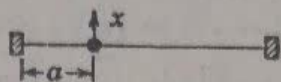


مسائل

1.1. هرگاه مقدار حقیقی تابع مختلط $x = Ae^{i\omega_0 t}$ به صورت $x = A \cos(\omega_0 t + \phi)$ باشد نشان دهید که مقدار حقیقی x^2 برابر x^2 نیست.

1.2. نشان دهید که $x = A \cos(\omega_0 t + \phi)$ معادل $x = A_1 \cos \omega_0 t + A_2 \sin \omega_0 t$ است.

1.3. جرم m به نقطه‌ای از سیم افقی به طول l و کشیده شده با کشش T ، بین دو پایه محکم بسته شده است. (a) هنگامی که جرم m به مقدار کوچک x تغییر مکان یابد نیروی برگرداننده آن، f ، را حساب کنید.



در این محاسبه T را ثابت و تأثیر نیروهای گرانشی^۱ را قابل چشم‌پوشی فرض کنید. (b) در صورتی که دامنه حرکت جرم m چنان کوچک باشد که بتوان مقادیر سینوس و تانژانت زاویه‌های بین امتدادهای سیم و امتداد افق را برابر گرفت، فرکانس ارتعاش قائم جرم را با رابطه‌ای مشخص کنید. (c) جرم m به چه فاصله a از مبدأ سیم قرار گیرد تا فرکانس ارتعاش آن می‌نیم شود.

1.4. دستگاه مرتعشی از یک جرم m و دو فنر تشکیل شده است. جرم m به فنر اول با ثابت سختی k_1 و طول ابتدایی l_1 آویزان است. این فنر به فنر دیگری با ثابت سختی k_2 و طول ابتدایی l_2 که سر آن ثابت است آویزان شده. دستگاه در امتداد قائم تحت تأثیر نیروی سنگینی به حال تعادل قرار گرفته است. (a) با چشم‌پوشی از جرم فنرها، ازدیاد طول دستگاه بر اثر نیروی گرانشی mg را حساب کنید. (b) رابطه‌ای پیدا کنید که فرکانس اصلی ارتعاش دستگاه را به دست دهد.

1.5. به یک سر تیر بلند چوبی به شعاع مقطع l و وزنه‌ای بسته‌اند، چنانکه به طور قائم در آب می‌ایستد. اگر سر دیگر تیر را اندکی در امتداد قائم فرو برده رها سازیم تیر با پریود 4 ثانیه به نوسان در می‌آید. جرم دستگاه را حساب کنید.

1.6. ارتعاشی به معادله $x = 2 \cos 6\pi t + 5 \sin 5\pi t$ است. (a) منحنی تغییرات x را بر حسب t رسم کنید. (b) در چه زمانی تغییر مکان x ماکسیمم است؟ (c) در چه زمانی سرعت ماکسیمم است؟ (d) مقدار ماکسیمم سرعت چقدر است؟

1.7. نشان دهید که A_n ، دامنه حرکت برآیند n ارتعاش هارمونیک ساده، که دامنه آنها A و فرکانسشان ω است و دارای فازهای $\phi_1 = \varepsilon$ ، $\phi_2 = 2\varepsilon$ و ... و $\phi_n = n\varepsilon$ هستند از رابطه زیر به دست می‌آید:

Galaxy M32

$$A_n = \frac{A \sin(n\epsilon/2)}{\sin(\epsilon/2)}$$

1.8. موج مربعی با معادله $x=a$ از $t=0$ تا $t=T/2$ و $x=-a$ از $t=T/2$ تا $t=T$ مشخص شده است. (a) پایاهای سری فوریه را به دست آورید. (b) نموداری از مجموع چهار جمله اول سری فوق رسم کنید و آن را با شکل موج اصلی مقایسه کنید.

1.9. چند جمله اول سری فوریه معادل تابع $x=a$ بین $t=0$ و $t=T/2$ و $x=0$ بین $t=T/2$ و $t=T$ را به دست آورید.

1.10. جرم 0.25 kg به فتری به جرم 0.3 kg آویزان است. ثابت سختی فنر 100 نیوتن بر متر و مقاومت مکانیکی دستگاه 7.0 کیلوگرم بر ثانیه است. (a) فرکانس نوسان آزاد و میرای دستگاه را حساب کنید. (b) هرگاه دستگاه با نیروی جیبی به دامنه 2 نیوتن رانده شود دامنه نوسان آن را حساب کنید. (c) ماکسیم انرژی جنبشی دستگاه را هنگام تأثیر نیروی فوق حساب کنید.

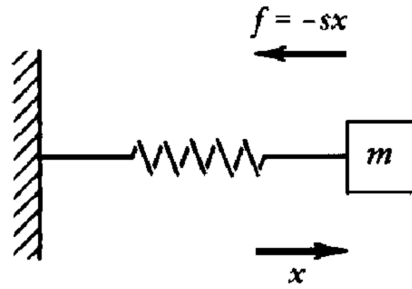
1.11. جرم 0.5 kg به فتری که از جرمش در محاسبه چشم پوشی می شود آویزان است. هنگامی که سرباری به جرم 0.2 kg به جرم اولی اضافه شود مقدار 0.04 m بر طول فنر افزوده می گردد. در این حال اگر سربار را یکباره حذف کنند دامنه نوسان دستگاه به 63.4 درصد یعنی $1/e$ مقدار اولی، در یک ثانیه می رسد. از این مشاهده ها مقادیر R_m ، ω_d ، A و ϕ حرکت را محاسبه کنید.

1.12. وزنه ای به جرم 0.5 kg به فتری که از جرمش در محاسبه چشم پوشی می شود آویزان است. سختی فنر 100 نیوتن بر متر و مقاومت مکانیکی دستگاه 14 کیلوگرم بر ثانیه است. نیروی راننده دستگاه به صورت $f = 2\cos 5t$ نمایش داده می شود. (a) مقادیر دامنه تغییر مکان، دامنه سرعت، و توان متوسط مصرف شده را در قسمت پایدار حرکت حساب کنید. (b) زاویه فاز را بین سرعت و نیرو به دست آورید. (c) فرکانس رزونانس و مقادیر دامنه تغییر مکان و دامنه سرعت و متوسط توان مصرف شده را در این فرکانس حساب کنید. (d) Q دستگاه را به دست آورید و حدود فرکانسهای دستگاه را برای زمانی که کاهش توان به 50 درصد مقدار آن در حالت رزونانس برسد حساب کنید.

1.13. نشان دهید که $x = (At+B)e^{-\alpha t}$ معادله حرکت نوسانگر ساده در شرایط میرایی بحرانی است. همچنین نشان دهید که مسافت حرکت نوسانگر میرا در حالت بحرانی پیوسته کمتر از دامنه حرکت نوسانگر ساده ای است که دارای همان جرم و همان سختی ولی مقاومت مکانیکی کمتر باشد و با همان شرایط ابتدایی به نوسان در آید.

