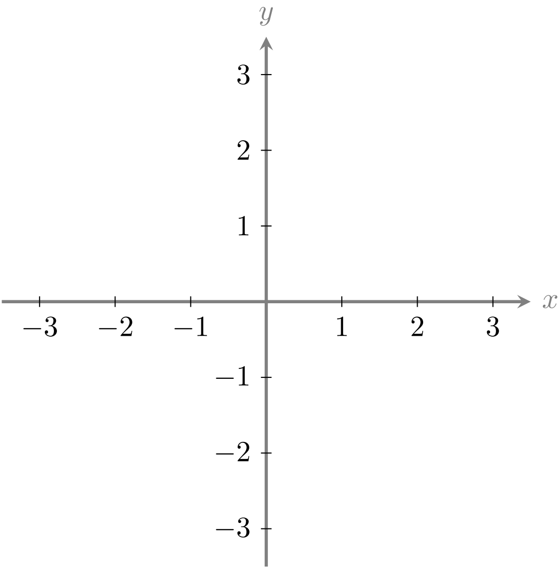
$$V = \frac{\vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C}}{|\vec{A} \times \vec{B}|} |\vec{A} \times \vec{B}|$$

$$\boxed{V = \vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C}}$$

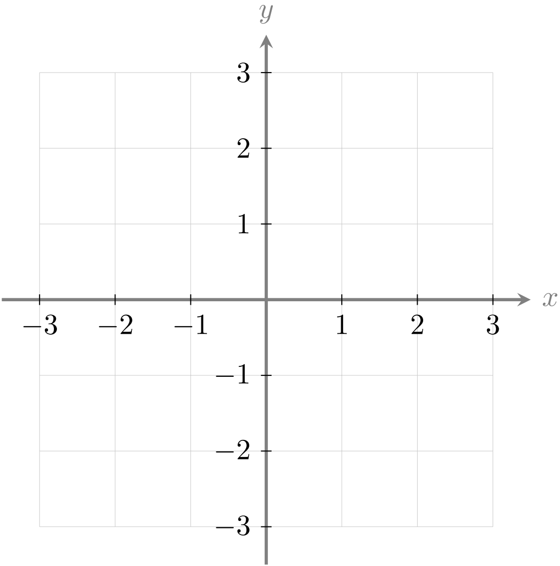
دستگاه مختصات دوبعدی_دکارتی



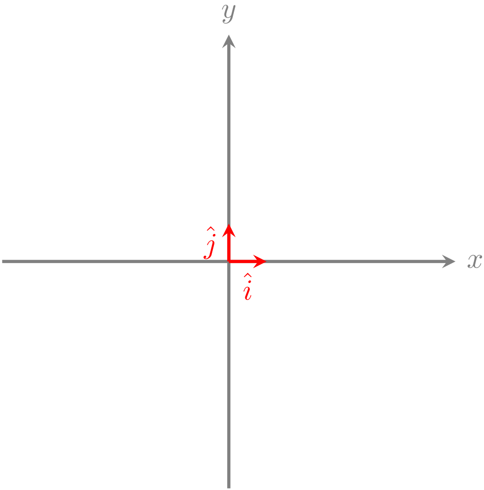
دستگاه مختصات دوبعدی_دکارتی



دستگاه مختصات دوبعدی_دکارتی



دستگاه مختصات دوبعدی ـ دکارتی

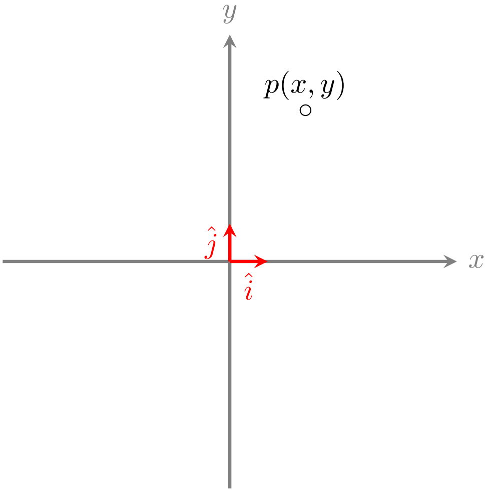


<u>بردار یکه</u>

$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = 1$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = 0$$

دستگاه مختصات دوبعدی_دکارتی

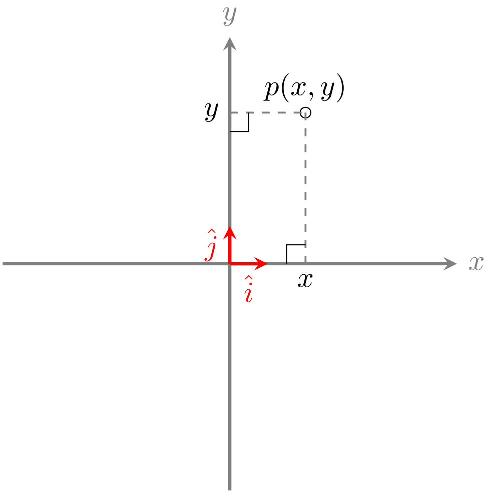


بردار یکه

$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = 1$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = 0$$

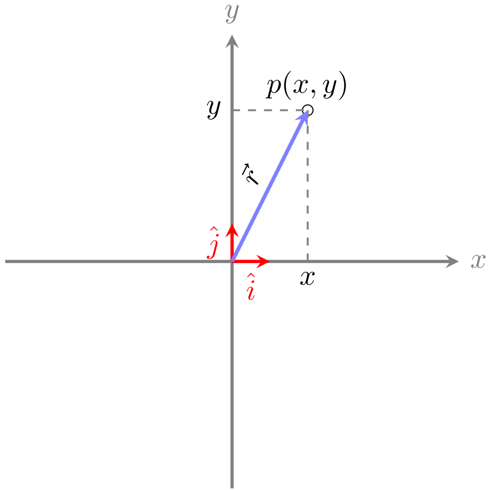
دستگاه مختصات دوبعدی_دکارتی



__بردار یکه__

$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = 1$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = 0$$



<u>بردار یکه</u>

$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = 1$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = 0$$

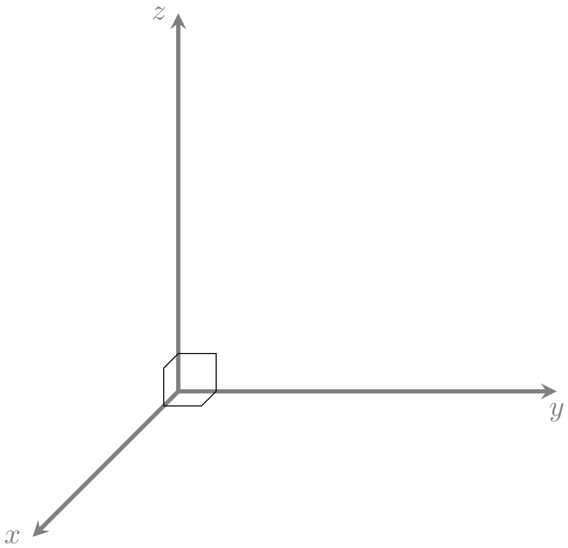
<u>بردار مکان</u>

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

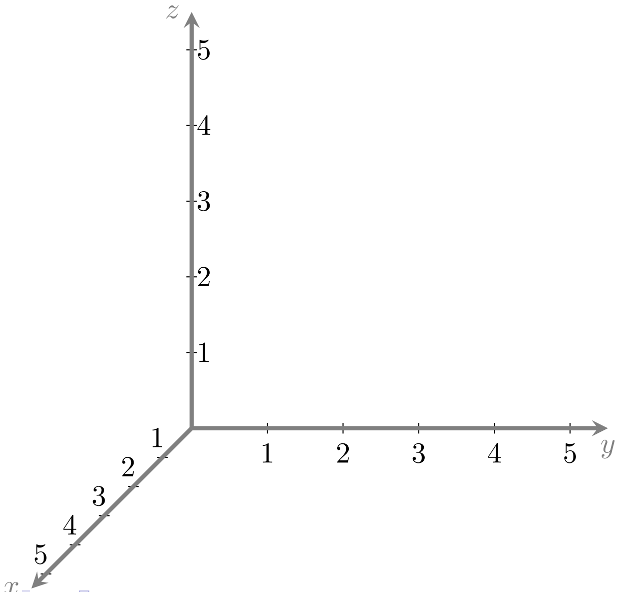
$$\hat{i} \cdot \vec{r} = x, \quad \hat{j} \cdot \vec{r} = y$$

$$x, y \in \mathbb{R}$$

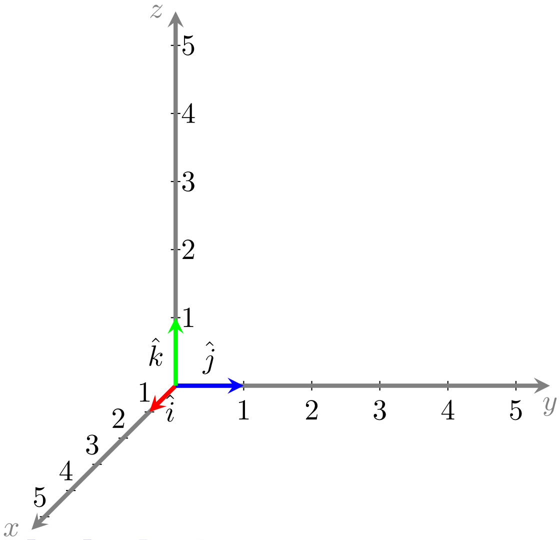
دستگاه مختصات سه‌بعدی_دکارتی



دستگاه مختصات سه‌بعدی-دکارتی



دستگاه مختصات سه‌بعدی‌ـدکارتی



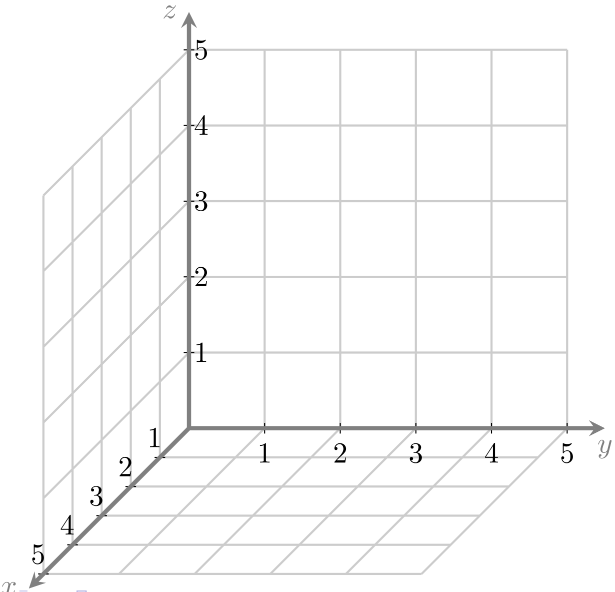
بردار یکه

$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$$

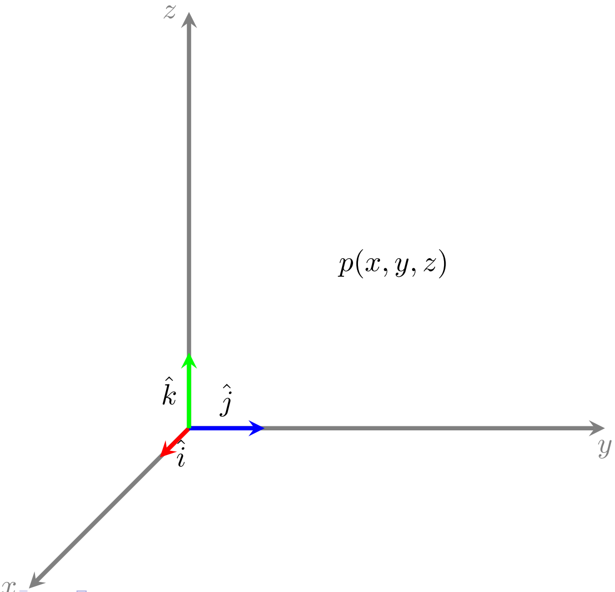
$$\begin{cases} \hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{i} = 0 \\ \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{j} = 0 \\ \hat{k}\cdot\hat{i} = \hat{i}\cdot\hat{k} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{i}\times\hat{j} = -\hat{j}\times\hat{i} = \hat{k} \\ \hat{j}\times\hat{k} = -\hat{k}\times\hat{j} = \hat{i} \\ \hat{k}\times\hat{i} = -\hat{i}\times\hat{k} = \hat{j} \end{cases}$$

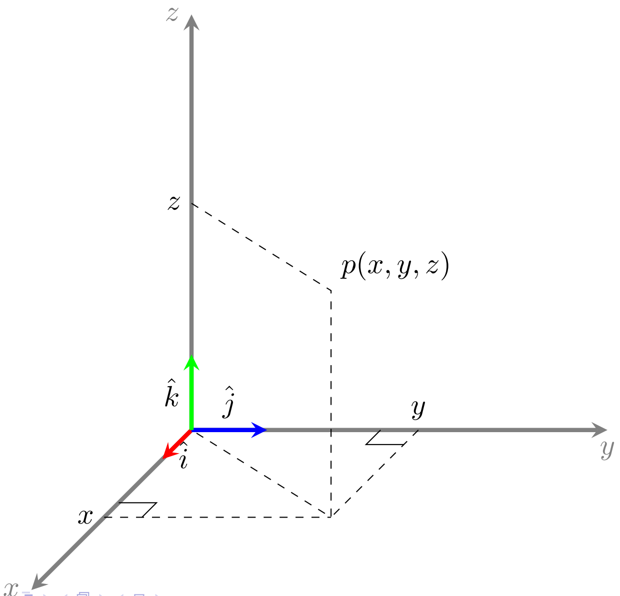
دستگاه مختصات سه‌بعدی‌ـدکارتی



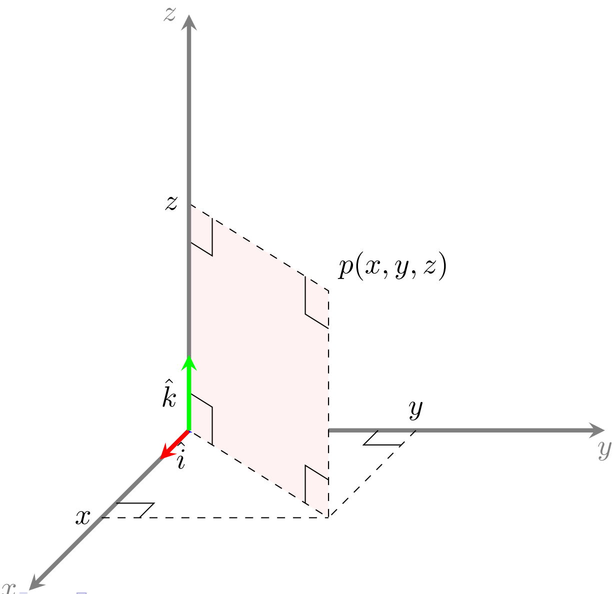
دستگاه مختصات سه‌بعدی-دکارتی



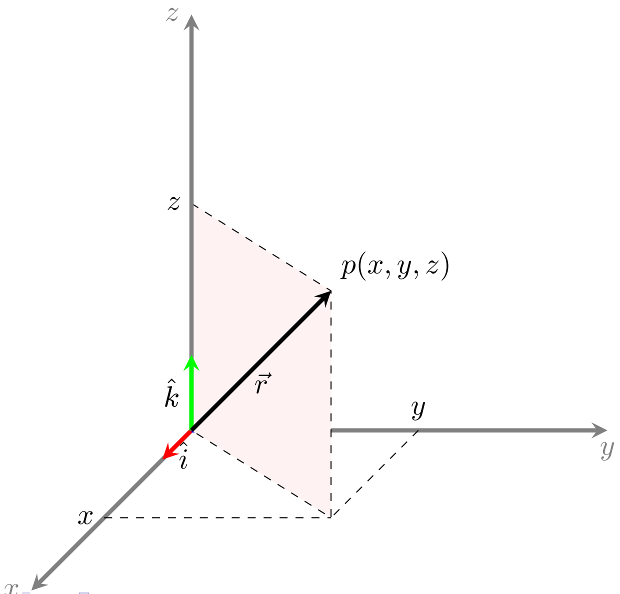
دستگاه مختصات سه‌بعدی ـ دکارتی



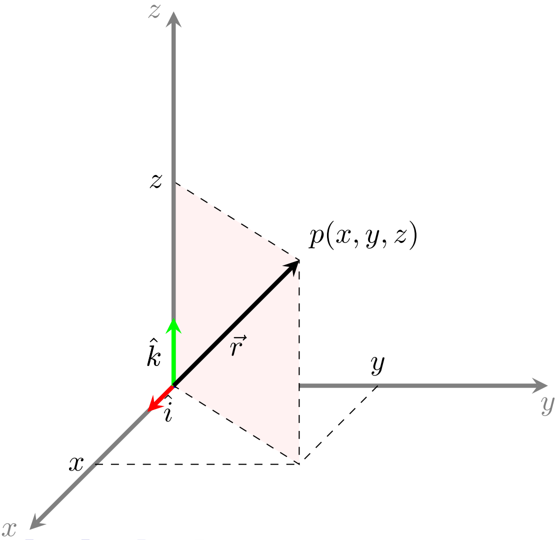
دستگاه مختصات سه‌بعدی_دکارتی



دستگاه مختصات سه‌بعدی ـ دکارتی



دستگاه مختصات سه‌بعدی ـ دکارتی



بردار یکه

$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$$

بردار مکان

$$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$$

$$x = \hat{i}\cdot\vec{r}$$

$$y = \hat{j}\cdot\vec{r}$$

$$z = \hat{k}\cdot\vec{r}$$

$$x, y, z \in \mathbb{R}$$

جمع برداری (تحلیلی)

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$
$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$

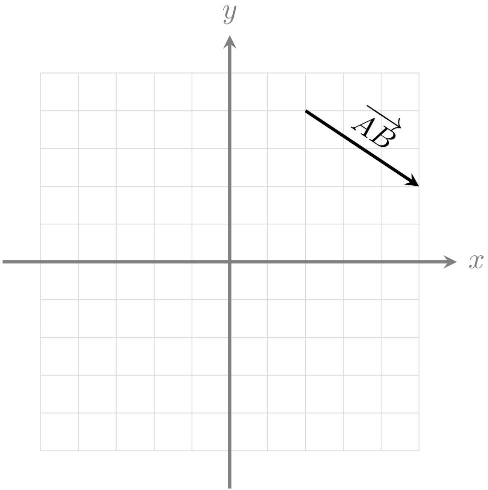
$$\vec{A}\pm\vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})\pm(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$
$$\vec{A}\pm\vec{B} = (A_x\pm B_x)\hat{i} + (A_y\pm B_y)\hat{j} + (A_z\pm B_z)\hat{k}$$

حالت خاص: جمع دو بردار در دوبعد

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$$
$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j}$$

$$\vec{A}\pm\vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j})\pm(B_x\hat{i} + B_y\hat{j})$$
$$\vec{A}\pm\vec{B} = (A_x\pm B_x)\hat{i} + (A_y\pm B_y)\hat{j}$$

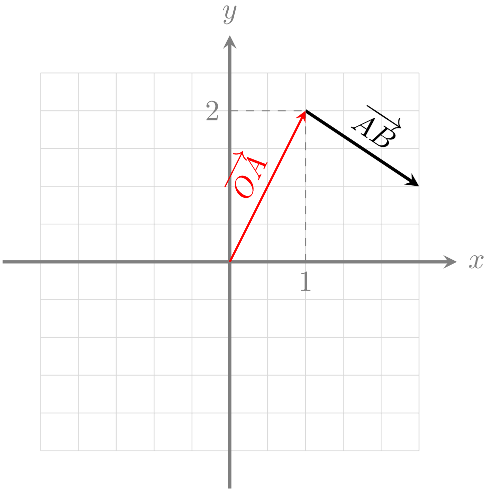
جمع برداری (تحلیلی)



بردار دلخواه

$$\overrightarrow{AB} = ?$$

جمع برداری (تحلیلی)



