

به نام خدا

تمرین شماره: ۶ درس ریاضی فیزیک ۱ تحویل: ۹۲/۲/۱۱

(۱) برای نیروی $\vec{F} = (x^2 + y^2 + z^2)^n (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$ کمیت‌های زیر را بدست آورید (الف) $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ (ب) $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ (ج) پتانسیل نرده‌ای $\phi(x, y, z)$ بطوریکه $\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi$ (د) به ازای چه مقداری از n پتانسیل نرده‌ای هم در مبدا و هم در بینهایت واگرایی دارد؟

(۲) کره‌ای به شعاع a بطور یکنواخت در تمامی حجمش باردار شده است. پتانسیل الکترواستاتیک $\phi(r)$ را برای $0 \leq r < \infty$ بدست آورید (راهنمایی: از قانون گوس استفاده کنید و میدان الکتریکی را در تمامی فواصل بدست آورید و سپس بوسیله آن و با این فرض که مقدار پتانسیل در بینهایت برابر صفر است، پتانسیل را در تمامی فواصل بدست آورید) (از مباحث فیزیک ۲).

(۳) استوانه‌ای خیلی بلند به شعاع a را در نظر بگیرید که چگالی بار در واحد طول آن برابر λ است. پتانسیل الکترواستاتیک $\phi(r)$ را برای $0 \leq r < \infty$ بدست آورید (راهنمایی: مانند مسئله ۲) (از مباحث فیزیک ۲).

(۴) یک جرم کروی با چگالی یکنواخت ρ_0 و شعاع a را در نظر بگیرید. (الف) پتانسیل گرانشی را برای $0 \leq r < \infty$ بدست آورید. (ب) فرض کنید یک سوراخ سراسری از مرکز زمین می‌گذرد و ذره‌ای به جرم m_0 در این سوراخ انداخته شده است، با استفاده از قانون دوم نیوتن معادله حرکت ذره را بدست آورید (راهنمایی: مانند مسئله ۲) (از مباحث فیزیک ۱).

(۵) سیم درازی را در نظر بگیرید که از آن جریان I عبور می‌کند و یک میدان مغناطیس بصورت

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$$

در اطراف خود ایجاد می‌کند. پتانسیل برداری مغناطیسی \vec{A} را بدست آورید (از مباحث فیزیک ۲).

(۶) اگر

$$\vec{B} = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right)$$

بردار \vec{A} را طوری پیدا کنید که $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

(۷) نشان دهید هر بردار ثابت \vec{B} ، دو معادله

$$\vec{A} = \frac{1}{\gamma} (\vec{B} \times \vec{r})$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

را برآورده می‌کند (در اینجا \vec{r} بردار مکان می‌باشد) (از مباحث فیزیک ۲ که در الکترومغناطیس، تحلیلی و کوانتوم هم آنرا می‌بینید).

۸) میدان مغناطیسی \vec{B} با $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ به پتانسیل بردار مغناطیسی \vec{A} مربوط می‌شود، با توجه به قضیه استوکس داریم

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

نشان دهید هر دو طرف این معادله تحت تبدیل پیمانه‌ی $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla}\psi$ ناورد هستند (از مباحث الکترومغناطیس).

۹) اگر \vec{E} میدان الکتریکی و \vec{A} پتانسیل بردار مغناطیسی باشد، نشان دهید $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ غیر چرخشی است و بنابراین می‌توان نوشت

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\psi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

(راهنمایی: از معادله $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ استفاده کنید که یکی از معادلات دیفرانسیلی معادلات ماکسول است) (از مباحث الکترومغناطیس).

۱۰) نیروی کل وارد بر یک بار الکتریکی q که با سرعت \vec{v} حرکت می‌کند برابر است با

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

با استفاده از پتانسیل نرده‌ای ϕ و پتانسیل برداری \vec{A} نشان دهید

$$\vec{F} = q[-\vec{\nabla}\phi - \frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{v})]$$

(راهنمایی: با استفاده از مسئله (۹) رابطه میدان الکتریکی \vec{E} با پتانسیل اسکالر ϕ و پتانسیل برداری \vec{A} بصورت $\vec{E} = -\vec{\nabla}\psi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ است و رابطه میدان مغناطیس \vec{B} با پتانسیل برداری \vec{A} بصورت $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ است) (از مباحث الکترومغناطیس).

۱۱) انرژی ذخیره شده در میدان الکترواستاتیکی را می‌توان به صورت

$$W = \frac{1}{4\pi} \int \rho(\vec{r})\phi(\vec{r})d\tau$$

نوشت که در آن چگالی بار $\rho(\vec{r})$ و پتانسیل الکترواستاتیکی است. رابطه‌ی بالا را به

$$W = \frac{\epsilon_0}{4\pi} \int |\vec{E}|^2 d\tau$$

تبدیل کنید که در آن \vec{E} میدان الکتریکی است (با توجه به رابطه بالا، عبارت $\frac{\epsilon_0}{4\pi} |\vec{E}|^2$ چگالی انرژی سیستم می‌باشد) (از مباحث الکترومغناطیس).

مظفری