1.14. رابطه ای بین مدول تپاهی π و فاکتور کیفیت Q در نوسانگر مکانیکی میرا به دست آورید. هنگامی که نوسانگر ساده با فرکانس رزونانس خود به نوسان در آید نشان دهید که نسبت بین انرژی مصرف شده در هر پریود و انرژی مکانیکی ماکسیمم در حالت رزونانس برابر $2\pi/Q$ است.

- 1.15.** در نوسانگر ساده که به وسیله نیرویی رانده شده است معادله‌هایی به دست آورید که معرف فرکانسهای مربوط به نقاطی باشد که در منحنی توان خروجی، توان به نصف مقدار ماکسیمم خود می‌رسد. نشان دهید که آن را می‌توان تقریباً به صورت $\omega_0 \pm R_m/2m$ نوشت.
- 1.16.** جرم m به يك سر فنری که افقی قرار گرفته متصل است. از جرم فنر چشم پوشی می‌شود. نیروی راننده $F \sin \omega t$ به سر دیگر فنر وارد می‌گردد. (a) در صورتی که از میرایی فنر چشم‌پوشی کنیم معادله حرکت نقطه انتهای فنر، یعنی نقطه اثر نیروی راننده را بر حسب زمان به دست آورید. (b) نشان دهید که معادله سرعت این نقطه مشابه معادله جریان در مدار الکتریکی موازی LC است. (c) در صورتی که پایاهای دستگاه بدین مقادیر باشند: $F=3 \text{ newton}$ ، $s=200 \text{ newton/m}$ و $m=0.5 \text{ kg}$ ، منحنی نمایش تغییرات دامنه تغییر مکان و دامنه سرعت را بر حسب فرکانس در حدود فرکانس $0 < \omega < 100$ رسم کنید.
- 1.17.** (a) معادله شتاب حرکت نوسانگر ساده میرایی را که تحت تأثیر نیروی راننده $F \cos \omega t$ قرار گرفته باشد به دست آورید. (b) فرکانس ω' مربوط به شتاب ماکسیمم را حساب کنید. (c) نشان دهید که اگر $R_m = \sqrt{sm}$ باشد دامنه شتاب در فرکانس رزونانس سرعت ω_0 ، برابر است با حد دامنه شتاب در فرکانسهای بالا.



$$m\ddot{x} = -sx \Rightarrow m\ddot{x} + sx = 0$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{s}{m}}$$

جواب پیشنهادی و مشتقات آن

$$\begin{cases} x = Ae^{rt} \\ \dot{x} = Are^{rt} \\ \ddot{x} = Ar^2e^{rt} \end{cases}, \quad A \neq 0$$

$$A \left(r^2 + \frac{s}{m} \right) e^{rt} = 0$$

از آنجایی که e^{rt} هرگز صفر نمی‌شود، بنابراین

$$r^2 + \frac{s}{m} = 0$$

$$r_{\pm} = \pm i \sqrt{\frac{s}{m}} = \pm i\omega_0$$

$$x = A_+ e^{i\omega_0 t} + A_- e^{-i\omega_0 t}$$

A_+ و A_- با استفاده از شرایط اولیه تعیین می‌شوند.

فرمهای هم ارز جواب نوسانگر ساده

$$x = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

A و B با استفاده از شرایط اولیه تعیین می‌شوند.

$$x = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

A و ϕ با استفاده از شرایط اولیه تعیین می‌شوند.

حل مسئله با شرایط اولیه مشخص و بررسی فرمهای مختلف جواب نوسانگر ساده:

$$x(t=0) = x_0, \quad v(t=0) = \dot{x}(t=0) = v_0$$

فرم اول

$$x = A_+ e^{i\omega_0 t} + A_- e^{-i\omega_0 t}, \quad \dot{x} = i\omega_0 A_+ e^{i\omega_0 t} - i\omega_0 A_- e^{-i\omega_0 t}$$

$$\begin{cases} x_0 = A_+ + A_- \\ v_0 = i\omega_0(A_+ - A_-) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_+ + A_- = x_0 \\ A_+ - A_- = -iv_0/\omega_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_+ = (x_0 - iv_0/\omega_0)/2 \\ A_- = (x_0 + iv_0/\omega_0)/2 \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{2}(x_0 - iv_0/\omega_0)e^{i\omega_0 t} + \frac{1}{2}(x_0 + iv_0/\omega_0)e^{-i\omega_0 t}$$

$$x = x_0 \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} + \frac{v_0}{\omega_0} \frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i}$$

$$x = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

فرم دوم

$$x = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \quad , \quad \dot{x} = -\omega_0 A \sin \omega_0 t + \omega_0 B \cos \omega_0 t$$

$$\begin{cases} x_0 = A \\ v_0 = \omega_0 B \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = x_0 \\ B = v_0/\omega_0 \end{cases}$$

$$x = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

فرم سوم

$$x = A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad , \quad \dot{x} = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \phi)$$

$$\begin{cases} x_0 = A \cos \phi \\ v_0 = -\omega_0 A \sin \phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} A \cos \phi = x_0 \\ A \sin \phi = -v_0/\omega_0 \end{cases}$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega_0)^2} \quad , \quad \tan \phi = -\frac{v_0}{x_0 \omega_0}$$

اگر $x = A \cos(\omega_0 t + \phi) = A \cos \phi \cos \omega_0 t - A \sin \phi \sin \omega_0 t$

$$x = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

1.2

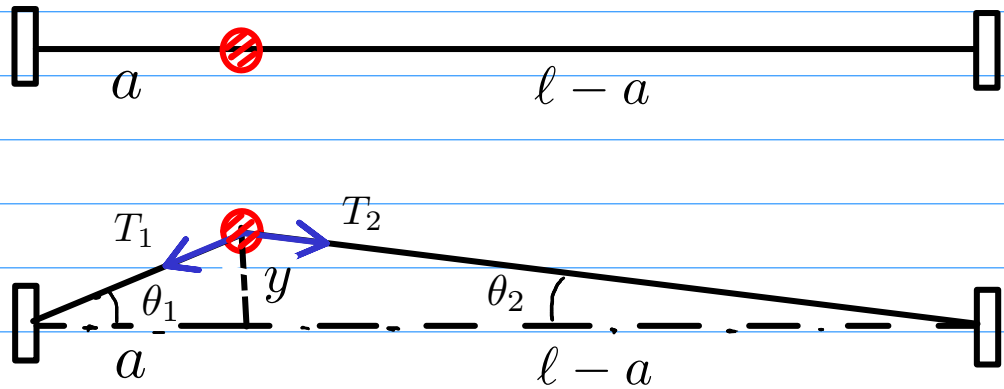
$$x = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$x = A \cos \omega_0 t \cos \phi - A \sin \omega_0 t \sin \phi$$

$$\text{اگر} \begin{cases} A_1 = A \cos \phi \\ A_2 = A \sin \phi \end{cases}$$

$$x = A_1 \cos \omega_0 t + A_2 \sin \omega_0 t$$

1.3



$$\sum f_x = -T_1 \cos \theta_1 + T_2 \cos \theta_2$$

$$\sum f_y = -T_1 \sin \theta_1 - T_2 \sin \theta_2$$

$$\sin \theta_1 = \frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}} \quad , \quad \cos \theta_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + y^2}}$$

$$\sin \theta_2 = \frac{y}{\sqrt{(\ell - a)^2 + y^2}} \quad , \quad \cos \theta_2 = \frac{(\ell - a)}{\sqrt{(\ell - a)^2 + y^2}}$$