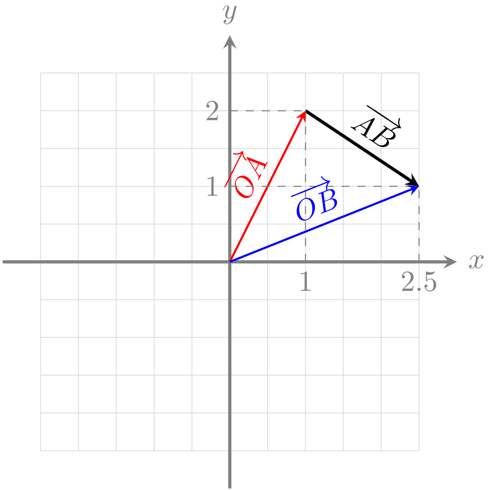
بردار دلخواه

$$\overrightarrow{AB} = ?$$

بردار مکان

$$\overrightarrow{OA} = \hat{i} + 2\hat{j}$$

جمع برداری (تحلیلی)



بردار دلخواه

$$\overrightarrow{AB} = ?$$

بردار مکان

$$\overrightarrow{OA} = \hat{i} + 2\hat{j}$$

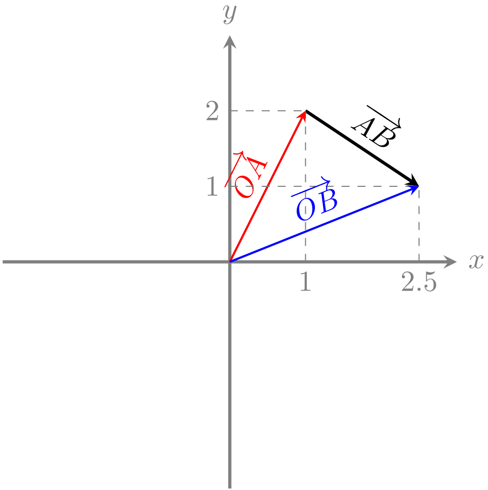
$$\overrightarrow{OB} = 2.5\hat{i} + \hat{j}$$

جمع برداری بطور تحلیلی

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

جمع برداری (تحلیلی)



بردار مکان

$$\overrightarrow{OA} = \hat{i} + 2\hat{j}$$

$$\overrightarrow{OB} = 2.5\hat{i} + \hat{j}$$

جمع برداری بطور تحلیلی

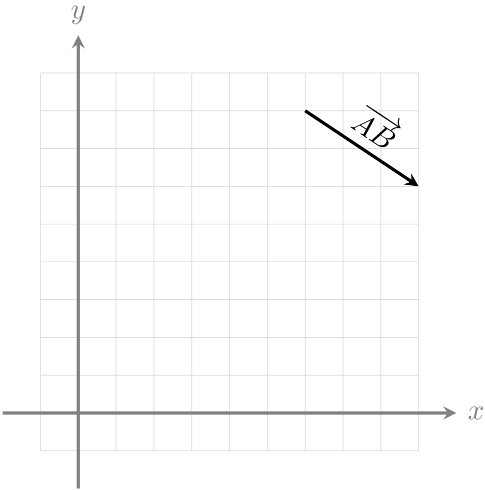
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{AB} = (2.5\hat{i}+\hat{j}) - (\hat{i}+2\hat{j})$$

$$\overrightarrow{AB} = (2.5-1)\hat{i}+(1-2)\hat{j}$$

$$\overrightarrow{AB} = 1.5\hat{i} - \hat{j}$$

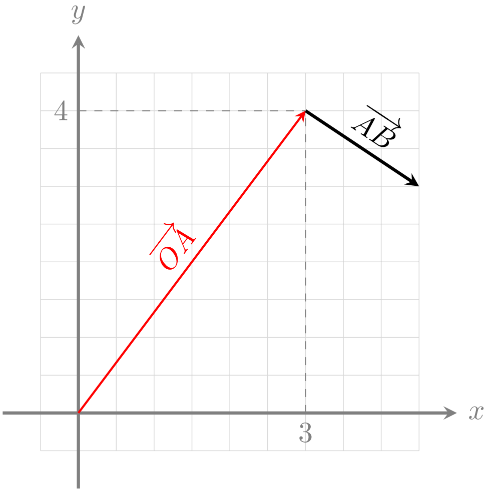
جمع برداری (تحلیلی)



بردار دلخواه

$$\overrightarrow{AB} = ?$$

جمع برداری (تحلیلی)



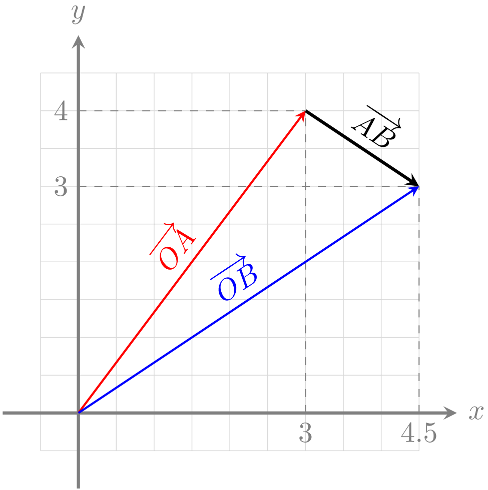
بردار دلخواه

$$\overrightarrow{AB} = ?$$

بردار مکان

$$\overrightarrow{OA} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$$

جمع برداری (تحلیلی)



بردار دلخواه

$$\overrightarrow{AB} = ?$$

بردار مکان

$$\overrightarrow{OA} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$$

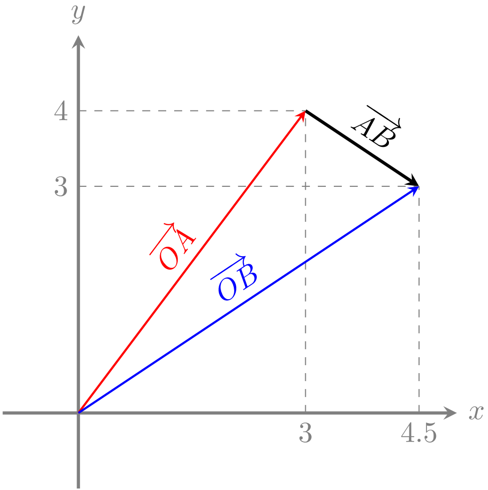
$$\overrightarrow{OB} = 4.5\hat{i} + 3\hat{j}$$

جمع برداری بطور تحلیلی

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

جمع برداری (تحلیلی)



بردار مکان

$$\overrightarrow{OA} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$$

$$\overrightarrow{OB} = 4.5\hat{i} + 3\hat{j}$$

جمع برداری بطور تحلیلی

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

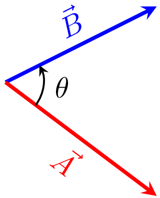
$$\overrightarrow{AB} = (4.5\hat{i}+3\hat{j})-(3\hat{i}+4\hat{j})$$

$$\overrightarrow{AB} = (4.5-3)\hat{i}+(3-4)\hat{j}$$

$$\overrightarrow{AB} = 1.5\hat{i} - \hat{j}$$

تعریف ضرب داخلی

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta}$$



که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

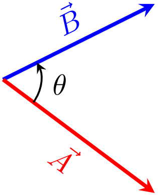
$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$
$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})\cdot(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$
$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{B} = {} & A_xB_x\hat{i}\cdot\hat{i} + A_xB_y\hat{i}\cdot\hat{j} + A_xB_z\hat{i}\cdot\hat{k} \\ & + A_yB_x\hat{j}\cdot\hat{i} + A_yB_y\hat{j}\cdot\hat{j} + A_yB_z\hat{j}\cdot\hat{k} \\ & + A_zB_x\hat{k}\cdot\hat{i} + A_zB_y\hat{k}\cdot\hat{j} + A_zB_z\hat{k}\cdot\hat{k}\end{aligned}$$

ضرب داخلی (تحلیلی)

تعریف ضرب داخلی

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta}$$



که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A},\vec{B})$$

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{B} = {} & A_xB_x\hat{i}\cdot\hat{i} + A_xB_y\hat{i}\cdot\hat{j} + A_xB_z\hat{i}\cdot\hat{k} \\ & + A_yB_x\hat{j}\cdot\hat{i} + A_yB_y\hat{j}\cdot\hat{j} + A_yB_z\hat{j}\cdot\hat{k} \\ & + A_zB_x\hat{k}\cdot\hat{i} + A_zB_y\hat{k}\cdot\hat{j} + A_zB_z\hat{k}\cdot\hat{k}\end{aligned}$$

$$\hat{i}\cdot\hat{i} = 1, \quad \hat{i}\cdot\hat{j} = 0, \quad \hat{i}\cdot\hat{k} = 0$$

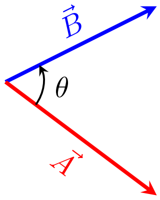
$$\hat{j}\cdot\hat{i} = 0, \quad \hat{j}\cdot\hat{j} = 1, \quad \hat{j}\cdot\hat{k} = 0$$

$$\hat{k}\cdot\hat{i} = 0, \quad \hat{k}\cdot\hat{j} = 0, \quad \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$$

ضرب داخلی (تحلیلی)

تعریف ضرب داخلی

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta}$$



که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$

$$\begin{cases} \vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} \\ \vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}$$

حالت خاص: ضرب داخلی در دوبعد

$$\begin{cases} \vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} \\ \vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y}$$

ضرب داخلی (تحلیلی)

- اندازه بردار

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

- تعریف ضرب داخلی (هندسی)

$$\vec{A}\cdot\vec{A} = A^2$$

- تعریف ضرب داخلی (تحلیلی)

$$\vec{A}\cdot\vec{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

در اینصورت

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \Rightarrow \boxed{A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}$$

حالت خاص: اندازه بردار در دوبعد

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} \Rightarrow \boxed{A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}}$$

ضرب داخلی (تحلیلی)

- بردار یکه‌ی بردار

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

- بردار یکه (هندسی)

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{A}$$

که

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

در اینصورت

$$\hat{A} = \frac{1}{A}(A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})$$

حالت خاص: بردار یکه در دوبعد

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$$

$$\hat{A} = \frac{1}{A}(A_x\hat{i} + A_y\hat{j}) \quad \text{که} \quad A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

ضرب داخلی (تحلیلی)

- زاویه‌ی بین دو بردار

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$

- تعریف ضرب داخلی (هندسی)

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB}$$

که

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \text{ و } B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$$

- تعریف ضرب داخلی (تحلیلی)

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

در اینصورت

$$AB\cos\theta = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \Rightarrow \boxed{\cos\theta = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{AB}}$$

ضرب داخلی (تحلیلی)

حالت خاص: زاویه بین دو بردار در دوبعد

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$$

$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j}$$

- تعریف ضرب داخلی (هندسی)

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB}$$

که

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \quad \text{و} \quad B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2}$$

- تعریف ضرب داخلی (تحلیلی)

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y$$

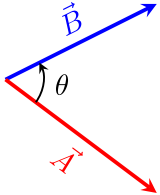
در اینصورت

$$AB\cos\theta = A_xB_x + A_yB_y \Rightarrow \boxed{\cos\theta = \frac{A_xB_x + A_yB_y}{AB}}$$

ضرب داخلی (تحلیلی)

تعریف ضرب داخلی

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta}$$



که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$

< نمایش اندیسی

اگر $\hat{i} = \hat{e}_1$ ، $\hat{j} = \hat{e}_2$ و $\hat{k} = \hat{e}_3$ در اینصورت بردار $\vec{A}$ را می‌توان بصورت

$$\vec{A} = A_1\hat{e}_1 + A_2\hat{e}_2 + A_3\hat{e}_3$$

نوشت که $A_x = A_1$ ، $A_y = A_2$ و $A_z = A_3$. به همین ترتیب برای بردار $\vec{B}$ داریم

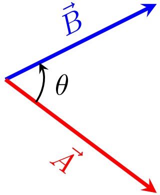
$$\vec{B} = B_1\hat{e}_1 + B_2\hat{e}_2 + B_3\hat{e}_3$$

که $B_x = B_1$ ، $B_y = B_2$ و $B_z = B_3$.

ضرب داخلی (تحلیلی)

تعریف ضرب داخلی

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta}$$



که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$

< نمایش اندیسی

$$\vec{A} = A_1\hat{e}_1 + A_2\hat{e}_2 + A_3\hat{e}_3 = \sum_i A_i\hat{e}_i$$

$$\vec{B} = B_1\hat{e}_1 + B_2\hat{e}_2 + B_3\hat{e}_3 = \sum_i B_i\hat{e}_i$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \left(\sum_i A_i\hat{e}_i\right)\cdot\left(\sum_j B_j\hat{e}_j\right) = \sum_i\sum_j A_iB_j(\hat{e}_i\cdot\hat{e}_j)$$

ضرب داخلی (تحلیلی)

تعریف ضرب داخلی

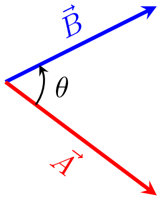
$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta}$$

که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A},\vec{B})$$



< نمایش اندیسی

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \sum_i\sum_j A_iB_j(\hat{e}_i\cdot\hat{e}_j)$$

تعریف دلتای–کرونکر

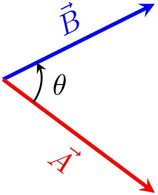
$$\hat{e}_i\cdot\hat{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \sum_i\sum_j A_iB_j\delta_{ij}$$

ضرب داخلی (تحلیلی)

تعریف ضرب داخلی

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta}$$



که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$

< نمایش اندیسی

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \sum_i \sum_j A_i B_j \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j$$

خواص دلتای-کرونکر

$$\sum_i f_i \delta_{ij} = f_j, \qquad \sum_i \sum_j g_{ij}\delta_{ij} = \sum_i g_{ii}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \sum_i \sum_j A_i B_j \delta_{ij} = \sum_i A_i B_i$$

تعریف ضرب خارجی

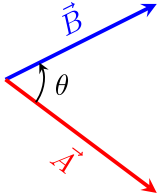
$$\boxed{|\vec{A}\times\vec{B}| = AB|\sin\theta|}$$

که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A},\vec{B})$$

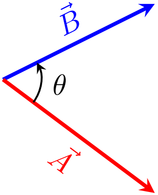


$$\begin{aligned}
\vec{A} &= A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}\\
\vec{B} &= B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}\\
\vec{A}\times\vec{B} &= (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) \times (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})\\
\vec{A}\times\vec{B} &= A_xB_x\hat{i}\times\hat{i} + A_xB_y\hat{i}\times\hat{j} + A_xB_z\hat{i}\times\hat{k}\\
&+ A_yB_x\hat{j}\times\hat{i} + A_yB_y\hat{j}\times\hat{j} + A_yB_z\hat{j}\times\hat{k}\\
&+ A_zB_x\hat{k}\times\hat{i} + A_zB_y\hat{k}\times\hat{j} + A_zB_z\hat{k}\times\hat{k}
\end{aligned}$$

ضرب خارجی (تحلیلی)

تعریف ضرب خارجی

$$\boxed{|\vec{A}\times\vec{B}| = AB|\sin\theta|}$$



که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A},\vec{B})$$

$$\begin{aligned}\vec{A}\times\vec{B} = {} & A_xB_x\hat{i}\times\hat{i} + A_xB_y\hat{i}\times\hat{j} + A_xB_z\hat{i}\times\hat{k} \\ & + A_yB_x\hat{j}\times\hat{i} + A_yB_y\hat{j}\times\hat{j} + A_yB_z\hat{j}\times\hat{k} \\ & + A_zB_x\hat{k}\times\hat{i} + A_zB_y\hat{k}\times\hat{j} + A_zB_z\hat{k}\times\hat{k}\end{aligned}$$

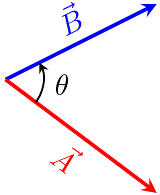
$$\hat{i}\times\hat{i} = 0, \quad \hat{i}\times\hat{j} = \hat{k}, \quad \hat{i}\times\hat{k} = -\hat{j}$$

$$\hat{j}\times\hat{i} = -\hat{k}, \quad \hat{j}\times\hat{j} = 0, \quad \hat{j}\times\hat{k} = \hat{i}$$

$$\hat{k}\times\hat{i} = \hat{j}, \quad \hat{k}\times\hat{j} = -\hat{i}, \quad \hat{k}\times\hat{k} = 0$$

تعریف ضرب داخلی

$$\boxed{|\vec{A}\times\vec{B}| = AB|\sin\theta|}$$



که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

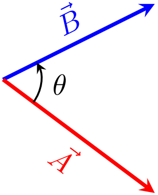
$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$

$$\begin{aligned}\vec{A}\times\vec{B} &= A_xB_y\hat{k} - A_xB_z\hat{j}\\ &- A_yB_x\hat{k} + A_yB_z\hat{i}\\ &+ A_zB_x\hat{j} - A_zB_y\hat{i}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{A}\times\vec{B} &= (A_yB_z - A_zB_y)\hat{i}\\ &+ (A_zB_x - A_xB_z)\hat{j}\\ &+ (A_xB_y - A_yB_x)\hat{k}\end{aligned}$$

تعریف ضرب خارجی

$$\boxed{|\vec{A}\times\vec{B}| = AB|\sin\theta|}$$



که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

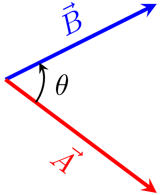
$$\theta = \angle(\vec{A},\vec{B})$$

$$\begin{aligned}\vec{A}\times\vec{B} &= (A_yB_z - A_zB_y)\hat{i}\\ &+ (A_zB_x - A_xB_z)\hat{j}\\ &+ (A_xB_y - A_yB_x)\hat{k}\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}}$$

تعریف ضرب خارجی

$$\boxed{|\vec{A}\times\vec{B}| = AB|\sin\theta|}$$



که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A},\vec{B})$$

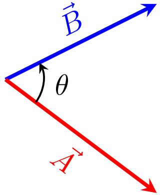
$$\begin{aligned}\vec{A}\times\vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\hat{i}\\ + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{j}\\ + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{k}\end{aligned}$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ B_x & B_y & B_z\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix} = -\vec{B}\times\vec{A}$$

ضرب خارجی (تحلیلی)

تعریف ضرب خارجی

$$\boxed{|\vec{A}\times\vec{B}| = AB|\sin\theta|}$$



که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A},\vec{B})$$

< نمایش اندیسی

$$\vec{A} = A_1\hat{e}_1 + A_2\hat{e}_2 + A_3\hat{e}_3 = \sum_i A_i\hat{e}_i$$

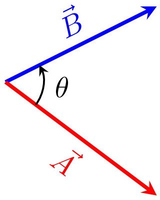
$$\vec{B} = B_1\hat{e}_1 + B_2\hat{e}_2 + B_3\hat{e}_3 = \sum_i B_i\hat{e}_i$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \left(\sum_i A_i\hat{e}_i\right)\times\left(\sum_j B_j\hat{e}_j\right) = \sum_i\sum_j A_iB_j(\hat{e}_i\times\hat{e}_j)$$

ضرب خارجی (تحلیلی)

تعریف ضرب خارجی

$$\boxed{|\vec{A}\times\vec{B}| = AB|\sin\theta|}$$



که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A},\vec{B})$$

< نمایش اندیسی

$$\vec{A}\times\vec{B} = \sum_i\sum_j A_iB_j(\hat{e}_i\times\hat{e}_j)$$

تعریف نماد لوی-چی‌ویتا

$$\hat{e}_i\times\hat{e}_j = \sum_k \epsilon_{ijk}\hat{e}_k$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \sum_i\sum_j\sum_k A_iB_j\epsilon_{ijk}\hat{e}_k$$

تعریف ضرب خارجی

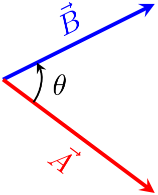
$$\boxed{|\vec{A} \times \vec{B}| = AB|\sin\theta|}$$

که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$



< نمایش اندیسی

$$\vec{A} \times \vec{B} = \sum_i \sum_j \sum_k A_i B_j \epsilon_{ijk} \hat{e}_k$$

خواص نماد لوی-چی‌ویتا

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{312} = \epsilon_{231} = 1$$

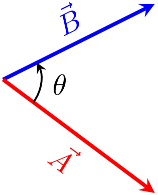
$$\epsilon_{132} = \epsilon_{321} = \epsilon_{213} = -1$$

ϵ_{ijk}ها دیگر $= 0$

ضرب خارجی (تحلیلی)

تعریف ضرب خارجی

$$\boxed{|\vec{A} \times \vec{B}| = AB|\sin\theta|}$$



که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$

< نمایش اندیسی

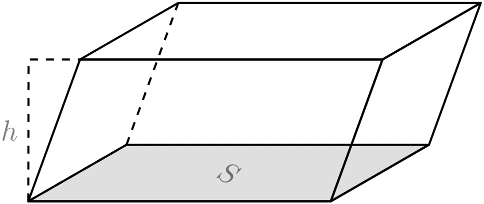
$$\vec{A} \times \vec{B} = \sum_i \sum_j \sum_k A_i B_j \epsilon_{ijk} \hat{e}_k$$

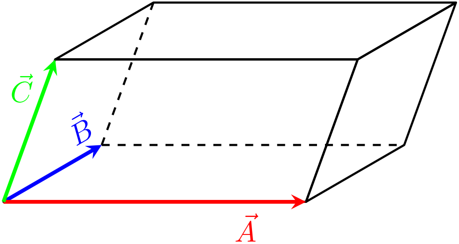
$$(\vec{A}\times\vec{B})_l = (\vec{A}\times\vec{B})\cdot\hat{e}_l = \sum_i \sum_j \sum_k A_i B_j \epsilon_{ijk} \hat{e}_k\cdot\hat{e}_l = \sum_i \sum_j \sum_k A_i B_j \epsilon_{ijk} \delta_{kl}$$

$$(\vec{A} \times \vec{B})_l = \sum_i \sum_j A_i B_j \epsilon_{ijl} = \sum_i \sum_j A_i B_j \epsilon_{lij}$$

ضرب سه‌گانه‌ی اسکالر (تحلیلی)

محاسبه حجم متوازی السطوح





$$V = \vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C}$$

$$V = \begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

ضرب سه‌گانه‌ی اسکالر (تحلیلی)

محاسبه حجم متوازی السطوح

$$V = \vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C} = \begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \vec{C} \cdot \vec{A} \times \vec{B}$$

$$\begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ C_x & C_y & C_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C} = \vec{B} \times \vec{C} \cdot \vec{A} = \vec{C} \times \vec{A} \cdot \vec{B}$$

$$\vec{C} \cdot \vec{A} \times \vec{B} = \vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = \vec{B} \cdot \vec{C} \times \vec{A}$$

ضرب سه‌گانه‌ی اسکالر (تحلیلی)

محاسبه حجم متوازی السطوح

> **نمایش اندیسی**

$$\vec{A} = A_1\hat{e}_1 + A_2\hat{e}_2 + A_3\hat{e}_3 = \sum_i A_i\hat{e}_i$$

$$\vec{B} = B_1\hat{e}_1 + B_2\hat{e}_2 + B_3\hat{e}_3 = \sum_i B_i\hat{e}_i$$

$$\vec{C} = C_1\hat{e}_1 + C_2\hat{e}_2 + C_3\hat{e}_3 = \sum_i C_i\hat{e}_i$$

$$\vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C} = \left(\sum_i A_i\hat{e}_i\right) \times \left(\sum_j B_j\hat{e}_j\right) \cdot \left(\sum_k C_k\hat{e}_k\right)$$

$$\vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C} = \sum_i \sum_j \sum_k A_i B_j C_k (\hat{e}_i \times \hat{e}_j) \cdot \hat{e}_k$$

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \sum_l \epsilon_{ijl}\hat{e}_l$$

ضرب سه‌گانه‌ی اسکالر (تحلیلی)

محاسبه حجم متوازی السطوح

> نمایش اندیسی

$$\vec{A}\times\vec{B}\cdot\vec{C}=\sum_i\sum_j\sum_k A_iB_jC_k(\hat{e}_i\times\hat{e}_j)\cdot\hat{e}_k$$

$$\hat{e}_i\times\hat{e}_j=\sum_l \epsilon_{ijl}\hat{e}_l$$

$$\vec{A}\times\vec{B}\cdot\vec{C}=\sum_i\sum_j\sum_k A_iB_jC_k\left(\sum_l \epsilon_{ijl}\hat{e}_l\right)\cdot\hat{e}_k$$

$$\vec{A}\times\vec{B}\cdot\vec{C}=\sum_i\sum_j\sum_l A_iB_jC_k\epsilon_{ijl}(\hat{e}_l\cdot\hat{e}_k)$$

$$\hat{e}_l\cdot\hat{e}_k=\delta_{lk}$$

$$\vec{A}\times\vec{B}\cdot\vec{C}=\sum_i\sum_j\sum_k\sum_l A_iB_jC_k\epsilon_{ijl}\delta_{lk}=\sum_i\sum_j\sum_k A_iB_jC_k\epsilon_{ijk}$$

ضرب سه‌گانه‌ی برداری (تحلیلی)

قاعده بک-کب

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_yC_z-B_zC_y & B_zC_x-B_xC_z & B_xC_y-B_yC_x\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})&=\hat{i}[A_y(B_xC_y-B_yC_x)-A_z(B_zC_x-B_xC_z)]\\&+\hat{j}[A_z(B_yC_z-B_zC_y)-A_x(B_xC_y-B_yC_x)]\\&+\hat{k}[A_x(B_zC_x-B_xC_z)-A_y(B_yC_z-B_zC_y)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})&=\hat{i}B_x(A_yC_y+A_zC_z)-\hat{i}C_x(B_yA_y+B_zA_z)\\&+\hat{j}B_y(A_zC_z+A_xC_x)-\hat{j}C_y(A_zB_z+A_xB_x)\\&+\hat{k}B_z(A_xC_x+A_yC_y)-\hat{k}C_z(A_xB_x+A_yB_y)\end{aligned}$$

ضرب سه‌گانه‌ی برداری (تحلیلی)

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

$$\begin{aligned}\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=&\,\hat{i}B_x(A_yC_y+A_zC_z)-\hat{i}C_x(B_yA_y+B_zA_z)\\&+\hat{j}B_y(A_zC_z+A_xC_x)-\hat{j}C_y(A_zB_z+A_xB_x)\\&+\hat{k}B_z(A_xC_x+A_yC_y)-\hat{k}C_z(A_xB_x+A_yB_y)\end{aligned}$$

اضافه و کم کردن $\hat{i}A_xB_xC_x$ به سطر اول، اضافه و کم کردن $\hat{j}A_yB_yC_y$ به سطر دوم و اضافه و کم کردن $\hat{k}A_zB_zC_z$ به سطر سوم،

$$\begin{aligned}\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=&\,\hat{i}B_x(A_xC_x+A_yC_y+A_zC_z)-\hat{i}C_x(A_xB_x+B_yA_y+B_zA_z)\\&+\hat{j}B_y(A_yC_y+A_zC_z+A_xC_x)-\hat{j}C_y(A_yC_y+A_zB_z+A_xB_x)\\&+\hat{k}B_z(A_zC_z+A_xC_x+A_yC_y)-\hat{k}C_z(A_zB_zA_xB_x+A_yB_y)\end{aligned}$$

ضرب سه‌گانه‌ی برداری (تحلیلی)

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

$$\begin{aligned}\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) &= \hat{i}B_x(A_xC_x+A_yC_y+A_zC_z)-\hat{i}C_x(A_xB_x+B_yA_y+B_zA_z)\\ &+\hat{j}B_y(A_yC_y+A_zC_z+A_xC_x)-\hat{j}C_y(A_yC_y+A_zB_z+A_xB_x)\\ &+\hat{k}B_z(A_zC_z+A_xC_x+A_yC_y)-\hat{k}C_z(A_zB_zA_xB_x+A_yB_y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{C} &= A_xC_x+A_yC_y+A_zC_z\\ \vec{A}\cdot\vec{B} &= A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) &= \hat{i}B_x(\vec{A}\cdot\vec{C})-\hat{i}C_x(\vec{A}\cdot\vec{B})\\ &+\hat{j}B_y(\vec{A}\cdot\vec{C})-\hat{j}C_y(\vec{A}\cdot\vec{B})\\ &+\hat{k}B_z(\vec{A}\cdot\vec{C})-\hat{k}C_z(\vec{A}\cdot\vec{B})\end{aligned}$$

ضرب سه‌گانه‌ی برداری (تحلیلی)

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

$$\begin{aligned}\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\hat{i}B_x(\vec{A}\cdot\vec{C})-\hat{i}C_x(\vec{A}\cdot\vec{B})\\+\hat{j}B_y(\vec{A}\cdot\vec{C})-\hat{j}C_y(\vec{A}\cdot\vec{B})\\+\hat{k}B_z(\vec{A}\cdot\vec{C})-\hat{k}C_z(\vec{A}\cdot\vec{B})\end{aligned}$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\hat{i}B_x+\hat{j}B_y+\hat{k}B_z)(\vec{A}\cdot\vec{C})-(\hat{i}C_x+\hat{j}C_y+\hat{k}C_z)(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

$$\vec{B}=\hat{i}B_x+\hat{j}B_y+\hat{k}B_z$$
$$\vec{C}=\hat{i}C_x+\hat{j}C_y+\hat{k}C_z$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

ضرب سه‌گانه‌ی برداری (تحلیلی)

قاعده بک_کب

< نمایش اندیسی

$$\vec{A} = A_1\hat{e}_1 + A_2\hat{e}_2 + A_3\hat{e}_3 = \sum_i A_i\hat{e}_i$$

$$\vec{B} = B_1\hat{e}_1 + B_2\hat{e}_2 + B_3\hat{e}_3 = \sum_i B_i\hat{e}_i$$

$$\vec{C} = C_1\hat{e}_1 + C_2\hat{e}_2 + C_3\hat{e}_3 = \sum_i C_i\hat{e}_i$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \left(\sum_i A_i\hat{e}_i\right) \times \left[\left(\sum_j B_j\hat{e}_j\right) \times \left(\sum_k C_k\hat{e}_k\right)\right]$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \left(\sum_i A_i\hat{e}_i\right) \times \left[\sum_j \sum_k B_j C_k (\hat{e}_j \times \hat{e}_k)\right]$$

$$\hat{e}_j \times \hat{e}_k = \sum_l \epsilon_{jkl}\hat{e}_l$$

ضرب سه‌گانه‌ی برداری (تحلیلی)

قاعده بک‌ـکب

> نمایش اندیسی

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \left(\sum_i A_i \hat{e}_i\right) \times \left[\sum_j \sum_k B_j C_k (\hat{e}_j \times \hat{e}_k)\right]$$

$$\hat{e}_j \times \hat{e}_k = \sum_l \epsilon_{jkl} \hat{e}_l$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \left(\sum_i A_i \hat{e}_i\right) \times \left[\sum_j \sum_k \sum_l B_j C_k \epsilon_{jkl} \hat{e}_l\right]$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l A_i B_j C_k \epsilon_{jkl} \hat{e}_i \times \hat{e}_l$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \sum_m A_i B_j C_k \epsilon_{jkl} \epsilon_{ilm} \hat{e}_m$$

ضرب سه‌گانه‌ی برداری (تحلیلی)

قاعده بک_کب

> نمایش اندیسی

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\sum_i\sum_j\sum_k\sum_l\sum_m A_iB_jC_k\epsilon_{jkl}\epsilon_{ilm}\hat{e}_m$$

اتحادهای لوی_چی‌ویتا

$$\epsilon_{ijk}=-\epsilon_{jik}$$

$$\sum_m \epsilon_{ijm}\epsilon_{klm}=\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk}$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\sum_i\sum_j\sum_k\sum_m A_iB_jC_k\left(\sum_l \epsilon_{jkl}\epsilon_{ilm}\right)\hat{e}_m$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=-\sum_i\sum_j\sum_k\sum_m A_iB_jC_k\left(\sum_l \epsilon_{jkl}\epsilon_{iml}\right)\hat{e}_m$$

ضرب سه‌گانه‌ی برداری (تحلیلی)

قاعده بک-کب

< نمایش اندیسی

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = -\sum_i\sum_j\sum_k\sum_m A_iB_jC_k\left(\sum_l \epsilon_{jkl}\epsilon_{iml}\right)\hat{e}_m$$

اتحادهای لوی-چی‌ویتا

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}$$

$$\sum_m \epsilon_{ijm}\epsilon_{klm} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = -\sum_i\sum_j\sum_k\sum_m A_iB_jC_k\left(\delta_{ij}\delta_{km} - \delta_{ik}\delta_{jm}\right)\hat{e}_m$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = -\sum_i\sum_k A_iB_iC_k\hat{e}_k + \sum_i\sum_j A_iB_jC_i\hat{e}_j$$

ضرب سه‌گانه‌ی برداری (تحلیلی)

قاعده بک_کب

< نمایش اندیسی

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = -\sum_i\sum_k A_iB_iC_k\hat{e}_k + \sum_i\sum_j A_iB_jC_i\hat{e}_j$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = -\left(\sum_i A_iB_i\right)\left(\sum_k C_k\hat{e}_k\right) + \left(\sum_i A_iC_i\right)\left(\sum_j B_j\hat{e}_j\right)$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = -(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C} + (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = -\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B}) + \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

مشتق بردار

$$\vec{A}(t) = A_x(t)\hat{i} + A_y(t)\hat{j} + A_z(t)\hat{k}$$

در لحظه‌ی $t + \Delta t$

$$\vec{A}(t+\Delta t) = A_x(t+\Delta t)\hat{i} + A_y(t+\Delta t)\hat{j} + A_z(t+\Delta t)\hat{k}$$

$$\Delta\vec{A} = \Delta A_x\hat{i} + \Delta A_y\hat{j} + \Delta A_z\hat{k}$$

$$\begin{aligned}
\Delta A_x &= A_x(t+\Delta t) - A_x(t) \\
\Delta A_y &= A_y(t+\Delta t) - A_y(t) \\
\Delta A_z &= A_z(t+\Delta t) - A_z(t)
\end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{A}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A_x}{\Delta t}\hat{i} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A_y}{\Delta t}\hat{j} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A_z}{\Delta t}\hat{k}$$

مشتق بردار

$$\vec{A}(t) = A_x(t)\hat{i} + A_y(t)\hat{j} + A_z(t)\hat{k} = \sum_i A_i \hat{e}_i$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{A}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A_x}{\Delta t}\hat{i} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A_y}{\Delta t}\hat{j} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A_z}{\Delta t}\hat{k}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A_x}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}t}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A_y}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}A_y}{\mathrm{d}t}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A_z}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}t}\hat{i} + \frac{\mathrm{d}A_y}{\mathrm{d}t}\hat{j} + \frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}t}\hat{k} = \sum_i \frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t}\hat{e}_i$$

به همین ترتیب

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{A}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2A_x}{\mathrm{d}t^2}\hat{i} + \frac{\mathrm{d}^2A_y}{\mathrm{d}t^2}\hat{j} + \frac{\mathrm{d}^2A_z}{\mathrm{d}t^2}\hat{k} = \sum_i \frac{\mathrm{d}^2A_i}{\mathrm{d}t^2}\hat{e}_i$$

مشتق بردار

مسئله‌ـ۱۴: بردار متغیر با زمان

$$\vec{A}(t) = \hat{i}\alpha t + \hat{j}\beta t^2 + \hat{k}\gamma t^3$$

معلوم است، α، β و γ ثابت‌اند. مشتقهای زمانی اول و دوم $\frac{d\vec{A}}{dt}$ و $\frac{d^2\vec{A}}{dt^2}$ را بدست آورید.

$$\frac{d}{dt}\vec{A}(t) = \hat{i}\alpha + 2\hat{j}\beta t + 3\hat{k}\gamma t^2$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{A}(t) = 2\hat{j}\beta + 6\hat{k}\gamma t$$

مشتق بردار

$$\vec{A}(t) = A_x(t)\hat{i} + A_y(t)\hat{j} + A_z(t)\hat{k} = \sum_i A_i\hat{e}_i$$

مشتق اول

$$\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}t}\hat{i} + \frac{\mathrm{d}A_y}{\mathrm{d}t}\hat{j} + \frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}t}\hat{k} = \sum_i \frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t}\hat{e}_i$$

اتحادهای مفید:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{A} \pm \vec{B}) = \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} \pm \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(t)\vec{A}) = \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\vec{A} + f(t)\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{A} \times \vec{B}) = \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} \times \vec{B} + \vec{A} \times \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}$$

مشتق بردار

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{A} \pm \vec{B}) = \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} \pm \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{A} \pm \vec{B}) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_i (A_i \pm B_i)\hat{e}_i \\
&= \sum_i \left(\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t} \pm \frac{\mathrm{d}B_i}{\mathrm{d}t}\right)\hat{e}_i \\
&= \sum_i \frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t}\hat{e}_i \pm \sum_i \frac{\mathrm{d}B_i}{\mathrm{d}t}\hat{e}_i \\
&= \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} \pm \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

مشتق بردار

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{A}\cdot\vec{B}) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i A_i B_i \\
&= \sum_i \left(\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t} B_i + A_i \frac{\mathrm{d}B_i}{\mathrm{d}t}\right) \\
&= \sum_i \frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t} B_i + \sum_i A_i \frac{\mathrm{d}B_i}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

مشتق بردار

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(t)\vec{A}) = \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\vec{A} + f(t)\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}$$

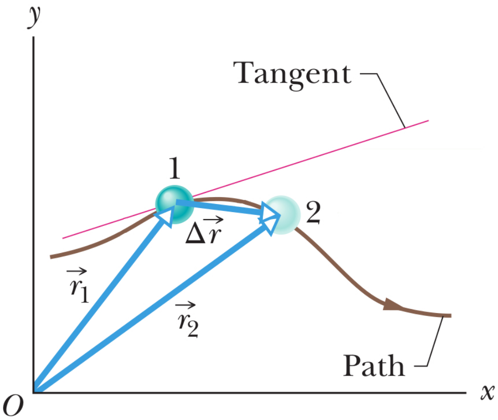
$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(t)\vec{A}) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i (fA_i)\hat{e}_i \\
&= \sum_i (\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}A_i + f\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t})\hat{e}_i \\
&= \sum_i \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}A_i + \sum_i f\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t}\hat{e}_i \\
&= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\sum_i A_i + f\sum_i \frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t}\hat{e}_i \\
&= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\vec{A} + f\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

مشتق بردار

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{A}\times\vec{B}) = \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{B} + \vec{A}\times\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{A}\times\vec{B}) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{ijk}\epsilon_{ijk}A_iB_j\hat{e}_k \\
&= \sum_{ijk}\epsilon_{ijk}\left(\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t}B_j + A_i\frac{\mathrm{d}B_j}{\mathrm{d}t}\right)\hat{e}_k \\
&= \sum_{ijk}\epsilon_{ijk}\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t}B_j\hat{e}_k + \sum_{ijk}\epsilon_{ijk}A_i\frac{\mathrm{d}B_j}{\mathrm{d}t}\hat{e}_k \\
&= \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\times\vec{B} + \vec{A}\times\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

بردار مکان، سرعت و شتاب



بردار جابجایی:

$$1:\ t_1,\quad \vec{r}_1$$

$$2:\ t_2,\quad \vec{r}_2$$

ذره در بازه‌ی زمانی

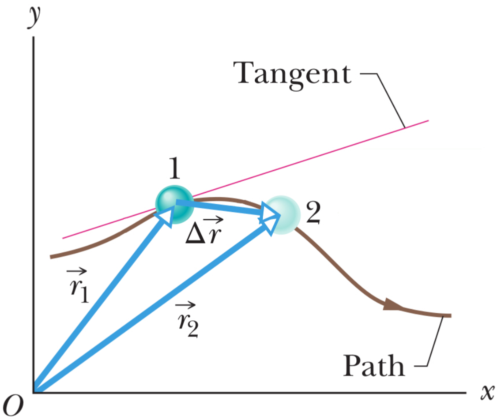
$$\Delta t = t_2 - t_1$$

جابجایی بصورت

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

دارد.