برای y های کوچک:

$$\sin \theta_1 \approx \frac{y}{a}, \quad \cos \theta_1 \approx 1$$

$$\sin \theta_2 \approx \frac{y}{\ell - a}, \quad \cos \theta_2 \approx 1$$

$$\sum f_x = -T_1 + T_2$$

$$\sum f_y = -T_1 \frac{y}{a} - T_2 \frac{y}{\ell - a}$$

$$T_1 = T_2 = T \Rightarrow \begin{cases} \sum f_x = 0 \\ \sum f_y = -T \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\ell - a} \right) y \end{cases}$$

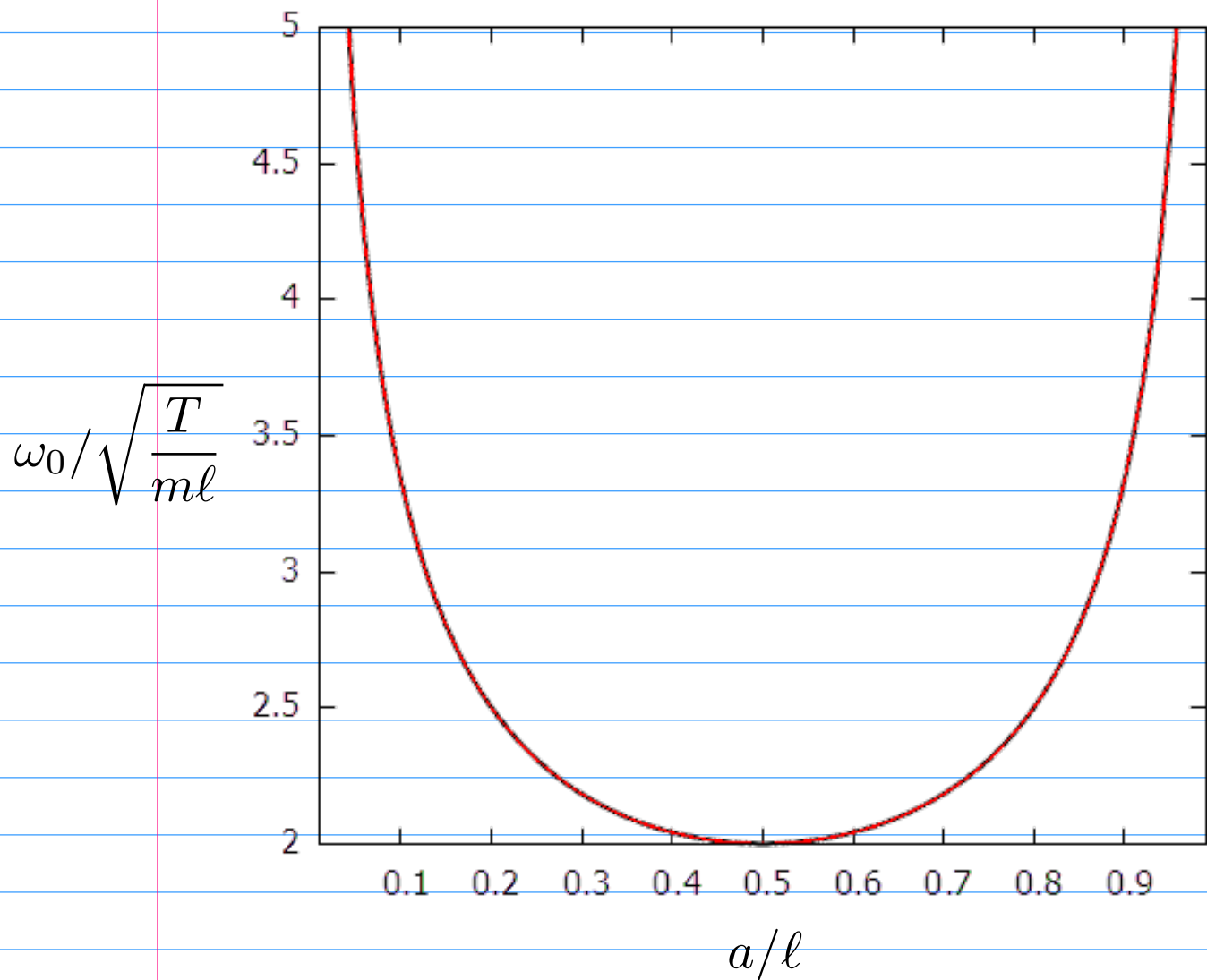
$$\sum f_y = m\ddot{y}$$

$$m\ddot{y} = -T \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\ell - a} \right) y$$

$$\ddot{y} + \frac{T}{m} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\ell - a} \right) y = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{T}{m} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\ell - a} \right)}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{T}{m\ell}} \sqrt{\left(\frac{1}{(a/\ell)} + \frac{1}{1 - (a/\ell)}\right)}$$



$$\frac{d\omega_0}{da} = 0$$

$$\frac{d}{da} \frac{1}{\sqrt{a(\ell - a)}} = \frac{d}{da} \cdot \left[a^{-1/2} (\ell - a)^{-1/2} \right] = 0$$

$$-\frac{1}{2} a^{-3/2} (\ell - a)^{-1/2} + \frac{1}{2} a^{-1/2} (\ell - a)^{-3/2} = 0$$

$$\frac{1}{2}a^{-1/2}(\ell - a)^{-1/2} \left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{\ell - a} \right) = 0$$

$$a = \frac{1}{2}\ell$$

$$a/\ell = \frac{1}{2}$$

1.7

ترکیب خطی نوسانات

$$x_1 = A \cos(\omega t + \epsilon)$$

$$x_2 = A \cos(\omega t + 2\epsilon)$$

$$\vdots$$

$$x_n = A \cos(\omega t + n\epsilon)$$

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

$$x = A_n \cos(\omega t + \phi_n)$$

$$A_n \cos \phi_n = A(\cos \epsilon + \cos 2\epsilon + \cdots + \cos n\epsilon)$$

$$A_n \sin \phi_n = A(\sin \epsilon + \sin 2\epsilon + \cdots + \sin n\epsilon)$$

$$A_n e^{i\phi_n} = A(e^{i\epsilon} + e^{2i\epsilon} + \cdots + e^{ni\epsilon})$$

$$A_n e^{i\phi_n} = A e^{i\epsilon} (1 + e^{i\epsilon} + \dots + e^{(n-1)i\epsilon})$$