بردار مکان، سرعت و شتاب



بردار جابجایی:

$$1: \; t_1, \quad \vec{r}_1 = x_1\hat{i} + y_1\hat{j}$$

$$2: \; t_2, \quad \vec{r}_2 = x_2\hat{i} + y_2\hat{j}$$

ذره در بازه‌ی زمانی

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

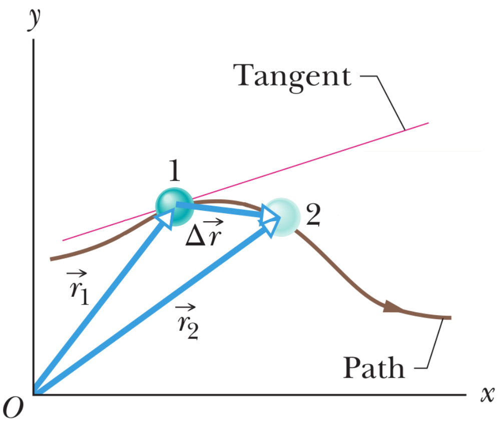
جابجایی بصورت

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j}$$

$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j}$$

بردار مکان، سرعت و شتاب



سرعت متوسط:

$$\vec{v}_{\text{متوسط}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

$$\vec{v}_{\text{متوسط}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{j}$$

سرعت لحظه‌ای:

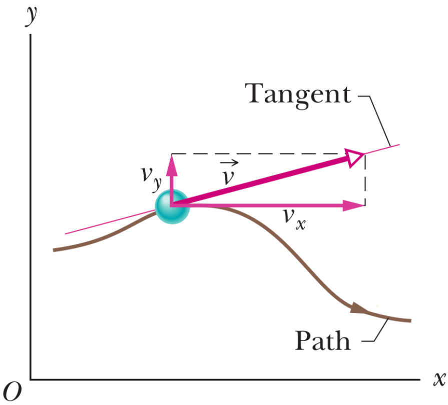
$$\vec{v} = \lim_{\Delta\to 0} \vec{v}_{\text{متوسط}}$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta\to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta\to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i} + \lim_{\Delta\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{j}$$

بردار مکان، سرعت و شتاب

سرعت لحظه‌ای:



$$\vec{v} = \lim_{\Delta\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i} + \lim_{\Delta\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{j}$$

$$v_x = \lim_{\Delta\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$v_y = \lim_{\Delta\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$$

بردار $\vec{v}$ مماس بر مسیر حرکت است.

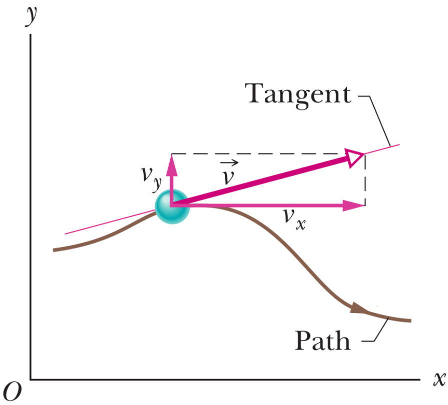
اندازه و جهت سرعت

$$v = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

زاویه‌ی سرعت با $+x$: $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right)$, $\hat{v} = \frac{\vec{v}}{v} = \hat{i}\frac{v_x}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}} + \hat{j}\frac{v_y}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}}$

بردار مکان، سرعت و شتاب

سرعت لحظه‌ای:



$$\vec{v} = \lim_{\Delta\to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i} + \lim_{\Delta\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{j}$$

$$v_x = \lim_{\Delta\to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$v_y = \lim_{\Delta\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

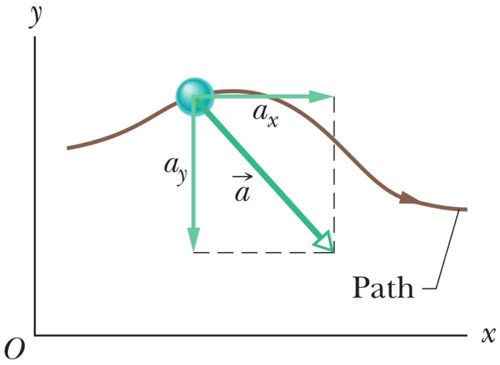
$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$$

بردار $\vec{v}$ مماس بر مسیر حرکت است.

سرعت لحظه‌ای در سه‌بعد

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\hat{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\hat{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\hat{k}, \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \quad \hat{v} = \frac{\vec{v}}{v}$$

بردار مکان، سرعت و شتاب



ذره در بازه‌ی زمانی

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

تغییر سرعتی بصورت

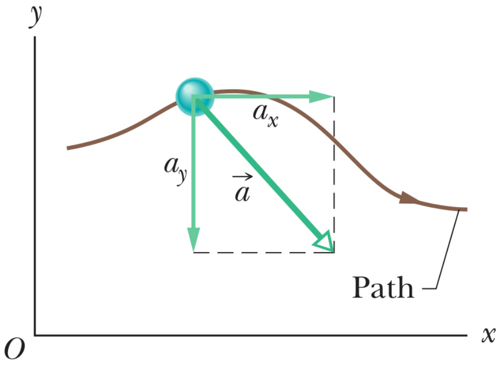
$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

$$\Delta \vec{v} = \Delta v_x \hat{i} + \Delta v_y \hat{j}$$

$$\Delta \vec{v} = (v_{x_2} - v_{x_1})\hat{i} + (v_{y_2} - v_{y_1})\hat{j}$$

دارد.

بردار مکان، سرعت و شتاب



شتاب متوسط:

$$\vec{a}_{\text{متوسط}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$$\vec{a}_{\text{متوسط}} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\hat{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\hat{j}$$

شتاب لحظه‌ای:

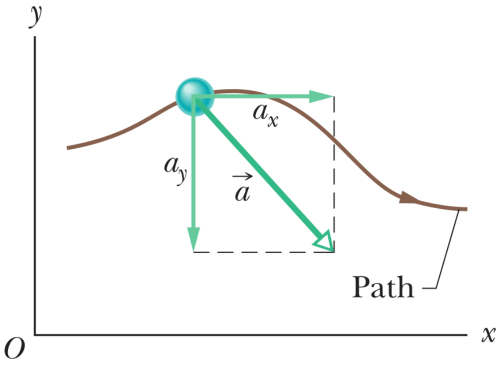
$$\vec{a} = \lim_{\Delta \to 0} \vec{a}_{\text{متوسط}}$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\hat{i} + \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\hat{j}$$

بردار مکان، سرعت و شتاب

شتاب لحظه‌ای:



$$\vec{a} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\hat{i} + \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\hat{j}$$

$$a_x = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$$

$$a_y = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$$

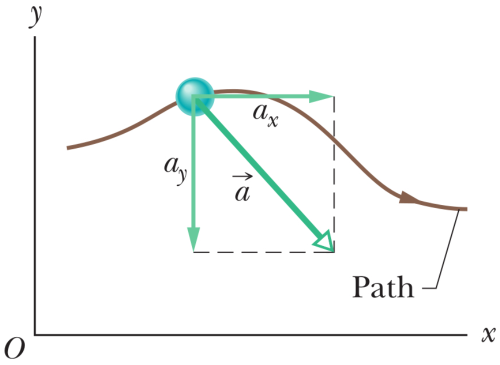
اندازه و جهت شتاب

$$a = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

زاویه‌ی شتاب با $+x$: $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{a_y}{a_x}\right)$, $\quad \hat{a} = \frac{\vec{a}}{a} = \hat{i}\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2}} + \hat{j}\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2}}$

بردار مکان، سرعت و شتاب

شتاب لحظه‌ای:



$$\vec{a} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\hat{i} + \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\hat{j}$$

$$a_x = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$$

$$a_y = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}$$

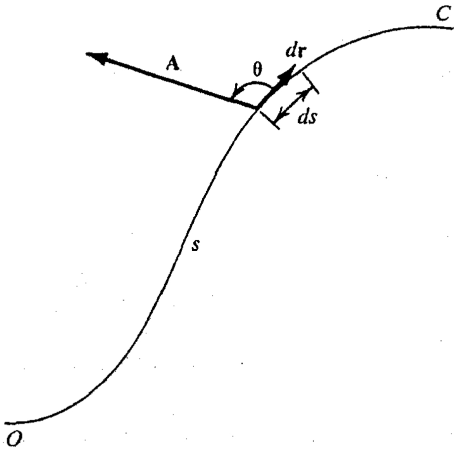
$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$$

شتاب لحظه‌ای در سه‌بعد

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\hat{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\hat{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\hat{k}, \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad \hat{a} = \frac{\vec{a}}{a}$$

انتگرال گیری برداری

$\int_C \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$: انتگرال میدان برداری $\vec{A}$ بر روی مسیر C



انتگرال گیری برداری

$$\int_C \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{r}\ :\ \text{انتگرال میدان برداری } \vec{A} \text{ بر روی مسیر } C$$

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{i}$$

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\vec{r} = \hat{i}\mathrm{d}x + \hat{j}\mathrm{d}y + \hat{k}\mathrm{d}z$$

$$\int_C \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_C (A_x\mathrm{d}x + A_y\mathrm{d}y + A_z\mathrm{d}z)$$

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s)$$

$$\int_C \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_C \left(A_x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + A_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} + A_z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s$$

عملگر گرادیان

میدان اسکار پایا

$$\phi = \phi(x, y, z)$$

مشتق گیری فضایی

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\phi &= \frac{\partial \phi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \phi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial \phi}{\partial z}\mathrm{d}z \\ &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\hat{k}\right) \cdot \left(\mathrm{d}x\hat{i} + \mathrm{d}y\hat{j} + \mathrm{d}z\hat{k}\right) \end{aligned}$$

اگر $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ آنگاه $\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\hat{i} + \mathrm{d}y\hat{j} + \mathrm{d}z\hat{k}$

$$\mathrm{d}\phi = \left(\left[\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right]\phi\right) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

عملگر گرادیان

$$\vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

عملگر گرادیان

میدان اسکار پایا

$$\phi = \phi(x, y, z)$$

مشتق گیری فضایی

$$\mathrm{d}\phi = \left(\left[\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right]\phi\right) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

عملگر گرادیان

$$\vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\mathrm{d}\phi = \vec{\nabla}\phi \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

گرادیان ϕ در جهتی است که در آن تغییرات ϕ سریعترین است. در یک جهت دلخواه $\hat{n}$ مقدار تغییرات ϕ بصورت زیر داده می‌شود،

$$\vec{\nabla}\phi \cdot \hat{n}$$

عملگر گرادیان

میدان اسکار غیرپایا

$$\phi = \phi(x, y, z, t)$$

مشتق گیری فضایی

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\phi &= \frac{\partial \phi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \phi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial \phi}{\partial z}\mathrm{d}z + \frac{\partial \phi}{\partial t}\mathrm{d}t \\ &= \vec{\nabla}\phi \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \frac{\partial \phi}{\partial t}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \vec{\nabla}\phi \cdot \vec{v} + \frac{\partial \phi}{\partial t}, \qquad \vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

نکته: اگر زمان بطور صریح در میدان اسکالر نباشد، یعنی

$$\phi = \phi(x, y, z)$$

در این صورت

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \vec{\nabla}\phi \cdot \vec{v}$$

عملگر گرادیان

اتحاد مفید

$$f = f(r), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

آنگاه

$$\boxed{\vec{\nabla} f(r) = \frac{\mathrm{d} f(r)}{\mathrm{d} r} \frac{\vec{r}}{r}}$$

$$\vec{\nabla} f(r) = \hat{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial f}{\partial z}$$

در اینجا f تابع صریحی از مختصات x ، y و z نیست. برای این منظور از قاعده زنجیری استفاده می کنیم،

$$\vec{\nabla} f(r) = \hat{i} \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} f(r) = \frac{\partial f}{\partial r} \left[\hat{i} \frac{\partial r}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial r}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial r}{\partial z} \right] = \frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d} r} \left[\hat{i} \frac{\partial r}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial r}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial r}{\partial z} \right]$$

عملگر گرادیان

اتحاد مفید

$$\vec{\nabla} f(r) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\left[\hat{i}\frac{\partial r}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial r}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial r}{\partial z}\right]$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}}$$

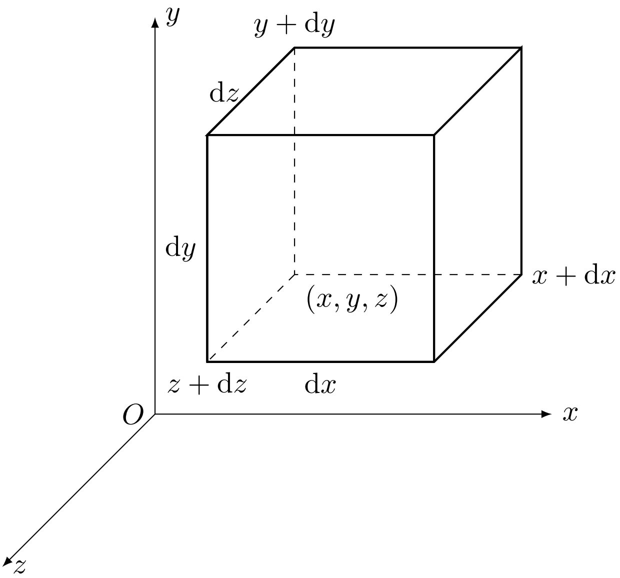
$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}}$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}}$$

$$\vec{\nabla} f(r) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\left[\hat{i}\frac{x}{r} + \hat{j}\frac{y}{r} + \hat{k}\frac{z}{r}\right]$$

$$\vec{\nabla} f(r) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\frac{\vec{r}}{r}$$

عملگر دیورژانس



عملگر دیورژانس

شار عبوری میدان برداری $\vec{A}$ از **سطوح در بر گیرنده‌ی** حجم $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ بصورت

$$\vec{A}\cdot\hat{n}\mathrm{d}S \quad (١)$$

داده می‌شود که $\hat{n}$ بردار یکه‌های رو به بیرون و عمود بر **سطوح در بر گیرنده‌ی** حجم $\mathrm{d}V$ است.

$$\text{شار ورودی به صفحه‌ی } x : \quad \vec{A}\cdot\hat{n}\mathrm{d}S = \vec{A}\cdot(-\hat{i}\mathrm{d}y\mathrm{d}z) = -A_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\text{شار عبوری از صفحه‌ی } x+\mathrm{d}x : \quad \vec{A}\cdot\hat{n}\mathrm{d}S = \vec{A}\cdot\hat{i}\mathrm{d}y\mathrm{d}z = A_{x+\mathrm{d}x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

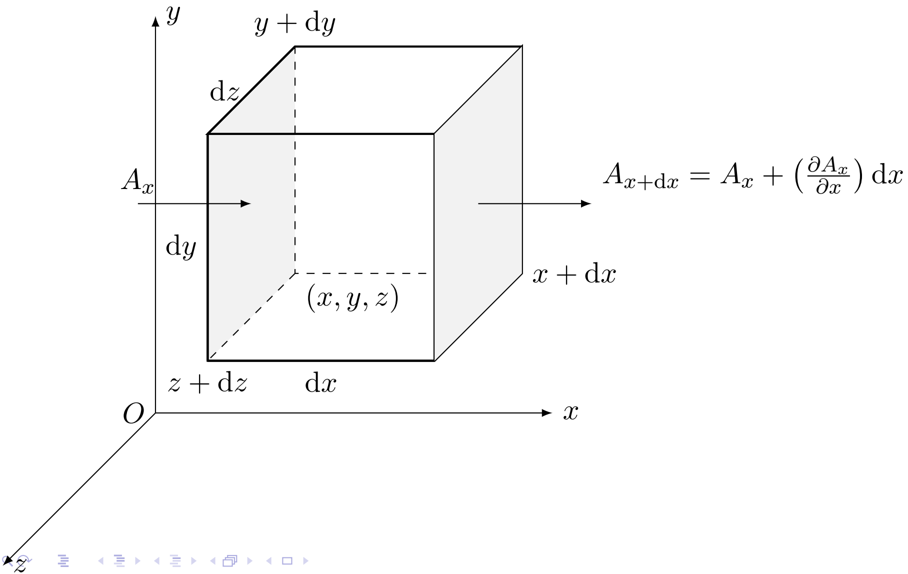
$$\text{شار ورودی به صفحه‌ی } y : \quad \vec{A}\cdot\hat{n}\mathrm{d}S = \vec{A}\cdot(-\hat{j}\mathrm{d}z\mathrm{d}x) = -A_y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$\text{شار عبوری از صفحه‌ی } y+\mathrm{d}y : \quad \vec{A}\cdot\hat{n}\mathrm{d}S = \vec{A}\cdot\hat{j}\mathrm{d}z\mathrm{d}x = A_{y+\mathrm{d}y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$\text{شار ورودی به صفحه‌ی } z : \quad \vec{A}\cdot\hat{n}\mathrm{d}S = \vec{A}\cdot(-\hat{k}\mathrm{d}x\mathrm{d}y) = -A_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\text{شار عبوری از صفحه‌ی } z+\mathrm{d}z : \quad \vec{A}\cdot\hat{n}\mathrm{d}S = \vec{A}\cdot\hat{k}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = A_{z+\mathrm{d}z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

عملگر دیورژانس



$$x \text{ شار ورودی به } : \quad A_x \mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$x+\mathrm{d}x \text{ شار عبوری از } : \quad A_{x+\mathrm{d}x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z = A_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$(\text{شار ورودی به صفحه‌ی } x) - (\text{شار عبوری از صفحه‌ی } x+\mathrm{d}x) = \text{شار خالص عبوری}$$

$$x \text{ در جهت } \mathrm{d}V \text{ شار خالص عبوری از حجم } = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\right)\mathrm{d}V$$

بطورکلی

$$y \text{ در جهت } \mathrm{d}V \text{ شار خالص عبوری از حجم } = \left(\frac{\partial A_y}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \left(\frac{\partial A_y}{\partial y}\right)\mathrm{d}V$$

و

$$z \text{ در جهت } \mathrm{d}V \text{ شار خالص عبوری از حجم } = \left(\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z\mathrm{d}z = \left(\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\mathrm{d}V$$

عملگر دیورژانس

$$\text{شار خالص عبوری از حجم } \mathrm{d}V = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\mathrm{d}V$$

$$\text{عملگرد دیورژانس} : \quad \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{A}$$

که

$$\vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

و

$$\text{شار خالص عبوری از حجم } \mathrm{d}V = \nabla \cdot \vec{A}\,\mathrm{d}V \quad ۲$$

از رابطه‌ی ۱ و ۲ و همچنین جمع‌بندی روی تمام حجم و سطوح در بر گیرنده بصورت زیر داده می‌شود

$$\oint_{\partial\Omega} \vec{A}\cdot\hat{n}\mathrm{d}S = \int_{\Omega} \nabla\cdot\vec{A}\,\mathrm{d}V$$

که آن را **قضیه گاوس** یا **قضیه دیورژانس** می‌نامند.