سری هندسی

$$1 + z + z^2 + \dots = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1$$

$$1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} + z^n + z^{n+1} + \dots = \frac{1}{1-z}$$

$$1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} + z^n (1 + z + z^2 + \dots) = \frac{1}{1-z}$$

$$1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} + z^n \left(\frac{1}{1-z} \right) = \frac{1}{1-z}$$

$$1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}$$

$$A_n e^{i\phi_n} = A e^{i\epsilon} \frac{1 - e^{ni\epsilon}}{1 - e^{i\epsilon}}$$

$$A_n e^{i\phi_n} = A e^{i\epsilon} \left(\frac{e^{ni\epsilon/2}}{e^{i\epsilon/2}} \right) \frac{e^{-ni\epsilon/2} - e^{ni\epsilon/2}}{e^{-i\epsilon/2} - e^{i\epsilon/2}}$$

$$A_n e^{i\phi_n} = A e^{(n-1)i\epsilon/2} \left(\frac{\sin n\epsilon/2}{\sin \epsilon/2} \right)$$

$$\begin{cases} A_n \cos \phi_n = A \left(\frac{\sin n\epsilon/2}{\sin \epsilon/2} \right) \cos(n-1)\epsilon/2 \\ A_n \sin \phi_n = A \left(\frac{\sin n\epsilon/2}{\sin \epsilon/2} \right) \sin(n-1)\epsilon/2 \end{cases}$$

طرفین هر دو رابطه را به توان 2 می‌رسانیم و با هم جمع می‌کنیم

$$A_n = A \left(\frac{\sin n\epsilon/2}{\sin \epsilon/2} \right)$$

رابطه دوم را بر رابطه اول در هر دو طرف تساوی تقسیم می‌کنیم

$$\tan \phi_n = \tan(n-1)\epsilon/2$$

$$\phi_n = \frac{1}{2}(n-1)\epsilon$$

1.8

$$x(t) = \begin{cases} -a & 0 \leq t \leq T/2 \\ a & T/2 \leq t \leq T \end{cases}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$x(t) = x(t+T)$$

بسط فوريه

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t$$

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos n\omega t dt$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin n\omega t dt$$

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{1}{T} \left[-a \int_0^{T/2} dt + a \int_{T/2}^T dt \right]$$

$$A_0 = 0$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos n\omega t dt = \frac{2}{T} \left[-a \int_0^{T/2} \cos n\omega t dt + a \int_{T/2}^T \cos n\omega t dt \right]$$

$$A_n = \frac{2}{T} \left(-\frac{a}{n\omega} [\sin n\omega t]_0^{T/2} + \frac{a}{n\omega} [\sin n\omega t]_{T/2}^T \right)$$

$$A_n = 0$$

اصول ارتعاش-گروه فیزیک دانشگاه قم-محمدرضا مظفری

$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin n\omega t dt = \frac{2}{T} \left[-a \int_0^{T/2} \sin n\omega t dt + a \int_{T/2}^T \sin n\omega t dt \right]$$

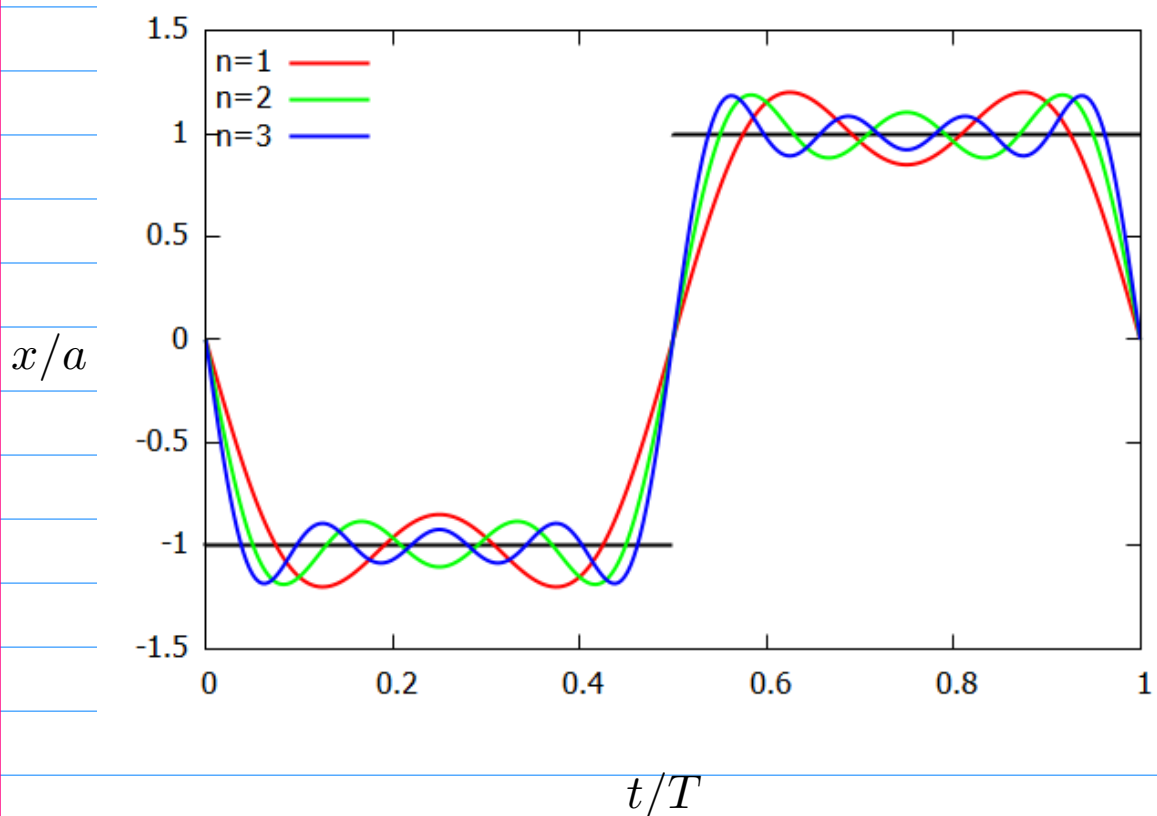
$$B_n = \frac{2}{T} \left(-\frac{a}{n\omega} [-\cos n\omega t]_0^{T/2} + \frac{a}{n\omega} [-\cos n\omega t]_{T/2}^T \right)$$

$$B_n = \frac{a}{n\pi} [(\cos n\pi - 1) - (1 - \cos n\pi)]$$

$$B_n = \frac{2a}{n\pi} [(-1)^n - 1] \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

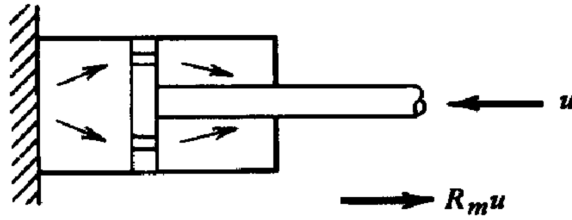
$$B_{2n+1} = -\frac{4a}{(2n+1)\pi} \quad , \quad n = 0, 1, \dots$$

$$x(t) = -\frac{4a}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\omega t}{2n+1}$$

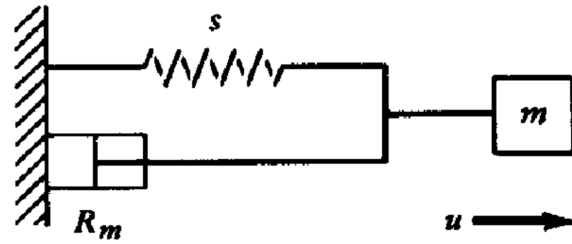


نوسانگر میرا

ضربه گیر (dashpot)



$$u = \dot{x}$$



$$m\ddot{x} = -sx - R_m\dot{x} \Rightarrow m\ddot{x} + R_m\dot{x} + sx = 0$$

حل نوسانگر میرا

$$\ddot{x} + \frac{R_m}{m}\dot{x} + \frac{s}{m}x = 0$$

جواب پیشنهادی و مشتقات آن

$$\begin{cases} x = Ae^{rt} \\ \dot{x} = Are^{rt} \\ \ddot{x} = Ar^2e^{rt} \end{cases}, \quad A \neq 0$$

$$A \left(r^2 + \frac{R_m}{m}r + \frac{s}{m} \right) e^{rt} = 0$$

از آنجایی که e^{rt} هرگز صفر نمی شود، بنابراین

$$r^2 + \frac{R_m}{m}r + \frac{s}{m} = 0$$

$$r_{\pm} = -\frac{R_m}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{R_m}{2m}\right)^2 - \frac{s}{m}}$$

اگر $(R_m/2m)^2 - s/m > 0$

تند میرا $x = A_+ e^{r_+ t} + A_- e^{r_- t}$

A_+ و A_- با استفاده از شرایط اولیه تعیین می‌شوند.

اگر $(R_m/2m)^2 - s/m = 0$

میرای بحرانی $x = (A + Bt) e^{-(R_m/2m)t}$

A و B با استفاده از شرایط اولیه تعیین می‌شوند.

اگر $(R_m/2m)^2 - s/m < 0$

کند میرا $x = A e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \Phi), \quad \omega_d = \sqrt{s/m - (R_m/2m)^2}, \quad \alpha = R_m/2m$

A و Φ با استفاده از شرایط اولیه تعیین می‌شوند.

دامنه حرکت



قسمت نوسانی حرکت $\rightarrow x = A e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \Phi)$

تعریف مدول تباهی: زمانی که دامنه نوسانات به $1/e$ مقدار اولیه خود می‌رسد. یعنی

$$\tau = \frac{1}{\alpha} = \frac{2m}{R_m}$$

حل مسئله با شرایط اولیه مشخص:

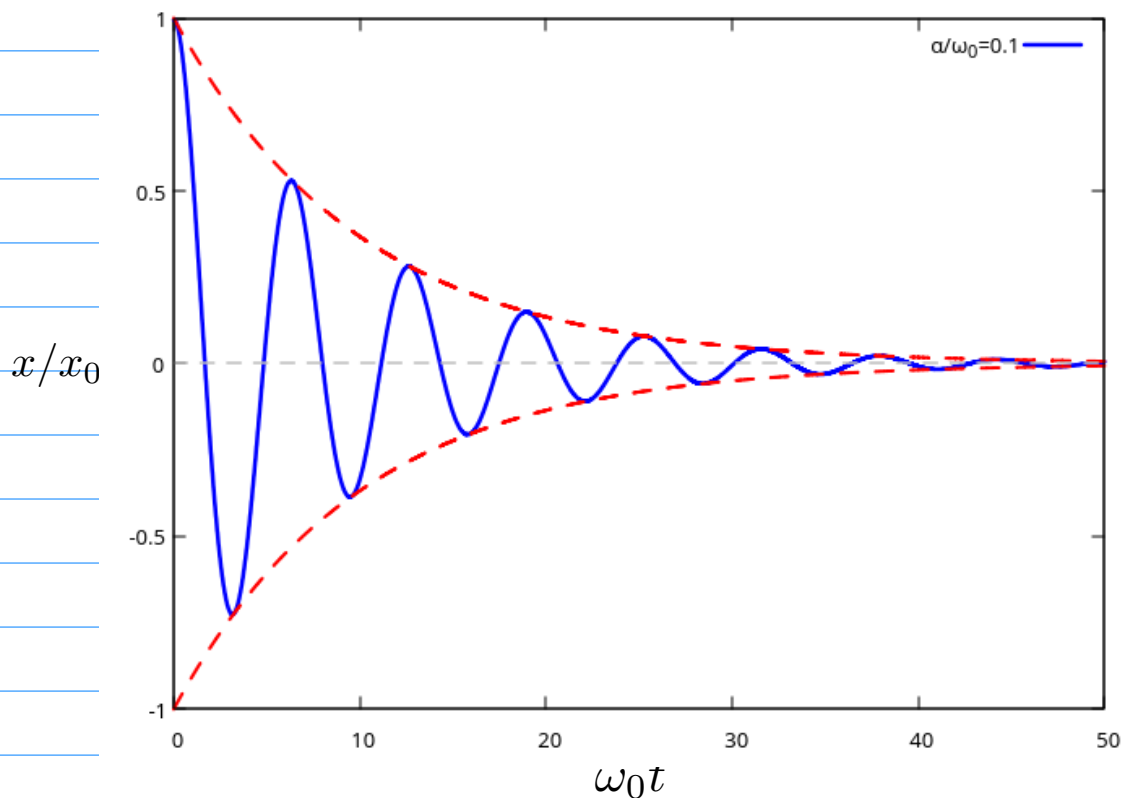
$$x(t=0) = x_0, \quad v(t=0) = \dot{x}(t=0) = v_0$$

$$x = Ae^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \Phi), \quad \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}, \quad \omega_0 = \sqrt{s/m}, \quad \alpha = R_m/2m$$