عملگر دیورژانس

اگر
$$\vec{A} = \rho\vec{v}$$
که $\vec{v}$ سرعت در یک سیال تراکم پذیر و ρ چگالی آن در نقطه‌ی (x, y, z) است.

$$\nabla \cdot (\rho\vec{v})\mathrm{d}V \ : \ \text{شارش خروجی خالص در واحد زمان}$$

معادله پیوستگی
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{v}) = 0$$
یکی از کاربردهای اصلی دیورژانس است. این معادله بیان می‌کند که شارش به خارج باعث کاهش چگالی درون حجم می‌شود. در حالت کلی $\rho = \rho(x, y, z, t)$ است. اگر $\rho = \rho(t)$ در اینصورت

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

و اگر ثابت $\rho = \rho_0 =$ در اینصورت سیال تراکم ناپذیر و

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \ : \ \text{بردار } \vec{v} \text{ سیملوله‌ای است}$$

عملگر دیورژانس

اتحاد مفید

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 3}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial z} = 1$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 3$$

عملگر دیورژانس

اتحاد مفید

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \phi\vec{A} = \vec{\nabla}\phi \cdot \vec{A} + \phi\vec{\nabla} \cdot \vec{A}}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \phi\vec{A} = \frac{\partial}{\partial x}(\phi A_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\phi A_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\phi A_z)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \phi\vec{A} = (\frac{\partial \phi}{\partial x}A_x + \phi\frac{\partial A_x}{\partial x}) + (\frac{\partial \phi}{\partial y}A_y + \phi\frac{\partial A_y}{\partial y}) + (\frac{\partial \phi}{\partial z}A_z + \phi\frac{\partial A_z}{\partial z})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \phi\vec{A} = (\frac{\partial \phi}{\partial x}A_x + \frac{\partial \phi}{\partial y}A_y + \frac{\partial \phi}{\partial z}A_z) + \phi(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}A_x + \frac{\partial \phi}{\partial y}A_y + \frac{\partial \phi}{\partial z}A_z = \vec{\nabla}\phi \cdot \vec{A}, \quad \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \phi\vec{A} = \vec{\nabla}\phi \cdot \vec{A} + \phi\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

عملگر دیورژانس

اتحاد مفید

$$f = f(r), \quad \vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

آنگاه

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot f(r)\vec{r} = 3f(r) + r\frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}}$$

با استفاده از اتحاد

$$\vec{\nabla} \cdot \phi\vec{A} = \vec{\nabla}\phi \cdot \vec{A} + \phi\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

داریم

$$\vec{\nabla} \cdot f(r)\vec{r} = \vec{\nabla} f(r) \cdot \vec{r} + f(r)\vec{\nabla} \cdot \vec{r}$$

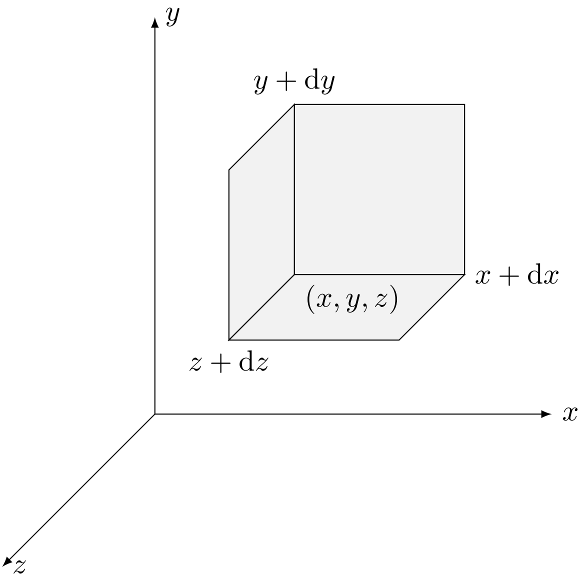
می‌دانیم

$$\vec{\nabla} f(r) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\frac{\vec{r}}{r}, \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 3$$

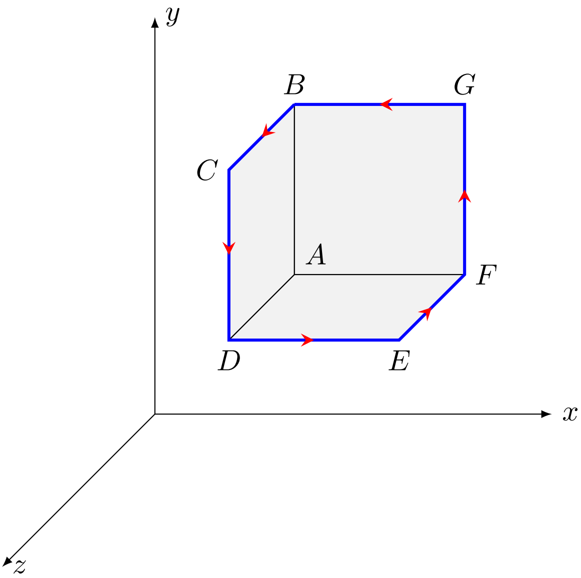
بنابراین

$$\vec{\nabla} \cdot f(r)\vec{r} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{r} + 3f(r) = 3f(r) + r\frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}$$

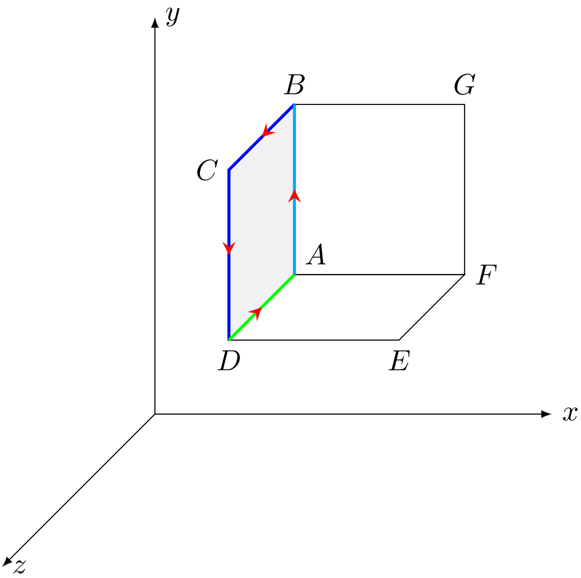
عملگر کرل



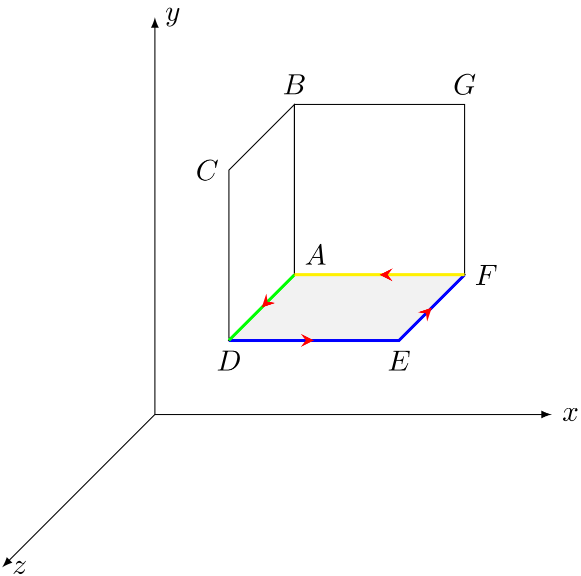
عملگر کرل



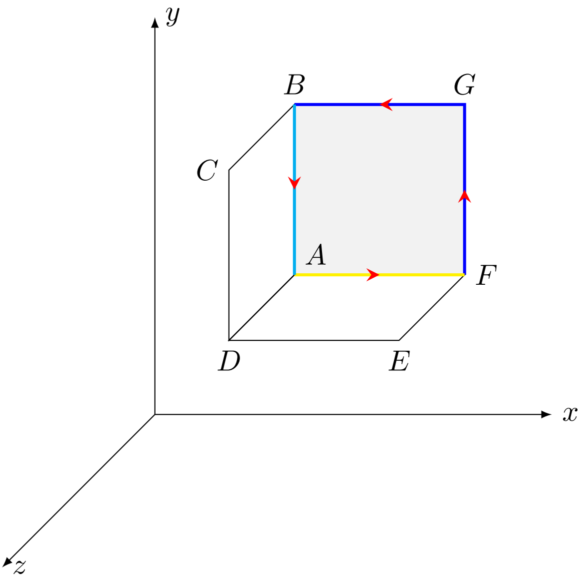
عملگر کرل



عملگر کرل



عملگر کرل



عملگر کرل

$$\oint_{BCDEFGB} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_{ABCDA} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \oint_{ABCDA} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \oint_{ABCDA} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$\oint_{ABCDA} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{AB} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{BC} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{CD} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{DA} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$\oint_{ADEFA} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{AD} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{DE} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{EF} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{FA} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$\oint_{AFGBA} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{AF} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{FG} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{GB} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{BA} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

عملگر کرل

$$\oint_{ABCDA} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{AB} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{BC} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{CD} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{DA} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

مسیر AB

$$\mathrm{d}\vec{l} = \hat{j}\mathrm{d}y, \quad \int A_y \mathrm{d}y$$

مسیر BC

$$\mathrm{d}\vec{l} = \hat{k}\mathrm{d}z, \quad \int A_z(x, y+\mathrm{d}y, z)\mathrm{d}z = \int \left(A_z + \frac{\partial A_z}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z$$

مسیر CD

$$\mathrm{d}\vec{l} = -\hat{j}\mathrm{d}y, \quad -\int A_y \mathrm{d}y = -\int \left(A_y + \frac{\partial A_y}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y$$

مسیر DA

$$\mathrm{d}\vec{l} = -\hat{k}\mathrm{d}z, \quad -\int A_z \mathrm{d}z$$

عملگر کرل

$$\oint_{ABCDA} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{AB} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{BC} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{CD} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{DA} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

مسیر AB

$$\int_{AB} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int A_y \mathrm{d}y$$

مسیر BC

$$\int_{BC} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int \left(A_z + \frac{\partial A_z}{\partial y}\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z = \int A_z \mathrm{d}z + \int \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

مسیر CD

$$\int_{CD} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int \left(A_y + \frac{\partial A_y}{\partial z}\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y = -\int A_y \mathrm{d}y - \int \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

مسیر DA

$$\int_{DA} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int A_z \mathrm{d}z$$

عملگر کرل

مسیر AB

$$\int_{AB} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int A_y \mathrm{d}y$$

مسیر BC

$$\int_{BC} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int A_z \mathrm{d}z + \int \left(\frac{\partial A_z}{\partial y}\right) \mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

مسیر CD

$$\int_{CD} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int A_y \mathrm{d}y - \int \left(\frac{\partial A_y}{\partial z}\right) \mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

مسیر DA

$$\int_{DA} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int A_z \mathrm{d}z$$

$$\oint_{ABCDA} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) \mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

عملگر کرل

$$\oint_{ABCDA}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

اگر بطور مشابه، روش حل انتگرال روی مسیر $ABCDA$ را به دو مسیر بسته $ADEFA$ و $AFGBA$ دیگر اعمال کنیم، داریم

$$\oint_{ABCDA}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$\oint_{ABCDA}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\oint\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\oint_{BCDEFGB}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\oint_{ABCDA}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}+\oint_{ABCDA}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}+\oint_{ABCDA}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$\oint\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\int\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\int\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\partial\right.$$

عملگر کرل

$$\oint \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) \mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$+ \int \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \mathrm{d}z\mathrm{d}x$$
$$+ \int \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

عملگر کرل : $\vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$

$$\oint \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int \vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot\hat{i}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \int \vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot\hat{j}\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \int \vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot\hat{k}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

قضیه استوکس : $\oint \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int \vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$

عملگر کرل

بیان مفهوم کرل:

وقتی که چرخ پره دار کوچک در درون سیال قرار دهیم، چرخ علاوه بر حرکت انتقالی در سیال در ناحیه‌ای که $\vec{\nabla} \times \vec{v} \neq 0$ است تمایل به چرخیدن دارد. به سیالی که در آن $\vec{\nabla} \times \vec{v}$ است، گفته می‌شود که میدان $\vec{v}$ میدان چرخشی دارد. به سیالی که $\vec{\nabla} \times \vec{v}$ در همه جا صفر است، گفته می‌شود که $\vec{v}$ میدان چرخشی ندارد.

قضیه‌ی استوکس:

انتگرال خطی یک میدان برداری روی یک منحنی بسته برابر است با انتگرال سطحی که بوسیله این منحنی محصور شده باشد.

$$\oint \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

عملگر کرل

اتحاد مفید

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{r} = 0}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{r} = \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right)\hat{k}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{r} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{r} = 0$$

عملگر کرل

اتحاد مفید

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \phi\vec{A} = \vec{\nabla}\phi \times \vec{A} + \phi\vec{\nabla} \times \vec{A}}$$

$$\vec{\nabla} \times \phi\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \phi A_x & \phi A_y & \phi A_z \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \phi\vec{A} = & \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}A_z + \phi\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial\phi}{\partial z}A_y - \phi\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{i} \\ & + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}A_x + \phi\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial\phi}{\partial x}A_z - \phi\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\hat{j} \\ & + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}A_y + \phi\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial\phi}{\partial y}A_x - \phi\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{k} \end{aligned}$$

عملگر کرل

اتحاد مفید

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \phi\vec{A} = &\left(\frac{\partial \phi}{\partial y} A_z + \phi \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial z} A_y - \phi \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{i} \\
&+ \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} A_x + \phi \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial \phi}{\partial x} A_z - \phi \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\hat{j} \\
&+ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} A_y + \phi \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial y} A_x - \phi \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{k}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \phi\vec{A} = &\left(\frac{\partial \phi}{\partial y} A_z - \frac{\partial \phi}{\partial z} A_y\right)\hat{i} + \phi\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{i} \\
&+ \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} A_x - \frac{\partial \phi}{\partial x} A_z\right)\hat{j} + \phi\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\hat{j} \\
&+ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} A_y - \frac{\partial \phi}{\partial y} A_x\right)\hat{k} + \phi\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{k}
\end{aligned}
$$

عملگر کرل

اتحاد مفید

$$\vec{\nabla}\times\phi\vec{A}=\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}A_z-\frac{\partial\phi}{\partial z}A_y\right)\hat{i}+\phi\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{i}$$
$$+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}A_x-\frac{\partial\phi}{\partial x}A_z\right)\hat{j}+\phi\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\hat{j}$$
$$+\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}A_y-\frac{\partial\phi}{\partial y}A_x\right)\hat{k}+\phi\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{k}$$

$$\vec{\nabla}\times\phi\vec{A}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\ \frac{\partial\phi}{\partial x}&\frac{\partial\phi}{\partial y}&\frac{\partial\phi}{\partial z}\\ A_x&A_y&A_z\end{vmatrix}+\phi\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ A_x&A_y&A_z\end{vmatrix}$$

$$\vec{\nabla}\times\phi\vec{A}=\vec{\nabla}\phi\times\vec{A}+\phi\vec{\nabla}\times\vec{A}$$

عملگر کرل

اتحاد مفید

$$f = f(r), \quad \vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

آنگاه

$$\boxed{\vec{\nabla} \times f(r)\vec{r} = 3f(r) + r\frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}}$$

با استفاده از اتحاد

$$\vec{\nabla} \times \phi\vec{A} = \vec{\nabla}\phi \times \vec{A} + \phi\vec{\nabla} \times \vec{A}$$

داریم

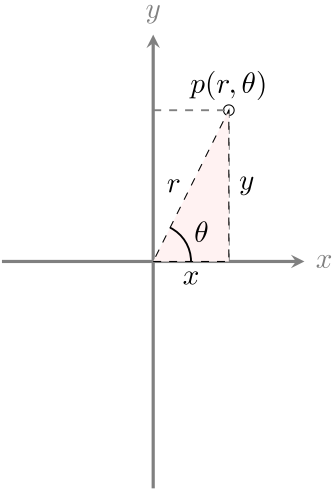
$$\vec{\nabla} \times f(r)\vec{r} = \vec{\nabla}f(r) \times \vec{r} + f(r)\vec{\nabla} \times \vec{r}$$

می‌دانیم

$$\vec{\nabla}f(r) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\frac{\vec{r}}{r}, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{r} = 0$$

بنابراین

$$\vec{\nabla} \times f(r)\vec{r} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\frac{\vec{r}}{r} \times \vec{r} + 0 = 0$$



اندازه و جهت

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

بردار مکان

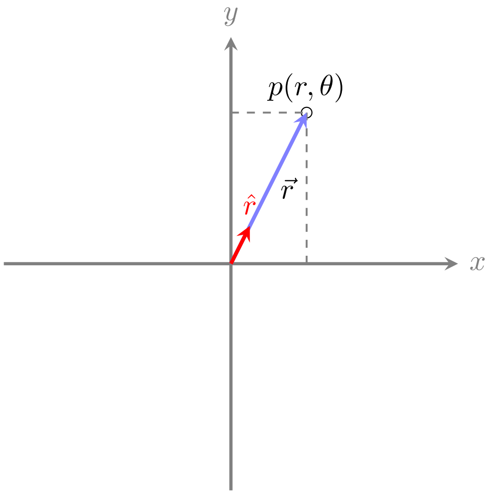
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y$$

$$\vec{r} = \hat{i}r\cos\theta + \hat{j}r\sin\theta$$

$$\vec{r} = r(\hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta)$$

دستگاه مختصات دوبعدی_قطبی



اندازه و جهت

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

بردار مکان

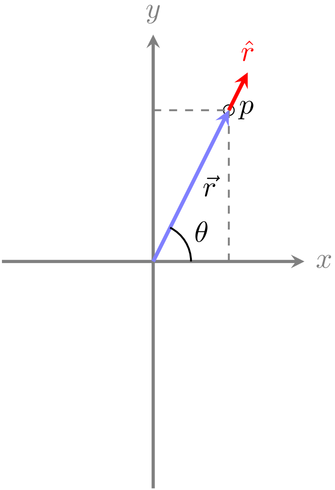
$$\vec{r} = r(\hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta)$$

$$\vec{r} = r\hat{r} \Rightarrow \hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\boxed{\hat{r} = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta}$$

$$|\hat{r}| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$$

دستگاه مختصات دوبعدی_قطبی



اندازه و جهت

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

بردار مکان

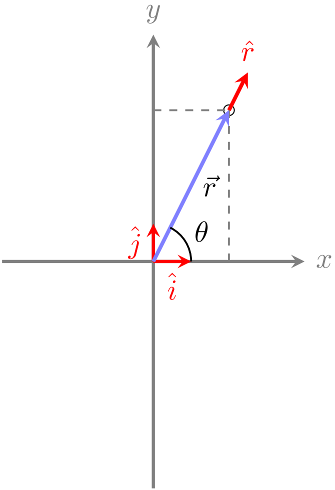
$$\vec{r} = r(\hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta)$$

$$\vec{r} = r\hat{r} \Rightarrow \hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\boxed{\hat{r} = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta}$$

$$|\hat{r}| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$$

دستگاه مختصات دوبعدی_قطبی



<u>بردار مکان</u>

$$\vec{r} = r\hat{r}, \quad |\hat{r}| = 1$$

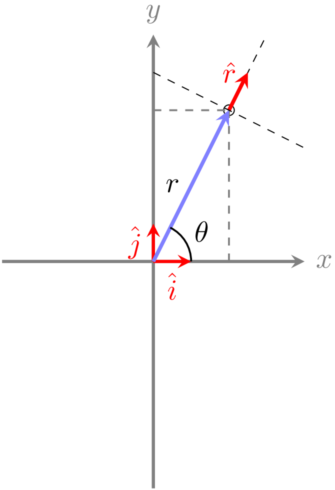
<u>بردار یکه</u>

$$\hat{r} = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta$$

- بطور کلی برای هر دستگاه مختصات دوبعدی دو بردار یکه وجود دارد. برای مثال، $\hat{i}$ و $\hat{j}$ ، در دستگاه مختصات دکارتی در دو بعد بردارهای یکه می‌باشند.

- به همین ترتیب برای دستگاه مختصات قطبی، علاوه بر بردار یکه $\hat{r}$، نیاز به یک بردار یکه دیگر نیز می‌باشد.

دستگاه مختصات دوبعدی_قطبی



بردار مکان

$$\vec{r} = r\hat{r}, \quad |\hat{r}| = 1$$

بردار یکه

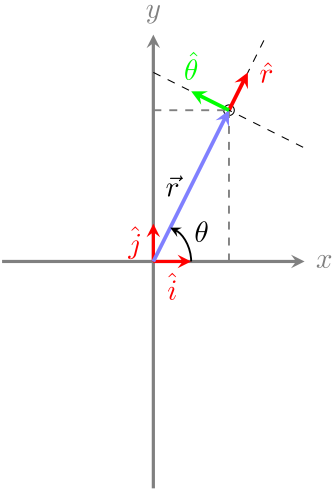
$$\hat{r} = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta$$

- بردارهای یکه بر یکدیگر عمود هستند. برای مثال در دستگاه مختصات دکارتی، بردارهای یکه $\hat{i}$ و $\hat{j}$ بر یکدیگر عمودند.

$$\hat{i}\cdot\hat{j} = 0$$

- به همین ترتیب برای دستگاه مختصات قطبی، بردار یکه‌ای وجود دارد که بر بردار یکه $\hat{r}$ عمود است.

دستگاه مختصات دوبعدی_قطبی



<u>بردار مکان</u>

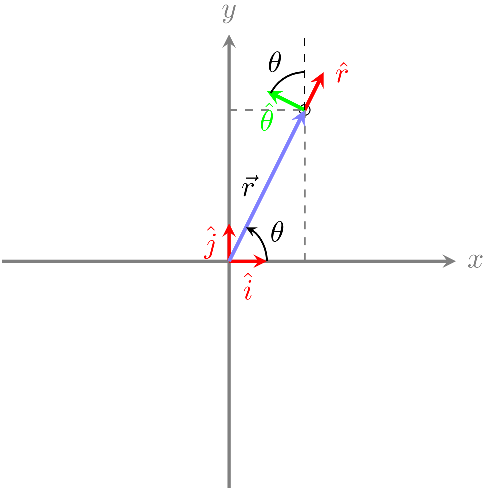
$$\vec{r} = r\hat{r}, \quad |\hat{r}| = 1$$

<u>بردار یکه</u>

$$\hat{r} = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta$$

- بردارهای یکه در امتداد مثبت تغییرات مختصات هستند. برای مثال در دستگاه مختصات دکارتی، بردار یکه $\hat{i}$ در امتداد مثبت تغییرات محور x است و بردار یکه $\hat{j}$ در امتداد مثبت تغییرات محور y است.

- در دستگاه مختصات قطبی، $\hat{r}$ در امتداد مثبت تغییرات بردار $\vec{r}$ است.



<u>بردار مکان</u>

$$\vec{r} = r\hat{r}, \quad |\hat{r}| = 1$$

<u>بردار یکه</u>

$$\hat{r} = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta$$

$$\hat{\theta} = -\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta$$

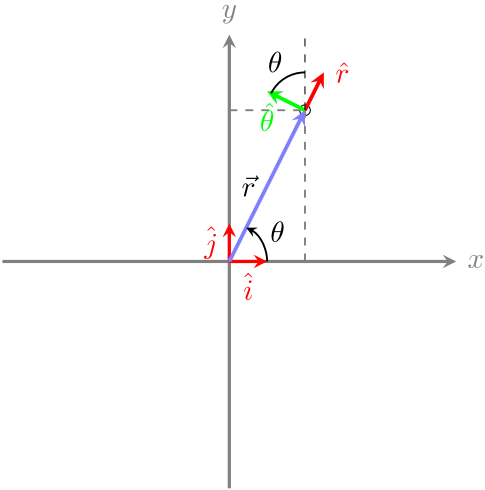
$$|\hat{\theta}| = 1$$

$$\sqrt{(-\sin\theta)^2 + \cos^2\theta} = 1$$

$$\hat{r} \cdot \hat{\theta} = 0$$

$$\cos\theta(-\sin\theta) + \cos\theta\sin\theta = 0$$

دستگاه مختصات دوبعدی_قطبی



بردار مکان

$$\vec{r} = r\hat{r}, \quad |\hat{r}| = 1$$

بردار یکه

$$\hat{r} = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta,\ |\hat{r}| = 1$$

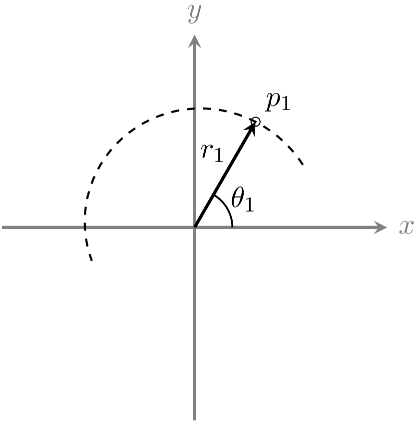
$$\hat{\theta} = -\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta,\ |\hat{\theta}| = 1$$

$$\hat{r}\cdot\hat{\theta} = 0$$

اتحادهای مفید

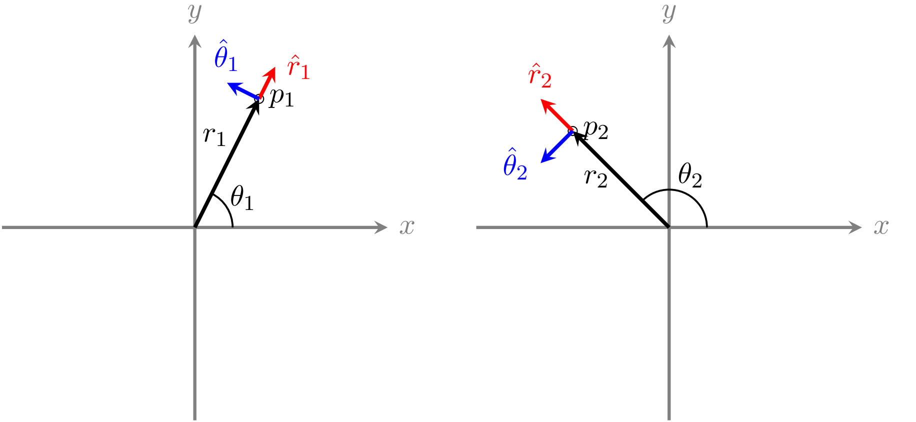
$$\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}\theta} = \hat{\theta}, \quad \frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}\theta} = -\hat{r}$$

دستگاه مختصات دوبعدی_قطبی



$$r = r(t),\, \theta = \theta(t) : \quad \begin{cases} p_1 : r_1 = r(t_1),\ \theta_1 = \theta(t_1) \\ p_2 : r_2 = r(t_2),\ \theta_2 = \theta(t_2) \end{cases}$$

دستگاه مختصات دوبعدی-قطبی



$$r = r(t),\ \theta = \theta(t): \quad \begin{cases} p_1 : r_1 = r(t_1),\ \theta_1 = \theta(t_1),\ \hat{r}_1 = \hat{r}(\theta_1),\ \hat{\theta}_1 = \hat{\theta}(\theta_1) \\ p_2 : r_2 = r(t_2),\ \theta_2 = \theta(t_2),\ \hat{r}_2 = \hat{r}(\theta_2),\ \hat{\theta}_2 = \hat{\theta}(\theta_2) \end{cases}$$

دستگاه مختصات دوبعدی‌ـقطبی

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \hat{r} = \cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j}, \quad \hat{\theta} = -\sin\theta \hat{i} + \cos\theta \hat{j}$$

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta \hat{i} + \cos\theta \hat{j} = \hat{\theta}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r\hat{r}\right)$$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\hat{r} + r\hat{\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\hat{r} + r\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t}$$

اگر

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}, \quad \dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

قاعده‌ی زنجیری

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\hat{r} + r\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}}$$

دستگاه مختصات دوبعدی-قطبی

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \hat r = \cos\theta \hat i + \sin\theta \hat j, \quad \hat\theta = -\sin\theta \hat i + \cos\theta \hat j$$

قاعده زنجیری

$$\vec v = v_r \hat r + v_\theta \hat\theta$$

$$\begin{cases} v_r = \dot r \\ v_\theta = r\dot\theta \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec v = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot r \hat r\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r\dot\theta\hat\theta\right)$$

$$\vec a = \frac{\mathrm{d}\dot r}{\mathrm{d}t}\hat r + \dot r \frac{\mathrm{d}\hat r}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\dot\theta\hat\theta + r\frac{\mathrm{d}\dot\theta}{\mathrm{d}t}\hat\theta + r\dot\theta\frac{\mathrm{d}\hat\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec a = \frac{\mathrm{d}\dot r}{\mathrm{d}t}\hat r + \dot r \frac{\mathrm{d}\hat r}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\dot\theta\hat\theta + r\frac{\mathrm{d}\dot\theta}{\mathrm{d}t}\hat\theta + r\dot\theta\frac{\mathrm{d}\hat\theta}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

اگر

$$\dot r = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}, \quad \dot\theta = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$\ddot r = \frac{\mathrm{d}\dot r}{\mathrm{d}t}, \quad \dot\theta = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \hat{r} = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}, \quad \hat{\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}$$

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}t}\hat{r} + \dot{r}\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \\ &+ \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}\theta} \\ &+ \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}^2\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}\theta}\end{aligned}$$

اگر

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}, \quad \dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$\ddot{r} = \frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}t}, \quad \dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j} = \hat{\theta}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}\theta} = -\cos\theta\hat{i} - \sin\theta\hat{j} = -\hat{r}$$

دستگاه مختصات دوبعدی ـ قطبی

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \hat{r} = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}, \quad \hat{\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}^2\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}\theta}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j} = \hat{\theta}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}\theta} = -\cos\theta\hat{i} - \sin\theta\hat{j} = -\hat{r}$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} - r\dot{\theta}^2\hat{r}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{a} = &(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} \\ &+ (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}\end{aligned}}$$

$$\vec{a} = a_r\hat{r} + a_\theta\hat{\theta}$$

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{cases}$$

دستگاه مختصات دوبعدی_قطبی

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t)$$

$$\hat{r} = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}, \quad \hat{\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j} = \hat{\theta}, \quad \frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}\theta} = -\cos\theta\hat{i} - \sin\theta\hat{j} = -\hat{r}$$

حالتهای خاص ۱_حرکت بر مسیر دایره‌ای با شعاع ثابت R

$$r = R, \quad \theta = \theta(t)$$

$$\vec{r} = R\hat{r}$$

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\hat{r} + R\ddot{\theta}\hat{\theta}$$

<u>بطور خلاصه</u>

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t)$$

$$\hat{r} = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}$$

$$\hat{\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}$$

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}$$

دستگاه مختصات دوبعدی_قطبی

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t)$$

$$\hat{r} = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}, \quad \hat{\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j} = \hat{\theta}, \quad \frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}\theta} = -\cos\theta\hat{i} - \sin\theta\hat{j} = -\hat{r}$$

حالتهای خاص ۲_حرکت بر مسیر دایره‌ای با شعاع ثابت R و سرعت زاویه‌ای ثابت ω

$$r = R, \quad \theta = \omega t + \theta_0$$

$$\vec{r} = R\hat{r}$$

$$\vec{v} = R\omega\hat{\theta}$$

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\hat{r}$$

سرعت مماسی و شتاب شعاعی

بطور خلاصه

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t)$$

$$\hat{r} = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}$$

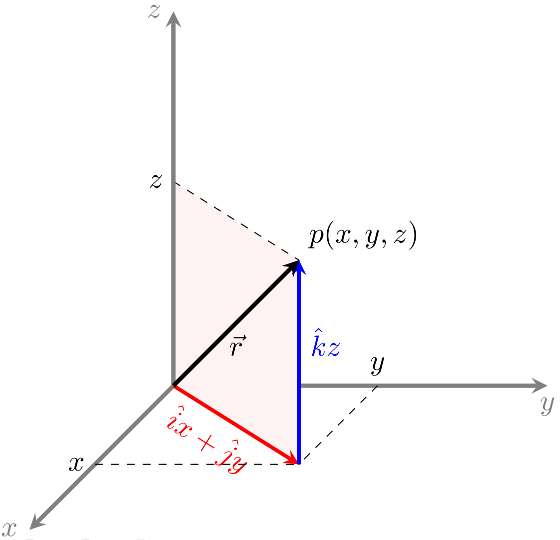
$$\hat{\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}$$

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}$$

دستگاه مختصات استوانه‌ای



<u>بردار یکه</u>

$$|\hat{i}|=|\hat{j}|=|\hat{k}|=1$$

<u>بردار مکان</u>

$$\vec{r}=\hat{i}x+\hat{j}y+\hat{k}z$$

$$x=\hat{i}\cdot\vec{r}$$

$$y=\hat{j}\cdot\vec{r}$$

$$z=\hat{k}\cdot\vec{r}$$

$$x,y,z\in\mathbb{R}$$

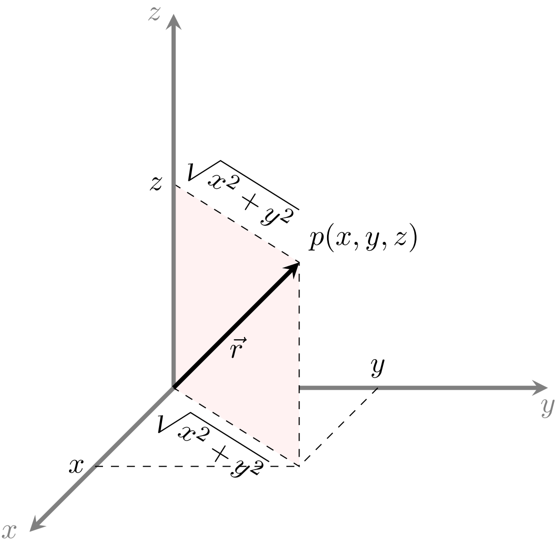
دستگاه مختصات استوانه‌ای

<u>بردار یکه</u>

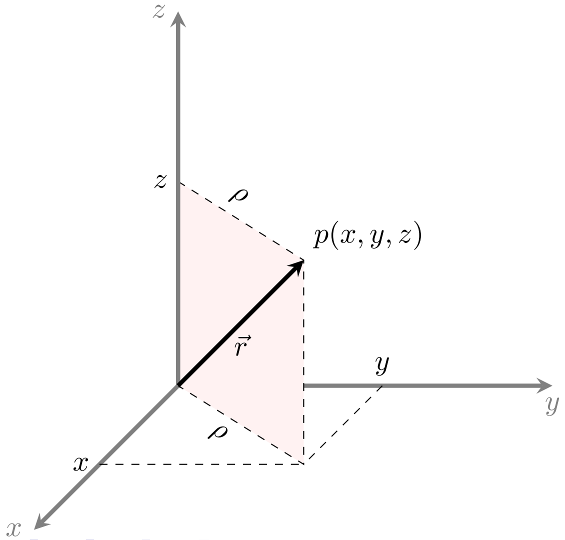
$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$$

<u>بردار مکان</u>

$$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$$



دستگاه مختصات استوانه‌ای



<u>بردار مکان</u>

$$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$$

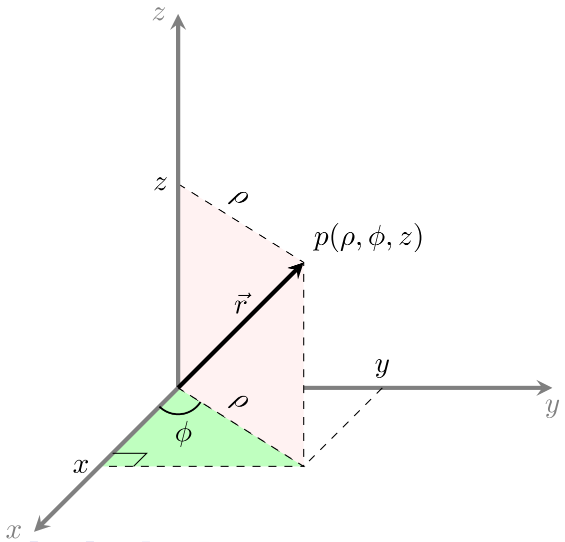
<u>بزرگی بردار مکان</u>

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

دستگاه مختصات استوانه‌ای



بردار مکان

$$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$$

بزرگی بردار مکان

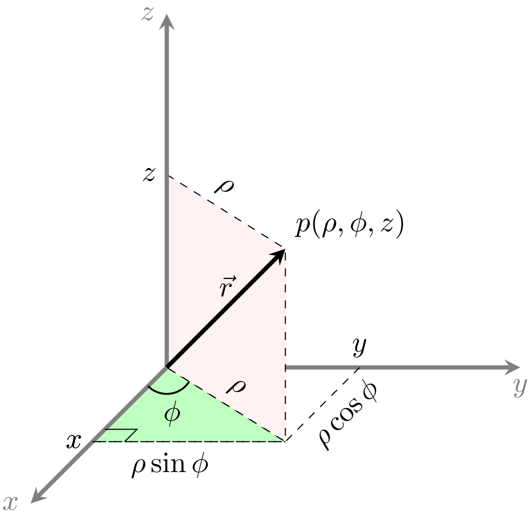
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

جهتهای بردار مکان

$$\tan\phi = \frac{y}{x}$$

دستگاه مختصات استوانه‌ای



بردار مکان

$$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$$

بزرگی بردار مکان

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

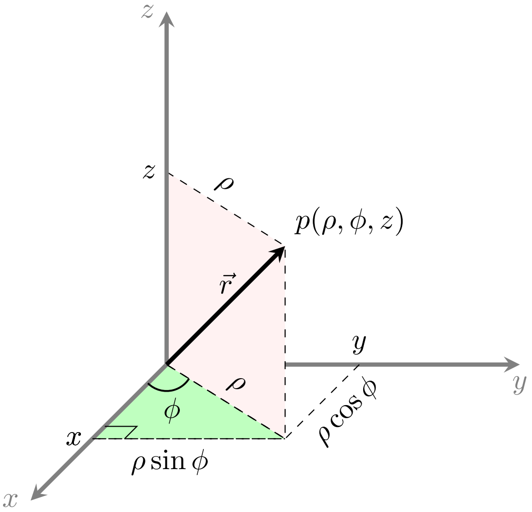
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

جهتهای بردار مکان

$$\tan\phi = \frac{y}{x}$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi \\ y = \rho\sin\phi \end{cases}$$

دستگاه مختصات استوانه‌ای



بزرگی بردار مکان

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

جهتهای بردار مکان

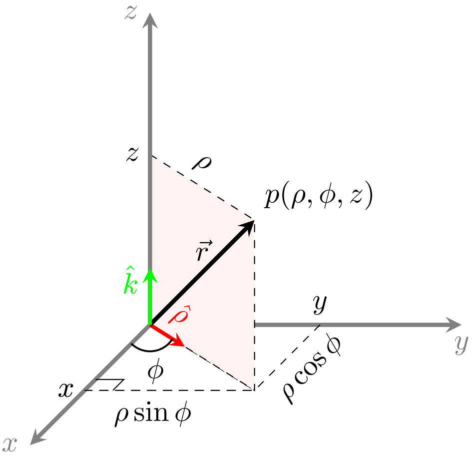
$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi \\ y = \rho\sin\phi \end{cases}$$

بردار مکان

$$\vec{r} = \hat{i}\rho\cos\phi + \hat{j}\rho\sin\phi + \hat{k}z$$

دستگاه مختصات استوانه‌ای



بزرگی بردار مکان

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

جهتهای بردار مکان

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

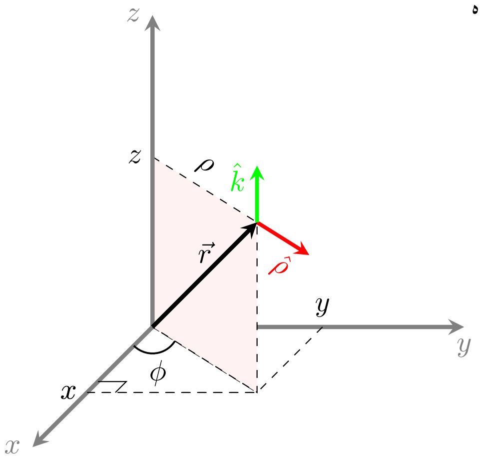
بردار مکان

$$\vec{r} = \rho(\hat{i}\cos\phi + \hat{j}\sin\phi) + \hat{k}z$$

$$\hat{\rho} = \hat{i}\cos\phi + \hat{j}\sin\phi, \quad |\hat{\rho}| = 1$$

$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + \hat{k}z$$

دستگاه مختصات استوانه‌ای



بردارهای یکه

یادآوری: بردارهای یکه در تمامی دستگاههای مختصات راستگرد هستند. برای مثال در دستگاه مختصات دکارتی راستگردی بردارهای یکه بصورت زیر داده می‌شود،

$$\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k},\quad \hat{j}\times\hat{k}=\hat{i},\quad \hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$$

بردار مکان در دستگاه مختصات استوانه‌ای با استفاده از بردارهای یکه $\hat{\rho}$ و $\hat{k}$ داده می شود،

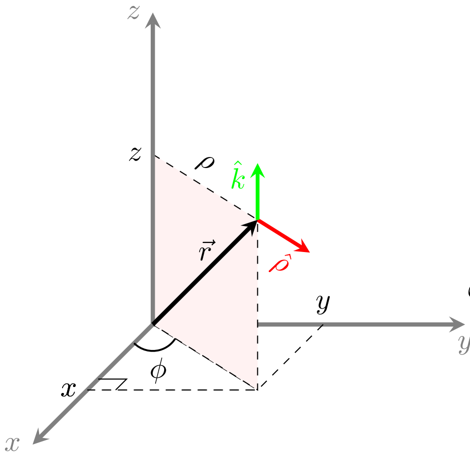
$$\vec{r}=\rho\hat{\rho}+\hat{k}z$$

که

$$\hat{\rho}=\hat{i}\cos\phi+\hat{j}\sin\phi$$

بردارهای یکه $\hat{\rho}$ و $\hat{k}$ در داخل صفحه‌ی صورتی رنگ قرار دارند و بر یکدیگر عمود می‌باشند.