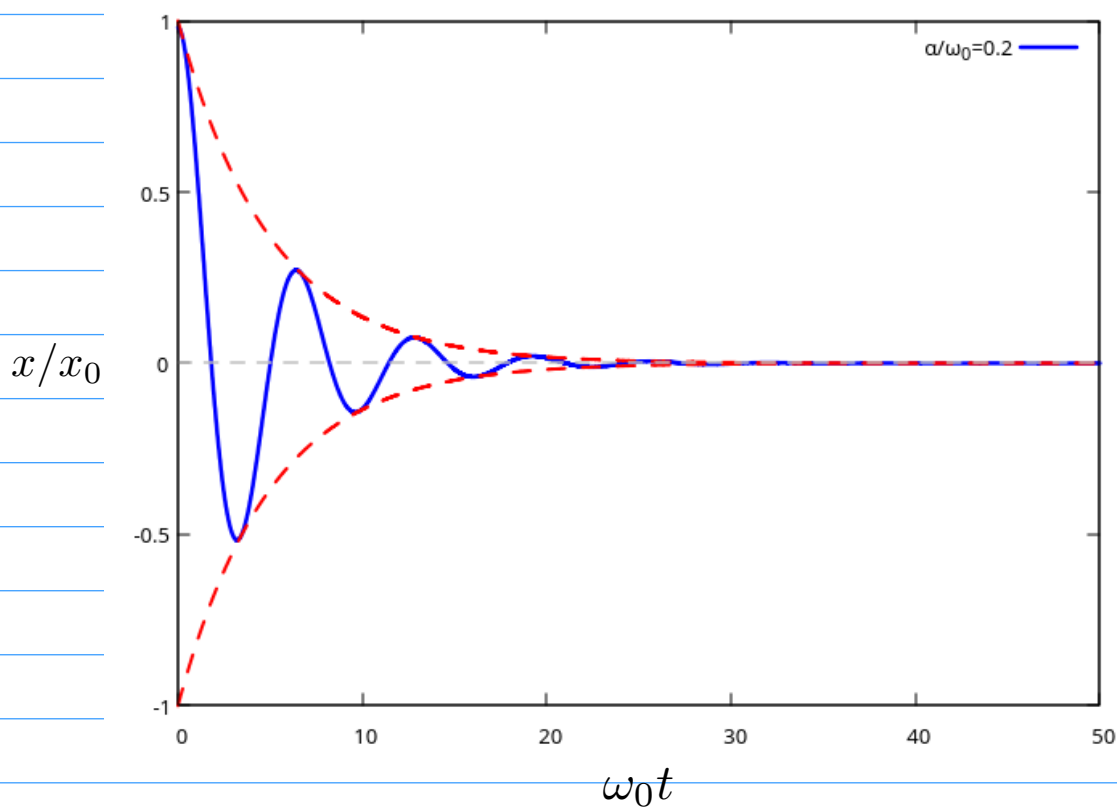
$$\begin{cases} x_0 = A \cos \Phi \\ v_0 = -\alpha A \cos \Phi - \omega_d A \sin \Phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \cos \Phi = x_0 \\ A \sin \Phi = -(v_0 + \alpha x_0)/\omega_d \end{cases}$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + \alpha x_0}{\omega_d} \right)^2} \quad \Phi = \tan^{-1} \left(-\frac{v_0 + \alpha x_0}{\omega_d x_0} \right)$$

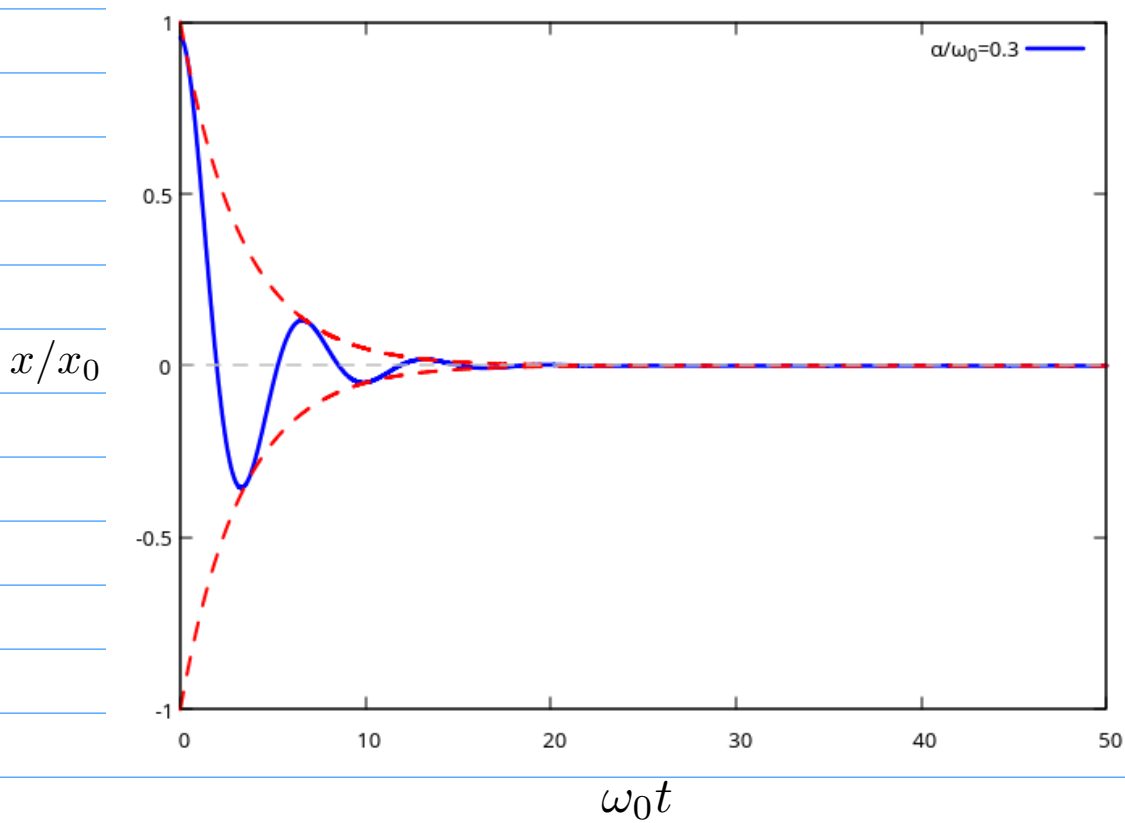
حالت خاص اول: $x_0 = 1, \quad v_0 = 0, \quad \alpha = 0.1\omega_0$



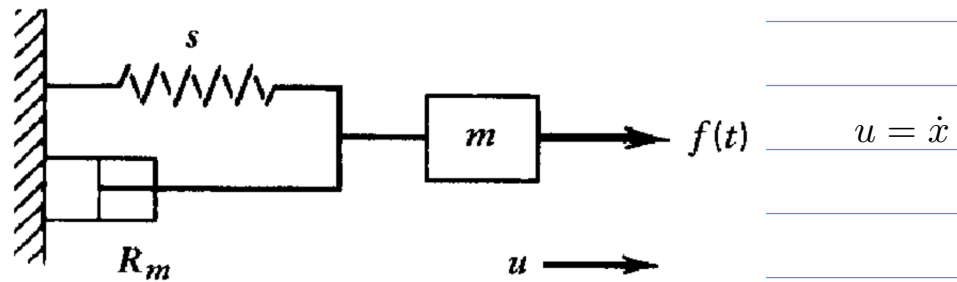
حالت خاص دوم: $x_0 = 1, \quad v_0 = 0, \quad \alpha = 0.2\omega_0$



حالت خاص سوم: $x_0 = 1, \quad v_0 = 0, \quad \alpha = 0.3\omega_0$



نوسانگر میرا تحت اعمال نیروی واداشته نوسانی



$$m\ddot{x} = -sx - R_m\dot{x} + f(t) \quad , \quad f(t) = F \cos \omega t$$

$$m\ddot{x} + R_m\dot{x} + sx = F \cos \omega t$$

روش اول

جواب پیشنهادی و مشتقات آن

$$\begin{cases} x = A \cos \omega t + B \sin \omega t \\ \dot{x} = -\omega A \sin \omega t + \omega B \cos \omega t \\ \ddot{x} = -\omega^2 A \cos \omega t - \omega^2 B \sin \omega t \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s/m - \omega^2)A + R_m\omega/m B = F/m \\ -R_m\omega/m A + (s/m - \omega^2)B = F/m \end{cases}$$

$$A = \frac{F(s/m - \omega^2)/m}{(s/m - \omega^2)^2 + (R_m\omega/m)^2} \quad B = \frac{F(R_m\omega/m)/m}{(s/m - \omega^2)^2 + (R_m\omega/m)^2}$$

$$x = -\frac{F(\omega^2 - s/m)/m}{(\omega^2 - s/m)^2 + (R_m\omega/m)^2} \cos \omega t + \frac{F(R_m\omega/m)/m}{(\omega^2 - s/m)^2 + (R_m\omega/m)^2} \sin \omega t$$

$$x = \frac{F/m}{\sqrt{(\omega^2 - s/m)^2 + (R_m\omega/m)^2}} [-\sin \phi \cos \omega t + \cos \phi \sin \omega t]$$

$$\sin \phi = \frac{(\omega^2 - s/m)}{\sqrt{(\omega^2 - s/m)^2 + (R_m \omega/m)^2}}$$

$$\cos \phi = \frac{R_m \omega/m}{\sqrt{(\omega^2 - s/m)^2 + (R_m \omega/m)^2}}$$

$$x = \frac{F/m}{\sqrt{(\omega^2 - s/m)^2 + (R_m \omega/m)^2}} \sin(\omega t - \phi)$$

$$x = \frac{F/m}{\sqrt{(\omega/m)^2(\omega m - s/\omega)^2 + (\omega/m)^2 R_m^2}} \sin(\omega t - \phi)$$

$$x = \frac{F}{\omega \sqrt{(\omega m - s/\omega)^2 + R_m^2}} \sin(\omega t - \phi)$$

$$x = \frac{F}{\omega Z_m} \sin(\omega t - \phi)$$

$$u = \frac{F}{Z_m} \cos(\omega t - \phi)$$

روش دوم

$$m\ddot{x} + R_m\dot{x} + sx = F \cos \omega t$$

$$\text{اگر} \quad \begin{cases} x & \rightarrow \mathbf{x} \\ F \cos \omega t & \rightarrow F e^{i\omega t} \end{cases}$$

$$m\ddot{\mathbf{x}} + R_m\dot{\mathbf{x}} + s\mathbf{x} = F e^{i\omega t}$$

$$\ddot{\mathbf{x}} + \frac{R_m}{m}\dot{\mathbf{x}} + \frac{s}{m}\mathbf{x} = \frac{F}{m}e^{i\omega t}$$

$$\mathbf{x} = A e^{i\omega t}, \quad \dot{\mathbf{x}} = i\omega A e^{i\omega t}, \quad \ddot{\mathbf{x}} = -\omega^2 A e^{i\omega t}$$

اصول ارتعاش-گروه فیزیک دانشگاه قم-محمدرضا مظفری

$$-\omega^2 A e^{i\omega t} + \frac{R_m}{m} i\omega A e^{i\omega t} + \frac{s}{m} A e^{i\omega t} = \frac{F}{m} e^{i\omega t}$$

$$A = \frac{1}{i\omega} \frac{F}{R_m + i(\omega m - s/\omega)}$$

$$\mathbf{x} = \frac{1}{i\omega} \frac{F}{R_m + i(\omega m - s/\omega)} e^{i\omega t}$$

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{F}{R_m + i(\omega m - s/\omega)} e^{i\omega t}$$

$$\mathbf{u} = \frac{1}{R_m + i(\omega m - s/\omega)} (F e^{i\omega t}) = \frac{1}{R_m + i(\omega m - s/\omega)} f(t)$$

$$\mathbf{u} = \frac{1}{Z_m} f(t) \quad \text{تعریف امپدانس ورودی مکانیکی مختلط}$$

$$Z_m = R_m + i(\omega m - s/\omega)$$

قسمت حقیقی نشانه اتلاف انرژی است که می‌تواند به گرما تبدیل شود.

وقتی امپدانس فقط قسمت حقیقی مثبت دارد $R_m > 0$ نیروی اعمالی با سرعت همفاز است.

$$X_m = \omega m - s/\omega \quad \text{تعریف راکتانس مکانیکی}$$

قسمت موهومی نشانه ذخیره انرژی است. وقتی امپدانس موهومی است،

نیروی اعمالی با سرعت همفاز است. $X_m > 0$ انرژی در انرژی جنبشی جرم

ذخیره می‌شود. $X_m < 0$ انرژی در انرژی پتانسیل فنر ذخیره می‌شود.

$$Z_m = R_m + iX_m = Z_m e^{i\Theta}$$

$$\text{بزرگی امپدانس مکانیکی} \quad Z_m = \sqrt{R_m^2 + (m\omega - s/\omega)^2} = \sqrt{R_m^2 + X_m^2}$$

$$\text{فاز امپدانس مکانیکی} \quad \Theta = \tan^{-1} \left(\frac{X_m}{R_m} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{m\omega - s/\omega}{R_m} \right)$$