بردارهای یکه



$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + \hat{k}z$$

$$\hat{\rho} = \hat{i}\cos\phi + \hat{j}\sin\phi$$

بردارهای یکه $\hat{\rho}$ و $\hat{k}$ **در داخل صفحه‌ی صورتی رنگ** قرار دارند و بر یکدیگر عمود می‌باشند.

$$\hat{\rho} \cdot \hat{k} = 0$$

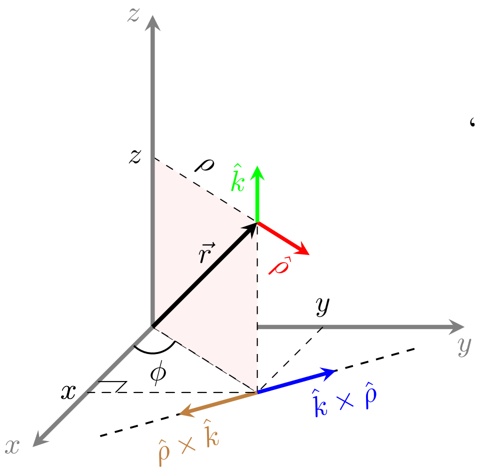
در دستگاه مختصات استوانه‌ای علاوه بر بردارهای یکه‌ی $\hat{\rho}$ و $\hat{k}$، بردار یکه دیگری در جهت تغییرات زاویه‌ی ϕ وجود دارد که با $\hat{\phi}$ نمایش داده می‌شود.

بردار یکه $\hat{\phi}$ **عمود بر صفحه‌ی صورتی رنگ** است،

$$\hat{k} \cdot \hat{\phi} = \hat{\rho} \cdot \hat{\phi} = 0$$

دستگاه مختصات استوانه‌ای

بردارهای یکه



$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + \hat{k}z$$

$$\hat{\rho} = \hat{i}\cos\phi + \hat{j}\sin\phi$$

بردار یکه $\hat{\phi}$ عمود بر صفحه‌ی صورتی رنگ است،

$$\hat{k}\cdot\hat{\phi} = \hat{\rho}\cdot\hat{\phi} = 0$$

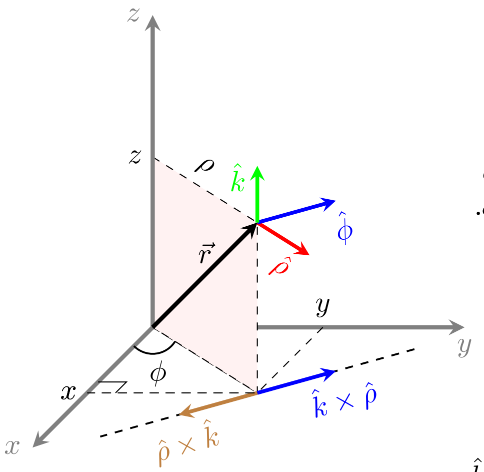
بردارهای یکه $\hat{\phi}$ از ضرب خارجی $\hat{\rho}$ و $\hat{k}$ بدست می‌آید. بنابراین

$$\hat{\rho}\times\hat{k} = \hat{i}\sin\phi - \hat{j}\cos\phi$$

$$\hat{k}\times\hat{\rho} = -\hat{i}\sin\phi + \hat{j}\cos\phi$$

دستگاه مختصات استوانه‌ای

<u>بردارهای یکه</u>



$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + \hat{k}z$$

$$\hat{\rho} = \hat{\imath}\cos\phi + \hat{\jmath}\sin\phi$$

$$\hat{k}\cdot\hat{\rho} = \hat{k}\cdot\hat{\phi} = \hat{\rho}\cdot\hat{\phi} = 0$$

مطابق شکل $\hat{k} \times \hat{\rho}$ در جهت مثبت تغییرات ϕ است و $\hat{\rho} \times \hat{k}$ در جهت منفی تغییرات ϕ است. بنابراین

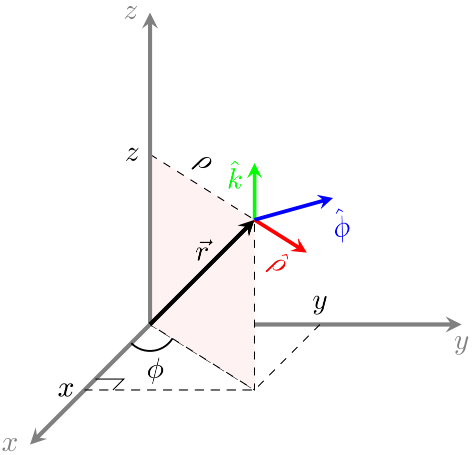
$$\hat{k} \times \hat{\rho} = \hat{\phi} = -\hat{\imath}\sin\phi + \hat{\jmath}\cos\phi$$

برای دستگاه مختصات استوانه‌ای راستگردی بردارهای یکه بصورت زیر داده می‌شود،

$$\hat{k} \times \hat{\rho} = \hat{\phi}, \quad \hat{\rho} \times \hat{\phi} = \hat{k}, \quad \hat{\phi} \times \hat{k} = \hat{\rho}$$

دستگاه مختصات استوانه‌ای

بردارهای یکه



$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + \hat{k}z$$

$$\hat{\rho} = \hat{\imath}\cos\phi + \hat{\jmath}\sin\phi$$

$$\hat{\phi} = -\hat{\imath}\sin\phi + \hat{\jmath}\cos\phi$$

$$\hat{k}\cdot\hat{\rho} = \hat{k}\cdot\hat{\phi} = \hat{\rho}\cdot\hat{\phi} = 0$$

بردارهای یکه راستگردند،

$$\hat{k}\times\hat{\rho} = \hat{\phi}$$

$$\hat{\rho}\times\hat{\phi} = \hat{k}$$

$$\hat{\phi}\times\hat{k} = \hat{\rho}$$

دستگاه مختصات استوانه‌ای

سرعت و شتاب

$$\rho = \rho(t), \quad \phi = \phi(t), \quad z = z(t)$$

$$\hat{\rho} = \cos\phi\hat{i} + \sin\phi\hat{j}, \quad \hat{\phi} = -\sin\phi\hat{i} + \cos\phi\hat{j}$$

$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{k}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho\hat{\rho}) + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\hat{k}$$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\hat{\rho} + \rho\frac{\mathrm{d}\hat{\rho}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\hat{k}$$

قاعده‌ی زنجیری

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\hat{\rho} + \rho\frac{\mathrm{d}\hat{\rho}}{\mathrm{d}\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\hat{k}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\rho}}{\mathrm{d}\phi} = -\sin\phi\hat{i} + \cos\phi\hat{j} = \hat{\phi}$$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\hat{\rho} + \rho\hat{\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\hat{k}$$

اگر

$$\dot{\rho} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}, \quad \dot{\phi} = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}, \quad \dot{z} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{k}}$$

دستگاه مختصات استوانه‌ای

سرعت و شتاب

$$\rho = \rho(t), \quad \phi = \phi(t), \quad z = z(t)$$

$$\hat{\rho} = \cos\phi \hat{i} + \sin\phi \hat{j}, \quad \hat{\phi} = -\sin\phi \hat{i} + \cos\phi \hat{j}, \quad \mathrm{d}\hat{\rho}/\mathrm{d}\phi = \hat{\phi}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\rho}}{\mathrm{d}t} = \dot{\phi}\hat{\phi}$$

$$\boxed{\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{k}}$$

$$v_\rho = \dot{\rho}$$
$$v_\phi = \rho\dot{\phi}$$
$$v_z = \dot{z}$$

سرعت و شتاب

$$\rho=\rho(t),\quad \phi=\phi(t),\quad z=z(t)$$

$$\hat{\rho}=\cos\phi\hat{i}+\sin\phi\hat{j},\quad \hat{\phi}=-\sin\phi\hat{i}+\cos\phi\hat{j},\quad \mathrm{d}\hat{\rho}/\mathrm{d}\phi=\hat{\phi}$$

$$\vec{v}=\dot{\rho}\hat{\rho}+\rho\dot{\phi}\hat{\phi}+\dot{z}\hat{k}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{v}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\rho}\hat{\rho})+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\rho\dot{\phi}\hat{\phi}\right)+\frac{\mathrm{d}\dot{z}}{\mathrm{d}t}\hat{k}$$

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\dot{\rho}}{\mathrm{d}t}\hat{\rho}+\dot{\rho}\frac{\mathrm{d}\hat{\rho}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\dot{\phi}\hat{\phi}+\rho\frac{\mathrm{d}\dot{\phi}}{\mathrm{d}t}\hat{\phi}+\rho\dot{\phi}\frac{\mathrm{d}\hat{\phi}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\dot{z}}{\mathrm{d}t}\hat{k}$$

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\dot{\rho}}{\mathrm{d}t}\hat{\rho}+\dot{\rho}\frac{\mathrm{d}\hat{\rho}}{\mathrm{d}\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\dot{\phi}\hat{\phi}+\rho\frac{\mathrm{d}\dot{\phi}}{\mathrm{d}t}\hat{\phi}-\rho\dot{\phi}\frac{\mathrm{d}\hat{\phi}}{\mathrm{d}\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\dot{z}}{\mathrm{d}t}\hat{k}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\phi}}{\mathrm{d}\phi}=-\hat{i}\cos\phi-\hat{j}\sin\phi=-\hat{\rho}$$

دستگاه مختصات استوانه‌ای

سرعت و شتاب

$$\rho = \rho(t), \quad \phi = \phi(t), \quad z = z(t)$$

$$\hat{\rho} = \cos\phi\hat{i} + \sin\phi\hat{j}, \quad \hat{\phi} = -\sin\phi\hat{i} + \cos\phi\hat{j}, \quad \mathrm{d}\hat{\rho}/\mathrm{d}\phi = \hat{\phi}, \quad \mathrm{d}\hat{\phi}/\mathrm{d}\phi = -\hat{\rho}$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\dot{\rho}}{\mathrm{d}t}\hat{\rho} + \dot{\rho}\frac{\mathrm{d}\hat{\rho}}{\mathrm{d}\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\dot{\phi}\hat{\phi} + \rho\frac{\mathrm{d}\dot{\phi}}{\mathrm{d}t}\hat{\phi} - \rho\dot{\phi}\frac{\mathrm{d}\hat{\phi}}{\mathrm{d}\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\dot{z}}{\mathrm{d}t}\hat{k}$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\dot{\rho}}{\mathrm{d}t}\hat{\rho} + \dot{\rho}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\hat{\phi} + \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\dot{\phi}\hat{\phi} + \rho\frac{\mathrm{d}\dot{\phi}}{\mathrm{d}t}\hat{\phi} - \rho\dot{\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\hat{\rho} + \frac{\mathrm{d}\dot{z}}{\mathrm{d}t}\hat{k}$$

$$\dot{\rho} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}, \quad \dot{\phi} = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$$

$$\ddot{\rho} = \frac{\mathrm{d}\dot{\rho}}{\mathrm{d}t}, \quad \ddot{\phi} = \frac{\mathrm{d}\dot{\phi}}{\mathrm{d}t}, \quad \ddot{z} = \frac{\mathrm{d}\dot{z}}{\mathrm{d}t}$$

دستگاه مختصات استوانه‌ای

سرعت و شتاب

$$\rho = \rho(t), \quad \phi = \phi(t), \quad z = z(t)$$

$$\hat{\rho} = \cos\phi \hat{i} + \sin\phi \hat{j}, \quad \hat{\phi} = -\sin\phi \hat{i} + \cos\phi \hat{j}, \quad \mathrm{d}\hat{\rho}/\mathrm{d}\phi = \hat{\phi}, \quad \mathrm{d}\hat{\phi}/\mathrm{d}\phi = -\hat{\rho}$$

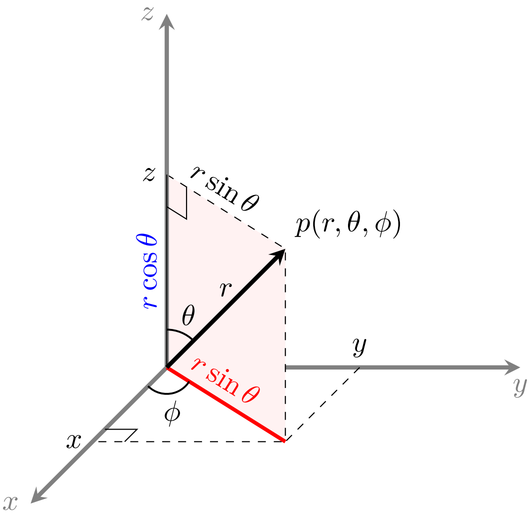
$$\frac{\mathrm{d}\hat{\rho}}{\mathrm{d}t} = \dot{\phi}\hat{\phi}, \quad \frac{\mathrm{d}\hat{\phi}}{\mathrm{d}t} = -\dot{\phi}\hat{\rho}$$

$$\vec{a} = \ddot{\rho}\hat{\rho} + \dot{\rho}\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{\rho}\dot{\phi}\hat{\phi} + \rho\ddot{\phi}\hat{\phi} - \rho\dot{\phi}\dot{\phi}\hat{\rho} + \ddot{z}\hat{k}$$

$$\boxed{\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{k}}$$

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2$$
$$a_\phi = 2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}$$
$$a_z = \ddot{z}$$

دستگاه مختصات سه‌بعدی-کروی



<u>بزرگی بردار مکان</u>

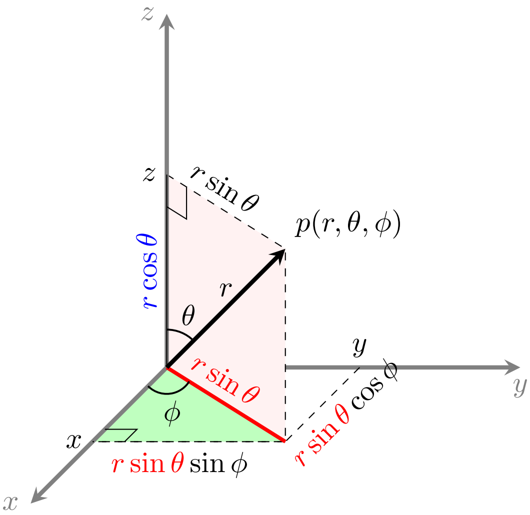
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

<u>جهتهای بردار مکان</u>

$$\tan\phi = \frac{y}{x}$$

$$\cos\theta = \frac{z}{r}$$

دستگاه مختصات سه‌بعدی-کروی



بزرگی و جهتهای بردار مکان

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

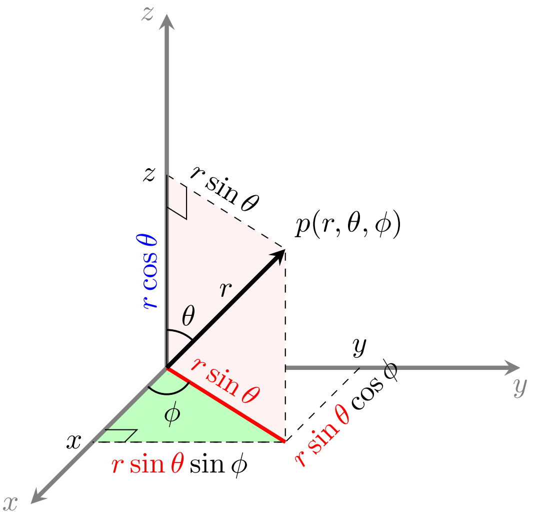
$$\tan\phi = \frac{y}{x}, \quad \cos\theta = \frac{z}{r}$$

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

بردار مکان

$$\vec{r} = (r\sin\theta\cos\phi)\hat{i} + (r\sin\theta\sin\phi)\hat{j} + (r\cos\theta)\hat{k}$$

دستگاه مختصات سه‌بعدی-کروی



بزرگی و جهتهای بردار مکان

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\tan\phi=\frac{y}{x},\quad \cos\theta=\frac{z}{r}$$

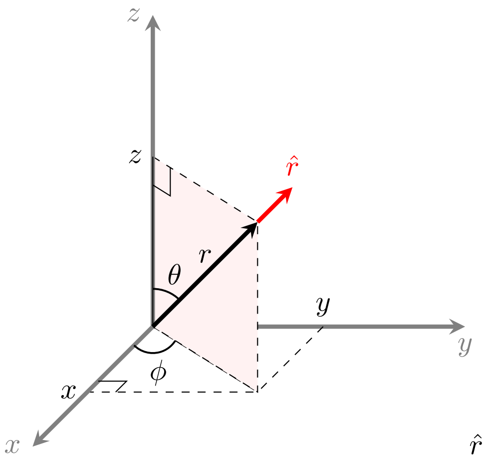
$$\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\phi \\ y=r\sin\theta\sin\phi \\ z=r\cos\theta \end{cases}$$

بردار مکان

$$\vec{r}=r[(\sin\theta\cos\phi)\hat{i} \\ +(\sin\theta\sin\phi)\hat{j} \\ +(\cos\theta)\hat{k}]$$

دستگاه مختصات سه‌بعدی-کروی

بردارهای یکه



$$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$$

$$(x, y, z) \to (r, \theta, \phi)$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{z}{r}\right)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

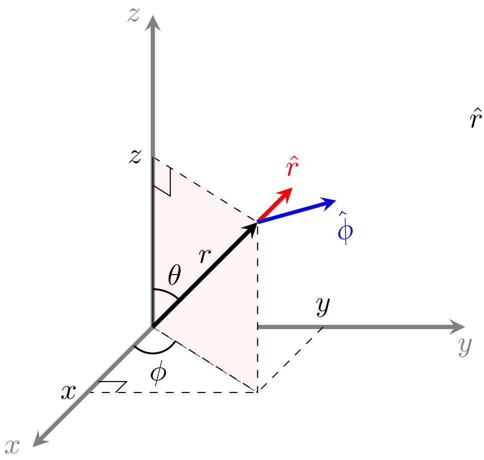
$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$\hat{r} = \hat{i}\sin\theta\cos\phi + \hat{j}\sin\theta\sin\phi + \hat{k}\cos\theta$$

$$|\hat{r}| = 1$$

دستگاه مختصات سه‌بعدی-کروی



<u>بردارهای یکه</u>

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

بردار یکه $\hat{r}$ **در داخل صفحه‌ی صورتی رنگ** است

$$\hat{r} = \hat{i}\sin\theta\cos\phi + \hat{j}\sin\theta\sin\phi + \hat{k}\cos\theta$$

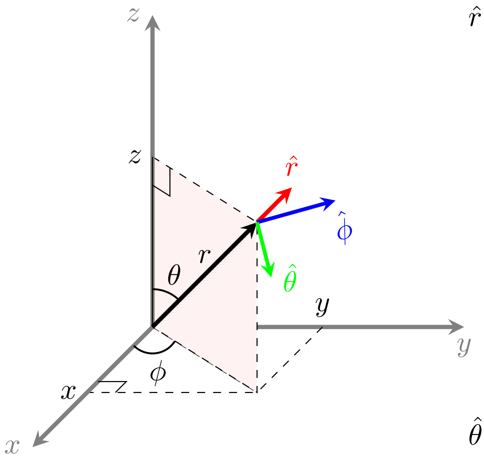
در دستگاه مختصات کروی، بردار یکه در جهت تغییرات زاویه‌ی ϕ با $\hat{\phi}$ نمایش داده می‌شود.

بردار یکه $\hat{\phi}$ **عمود بر صفحه‌ی صورتی رنگ** و **موازی با صفحه‌ی** xy است،

$$\hat{r} \cdot \hat{\phi} = 0$$

$$\hat{\phi} = -\hat{i}\sin\phi + \hat{j}\cos\phi$$

دستگاه مختصات سه‌بعدی-کروی



<u>بردارهای یکه</u>

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$\hat{r} = \hat{i}\sin\theta\cos\phi + \hat{j}\sin\theta\sin\phi + \hat{k}\cos\theta$$

$$\hat{\phi} = -\hat{i}\sin\phi + \hat{j}\cos\phi$$

$$\hat{\phi}\cdot\hat{r} = 0$$

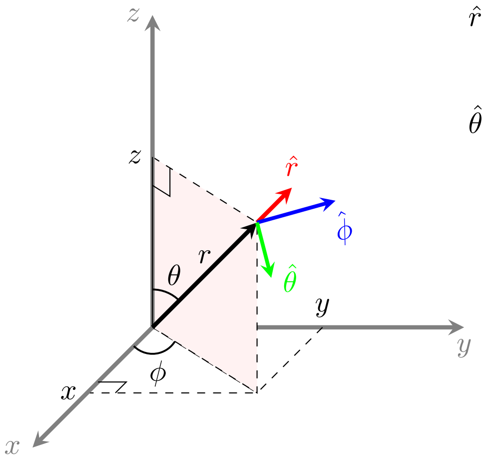
در دستگاه مختصات کروی، بردار یکه در جهت تغییرات زاویه‌ی θ با $\hat{\theta}$ نمایش داده می‌شود.

بردار یکه $\hat{\theta}$ **در داخل صفحه‌ی صورتی رنگ** قرار دارد و **عمود بر بردار یکه** $\hat{r}$ است،

$$\hat{\theta}\cdot\hat{r} = \hat{\theta}\cdot\hat{\phi} = 0$$

$$\hat{\theta} = \hat{i}\cos\theta\cos\phi + \hat{j}\cos\theta\sin\phi - \hat{k}\sin\theta$$

دستگاه مختصات سه‌بعدی-کروی



بردارهای یکه

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$\hat{r} = \hat{i}\sin\theta\cos\phi + \hat{j}\sin\theta\sin\phi + \hat{k}\cos\theta$$

$$\hat{\phi} = -\hat{i}\sin\phi + \hat{j}\cos\phi$$

$$\hat{\theta} = \hat{i}\cos\theta\cos\phi + \hat{j}\cos\theta\sin\phi - \hat{k}\sin\theta$$

$$\hat{\phi}\cdot\hat{r} = \hat{\theta}\cdot\hat{r} = \hat{\theta}\cdot\hat{\phi} = 0$$

بردارهای یکه راستگردند،

$$\hat{r}\times\hat{\theta} = \hat{\phi}$$

$$\hat{\theta}\times\hat{\phi} = \hat{r}$$

$$\hat{\phi}\times\hat{r} = \hat{\theta}$$

دستگاه مختصات کروی

سرعت و شتاب

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \phi = \phi(t)$$

$$\hat{r} = \hat{i}\sin\theta\cos\phi + \hat{j}\sin\theta\sin\phi + \hat{k}\cos\theta$$

$$\hat{\phi} = -\hat{i}\sin\phi + \hat{j}\cos\phi$$

$$\hat{\theta} = \hat{i}\cos\theta\cos\phi + \hat{j}\cos\theta\sin\phi - \hat{k}\sin\theta$$

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\hat{r} + r\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\hat{r} + r\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t}$$

$$\hat{r} = \hat{r}(\theta, \phi) : \ \mathrm{d}\hat{r} = \frac{\partial\hat{r}}{\partial\theta}\mathrm{d}\theta + \frac{\partial\hat{r}}{\partial\phi}\mathrm{d}\phi$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\hat{r}}{\partial\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\hat{r}}{\partial\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\hat{r}}{\partial\theta}\dot{\theta} + \frac{\partial\hat{r}}{\partial\phi}\dot{\phi}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\left(\frac{\partial\hat{r}}{\partial\theta}\dot{\theta} + \frac{\partial\hat{r}}{\partial\phi}\dot{\phi}\right)$$

دستگاه مختصات کروی

سرعت و شتاب

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \phi = \phi(t)$$

$$\hat{r} = \hat{i}\sin\theta\cos\phi + \hat{j}\sin\theta\sin\phi + \hat{k}\cos\theta$$

$$\hat{\phi} = -\hat{i}\sin\phi + \hat{j}\cos\phi$$

$$\hat{\theta} = \hat{i}\cos\theta\cos\phi + \hat{j}\cos\theta\sin\phi - \hat{k}\sin\theta$$

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\left(\frac{\partial\hat{r}}{\partial\theta}\dot{\theta} + \frac{\partial\hat{r}}{\partial\phi}\dot{\phi}\right)$$

$$\frac{\partial\hat{r}}{\partial\theta} = \hat{i}\cos\theta\cos\phi + \hat{j}\cos\theta\sin\phi - \hat{k}\sin\theta = \hat{\theta} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial\hat{r}}{\partial\theta} = \hat{\theta}}$$

$$\frac{\partial\hat{r}}{\partial\phi} = \sin\theta(-\hat{i}\sin\phi + \hat{j}\cos\phi) = \sin\theta\hat{\phi} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial\hat{r}}{\partial\phi} = \sin\theta\hat{\phi}}$$

دستگاه مختصات کروی

سرعت و شتاب

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \phi = \phi(t)$$

$$\hat{r} = \hat{i}\sin\theta\cos\phi + \hat{j}\sin\theta\sin\phi + \hat{k}\cos\theta$$

$$\hat{\phi} = -\hat{i}\sin\phi + \hat{j}\cos\phi$$

$$\hat{\theta} = \hat{i}\cos\theta\cos\phi + \hat{j}\cos\theta\sin\phi - \hat{k}\sin\theta$$

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\left(\frac{\partial\hat{r}}{\partial\theta}\dot{\theta} + \frac{\partial\hat{r}}{\partial\phi}\dot{\phi}\right)$$

اتحادهای مفید : $\dfrac{\partial\hat{r}}{\partial\theta} = \hat{\theta}, \quad \dfrac{\partial\hat{r}}{\partial\phi} = \sin\theta\hat{\phi}$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi}$$

$$v^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2$$

دستگاه مختصات کروی

سرعت و شتاب

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \phi = \phi(t)$$

$$\hat{r} = \hat{\imath}\sin\theta\cos\phi + \hat{\jmath}\sin\theta\sin\phi + \hat{k}\cos\theta$$

$$\hat{\phi} = -\hat{\imath}\sin\phi + \hat{\jmath}\cos\phi$$

$$\hat{\theta} = \hat{\imath}\cos\theta\cos\phi + \hat{\jmath}\cos\theta\sin\phi - \hat{k}\sin\theta$$

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi}$$

$$\begin{aligned}\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} &= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t} \\ &+ \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + +r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}t} \\ &+ \dot{r}\sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi} + r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\phi}\hat{\phi} + r\sin\theta\ddot{\phi}\hat{\phi} + r\sin\theta\dot{\phi}\frac{\mathrm{d}\hat{\phi}}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

دستگاه مختصات کروی

سرعت و شتاب

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \phi = \phi(t)$$

$$\hat{r} = \hat{\imath}\sin\theta\cos\phi + \hat{\jmath}\sin\theta\sin\phi + \hat{k}\cos\theta$$

$$\hat{\phi} = -\hat{\imath}\sin\phi + \hat{\jmath}\cos\phi$$

$$\hat{\theta} = \hat{\imath}\cos\theta\cos\phi + \hat{\jmath}\cos\theta\sin\phi - \hat{k}\sin\theta$$

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi}$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}(\dot{\theta}\hat{\theta} + \sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi})$$

$$+ \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}t}$$

$$+ \dot{r}\sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi} + r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\phi}\hat{\phi} + r\sin\theta\ddot{\phi}\hat{\phi} + r\sin\theta\dot{\phi}\frac{\mathrm{d}\hat{\phi}}{\mathrm{d}t}$$

دستگاه مختصات کروی

سرعت و شتاب

$$\hat{r} = \hat{i}\sin\theta\cos\phi + \hat{j}\sin\theta\sin\phi + \hat{k}\cos\theta$$

$$\hat{\phi} = -\hat{i}\sin\phi + \hat{j}\cos\phi$$

$$\hat{\theta} = \hat{i}\cos\theta\cos\phi + \hat{j}\cos\theta\sin\phi - \hat{k}\sin\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\hat{\theta}}{\partial\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\hat{\theta}}{\partial\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\hat{\theta}}{\partial\theta}\dot{\theta} + \frac{\partial\hat{\theta}}{\partial\phi}\dot{\phi}$$

اتحادهای مفید : $\dfrac{\partial\hat{\theta}}{\partial\theta} = -\hat{r}, \quad \dfrac{\partial\hat{\theta}}{\partial\phi} = \cos\theta\hat{\phi}$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\hat{r} + \cos\theta\dot{\phi}\hat{\phi}$$

$$\begin{aligned}\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} &= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}(\dot{\theta}\hat{\theta} + \sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi}) \\ &+ \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + +r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}(-\dot{\theta}\hat{r} + \cos\theta\dot{\phi}\hat{\phi}) \\ &+ \dot{r}\sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi} + r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\phi}\hat{\phi} + r\sin\theta\ddot{\phi}\hat{\phi} + r\sin\theta\dot{\phi}\frac{\mathrm{d}\hat{\phi}}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

سرعت و شتاب

$$\hat{r} = \hat{\imath}\sin\theta\cos\phi + \hat{\jmath}\sin\theta\sin\phi + \hat{k}\cos\theta$$

$$\hat{\phi} = -\hat{\imath}\sin\phi + \hat{\jmath}\cos\phi$$

$$\hat{\theta} = \hat{\imath}\cos\theta\cos\phi + \hat{\jmath}\cos\theta\sin\phi - \hat{k}\sin\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\phi}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\hat{\phi}}{\mathrm{d}\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\hat{\phi}}{\mathrm{d}\phi}\dot{\phi}$$

اتحادهای مفید : $\dfrac{\mathrm{d}\hat{\phi}}{\mathrm{d}\phi} = -(\hat{\imath}\cos\phi + \hat{\jmath}\sin\phi) = -\sin\theta\hat{r} - \cos\theta\hat{\theta}$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}t} = -\dot{\phi}\sin\theta\hat{r} - \dot{\phi}\cos\theta\hat{\theta}$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}(\dot{\theta}\hat{\theta} + \sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi})$$
$$+ \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + +r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}(-\dot{\theta}\hat{r} + \cos\theta\dot{\phi}\hat{\phi})$$
$$+ \dot{r}\sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi} + r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\phi}\hat{\phi} + r\sin\theta\ddot{\phi}\hat{\phi} + r\sin\theta\dot{\phi}(-\dot{\phi}\sin\theta\hat{r} - \dot{\phi}\cos\theta\hat{\theta})$$

دستگاه مختصات کروی

سرعت و شتاب

$$\hat{r} = \hat{\imath}\sin\theta\cos\phi + \hat{\jmath}\sin\theta\sin\phi + \hat{k}\cos\theta$$

$$\hat{\phi} = -\hat{\imath}\sin\phi + \hat{\jmath}\cos\phi$$

$$\hat{\theta} = \hat{\imath}\cos\theta\cos\phi + \hat{\jmath}\cos\theta\sin\phi - \hat{k}\sin\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\phi}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\hat{\phi}}{\mathrm{d}\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\hat{\phi}}{\mathrm{d}\phi}\dot{\phi}$$

اتحادهای مفید : $\dfrac{\mathrm{d}\hat{\phi}}{\mathrm{d}\phi} = -(\hat{\imath}\cos\phi + \hat{\jmath}\sin\phi) = -\sin\theta\hat{r} - \cos\theta\hat{\theta}$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}t} = -\dot{\phi}\sin\theta\hat{r} - \dot{\phi}\cos\theta\hat{\theta}$$

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^{\theta}\ddot{\phi})\hat{r} \\ &\quad + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2)\hat{\theta} \\ &\quad + (r\sin\theta\ddot{\phi} + 2\dot{r}\sin\theta\dot{\phi} + 2r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\phi})\hat{\phi}\end{aligned}$$

دستگاه مختصات کروی

سرعت و شتاب

$$\hat r = \hat\imath \sin\theta\cos\phi + \hat\jmath \sin\theta\sin\phi + \hat k\cos\theta$$

$$\hat\phi = -\hat\imath\sin\phi + \hat\jmath\cos\phi$$

$$\hat\theta = \hat\imath\cos\theta\cos\phi + \hat\jmath\cos\theta\sin\phi - \hat k\sin\theta$$

$$\boxed{\vec r = r\hat r}$$

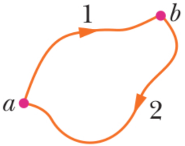
$$\boxed{\vec v = \dot r\hat r + r\dot\theta\hat\theta + r\sin\theta\dot\phi\hat\phi}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec a = {} & (\ddot r - r\dot\theta^2 - r\sin^\theta\ddot\phi)\hat r\\ & + (r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta - r\sin\theta\cos\theta\dot\phi^2)\hat\theta\\ & + (r\sin\theta\ddot\phi + 2\dot r\sin\theta\dot\phi + 2r\cos\theta\dot\theta\dot\phi)\hat\phi\end{aligned}}$$

تابع انرژی پتانسیل

نیروی پایستار در یک بعد (یادآوری):

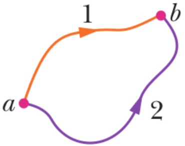
- کار انجام شده بوسیله‌ی نیروی $F(x)$ در یک مسیر بسته (یا یک مسیر رفت و برگشت) برابر صفر باشد.



$$W_{\text{کل}} = W^{(1)}_{a\to b} + W^{(2)}_{b\to a} = 0$$

$$W_{\text{کل}} = \oint_{\text{مسیر بسته}} F(x)\mathrm{d}x = 0$$

- کار انجام شده بوسیله‌ی نیروی $F(x)$ به مسیر حرکت ذره بستگی **نداشته** باشد و فقط به نقاط ابتدایی و انتهایی مسیر حرکت بستگی **داشته** باشد.



$$W^{(1)}_{a\to b} = W^{(2)}_{a\to b}$$

تابع انرژی پتانسیل

نیروی پایستار در یک بعد (یادآوری):

در نیروهای تابع مکان وقتی

$$W_{\text{کل}} = \oint_{\text{مسیر بسته}} F(x)\mathrm{d}x = 0$$

باشد، می‌توان تابع انرژی پتانسیل را از تابع نیرو بصورت

$$V(x) - V(x_0) = -\int_{x_0}^{x} F(x)\mathrm{d}x$$

بدست آورد که x_0 و $V(x_0)$ بترتیب نقطه مرجع و پتانسیل در آن نقطه می‌باشد و تابع نیرو را از مشتق تابع انرژی پتانسیل بصورت

$$F(x) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$$

بدست آورد.

تابع انرژی پتانسیل

نیروی پایستار در یک بعد (یادآوری):

پایستگی انرژي وقتی

$$W_{\text{کل}} = \oint_{\text{مسیر بسته}} F(x)\mathrm{d}x = 0$$

می‌توان با استفاده از تغییری انرژی پتانسیل و قضیه کار و انرژی،

$$\Delta V = -\int_{x_0}^{x} F(x)\mathrm{d}x$$

$$\Delta K = \int_{x_0}^{x} F(x)\mathrm{d}x$$

بصورت

$$\Delta K = -\Delta V \Rightarrow \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}_0^2 + V(x_0) = E$$

بدست آورد.

تابع انرژی پتانسیل

نیروی پایستار در دو و سه بعد:

وقتی کار نیروهای تابع مکان در یک مسیر بسته برابر صفر باشد،

$$W_{\text{کل}} = \oint_{\text{مسیر بسته}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$$

با استفاده از قضیه استوکس داریم

$$\oint_{\text{مسیر بسته}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \mathrm{d}S = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$$

می‌توان تابع نیرو را از میدان اسکالر انرژی پتانسیل بصورت

$$F = -\vec{\nabla} V$$

بدست آورد که شرط

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} V = 0$$

را برآورده می‌کند.

تابع انرژی پتانسیل

نیروی پایستار در دو و سه بعد:

وقتی کار نیرو در یک مسیر بسته برابر صفر باشد،

$$W_{\text{کل}} = \oint_{\text{مسیر بسته}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$$

می‌توان تابع انرژی پتانسیل را از نیرو بصورت

$$V(\vec{r}) - V(\vec{r}_0) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

تعریف کرد که $\vec{r}_0$ و $V(\vec{r}_0)$ بترتیب نقطه مرجع و پتانسیل در آن نقطه می‌باشد.

تابع انرژی پتانسیل

نیروی پایستار در دو و سه بعد:

وقتی کار نیرو در یک مسیر بسته برابر صفر باشد،

$$W_{\text{کل}} = \oint_{\text{مسیر بسته}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$$

می‌توان پایستگی انرژی را با استفاده از تغییری انرژی پتانسیل و قضیه کار و انرژی،

$$\Delta V = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$\Delta K = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

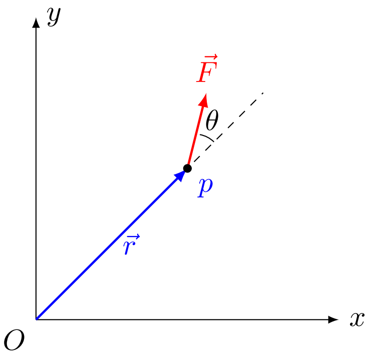
بصورت

$$\Delta K = -\Delta V \Rightarrow \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+V(x) = \frac{1}{2}m(\dot{x}_0^2+\dot{y}_0^2+\dot{z}_0^2)+V(x_0) = E$$

بدست آورد.

گشتاور نیرو

در دو بُعد

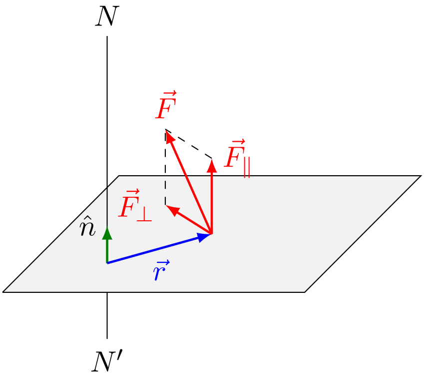


$$\vec{\tau}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\tau_O = rF\sin\theta$$

گشتاور نیرو

در سه بُعد



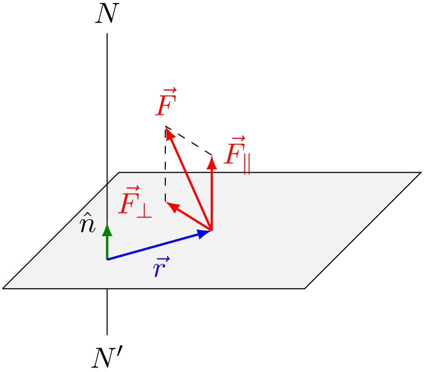
$$\vec{F}_{\perp} = \vec{F} - \vec{F}_{\parallel}$$

$$\vec{F}_{\perp} = \vec{F} - \hat{n}(\vec{F} \cdot \hat{n})$$

$$\vec{r} \times \vec{F}_{\perp} = \vec{r} \times \vec{F} - \vec{r} \times \hat{n}(\vec{F} \cdot \hat{n})$$

گشتاور نیرو

در سه بُعد



$$\vec{r}\times\vec{F}_{\perp} = \vec{r}\times\vec{F} - \vec{r}\times\hat{n}(\vec{F}\cdot\hat{n})$$

$$\vec{r}\times\hat{n} = 0 \Rightarrow \vec{r}\times\vec{F}_{\perp} = \vec{r}\times\vec{F}$$

$$\vec{\tau}_{N'N} = \vec{r}\times\vec{F} = \vec{r}\times\vec{F}_{\perp}$$