توان لحظه‌ای و توان متوسط

$$W(t) = F(t)v(t) = \frac{F^2}{Z_m} \cos \omega t \cos(\omega t - \phi)$$

$$\bar{W} = \frac{1}{T} \int_0^T W(t) dt = \frac{F^2}{TZ_m} \int_0^T \cos \omega t \cos(\omega t - \phi) dt$$

$$\bar{W} = \frac{F^2}{TZ_m} \int_0^T [\cos^2 \omega t \cos \phi + \cos \omega t \sin \omega t \sin \phi] dt$$

$$\bar{W} = \frac{F^2}{TZ_m} \left[\cos \phi \int_0^T \cos^2 \omega t dt + \sin \phi \int_0^T \cos \omega t \sin \omega t dt \right]$$

$$\int_0^T \cos^2 \omega t dt = \frac{T}{2}, \quad \int_0^T \cos \omega t \sin \omega t dt = 0$$

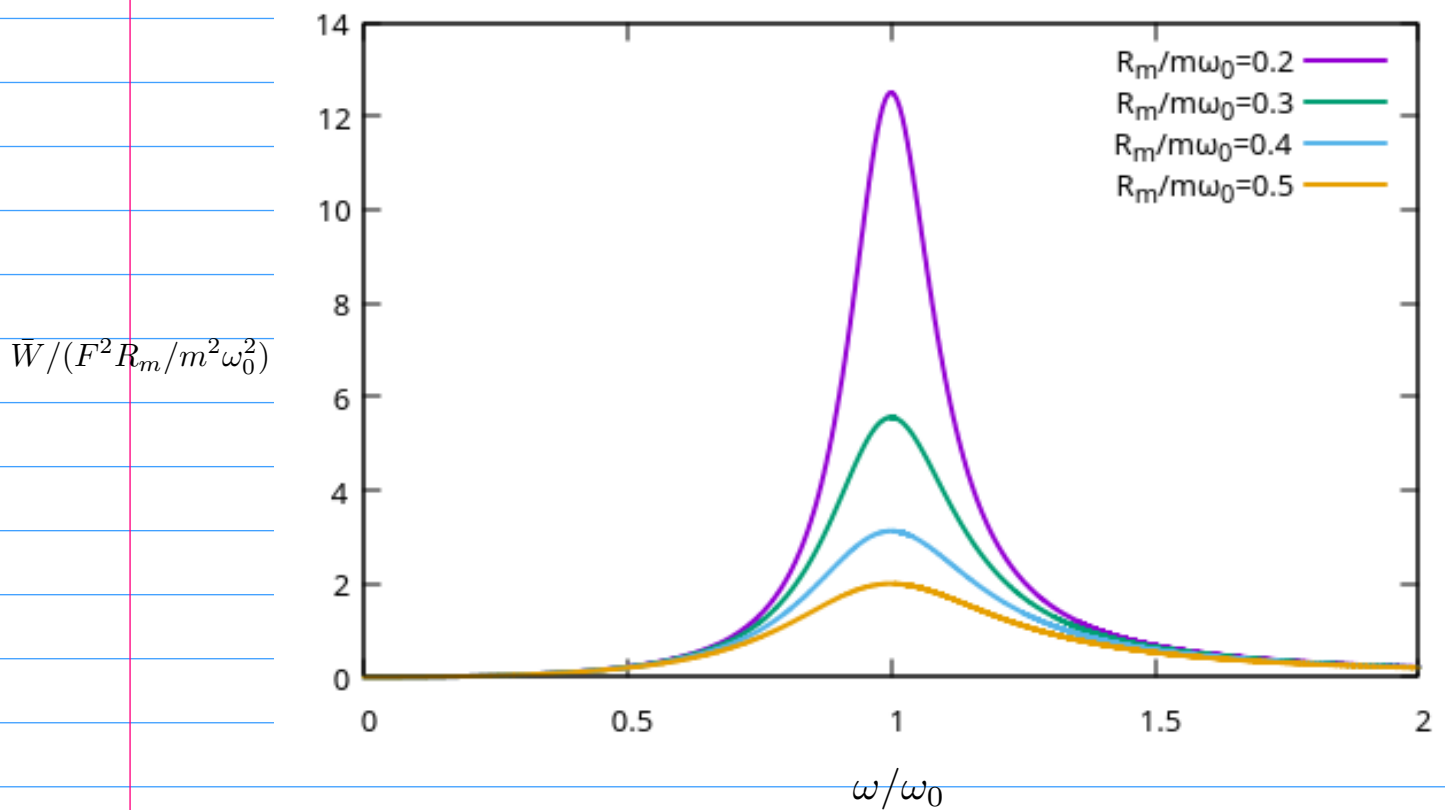
$$\bar{W} = \frac{F^2}{2Z_m} \cos \phi$$

$$\cos \phi = \frac{R_m \omega / m}{\sqrt{(\omega^2 - s/m)^2 + (R_m \omega / m)^2}} = \frac{R_m}{Z_m}$$

$$\bar{W} = \frac{F^2 R_m}{2Z_m^2}$$

$$\bar{W} = \frac{F^2 R_m}{2} \frac{1}{R_m^2 + (m\omega - s/\omega)^2}$$

$$\bar{W} = \frac{F^2 R_m}{2m^2 \omega_0^2} \frac{1}{(R_m/m\omega_0)^2 + ((\omega/\omega_0) - (\omega_0/\omega))^2}$$



اگر R_m کوچک باشد رزونانس (تشدید) تیز است و
اگر R_m بزرگ باشد رزونانس (تشدید) پهن است.

می توان تیزی رزونانس را با فاکتور کیفیت تعریف کرد

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}$$

ω_0 فرکانس رزونانس (تشدید) است

ω_1 و ω_2 دو فرکانس در بالا و پایین فرکانس رزونانس قرار دارند

توان متوسط در ω_1 و ω_2 برابر نصف مقدار توان متوسط در فرکانس تشدید است.

1.15

$$\bar{W}(\omega_1) = \bar{W}(\omega_2) = \frac{1}{2} \bar{W}(\omega_0) = \frac{1}{2} \bar{W}_{\max}$$

بیشینه توان در $\omega/\omega_0 = 1$

$$\bar{W}_{\max} = \bar{W}(\omega/\omega_0 = 1) = \frac{F^2 R_m}{2m^2 \omega_0^2} \frac{1}{(R_m/m\omega_0)^2}$$

$$\bar{W} = \frac{1}{2} \bar{W}_{\max}$$

$$\frac{1}{2} \frac{1}{(R_m/m\omega_0)^2} = \frac{1}{(R_m/m\omega_0)^2 + ((\omega/\omega_0) - (\omega_0/\omega))^2}$$

$$x = \omega/\omega_0, \quad y = R_m/m\omega_0$$

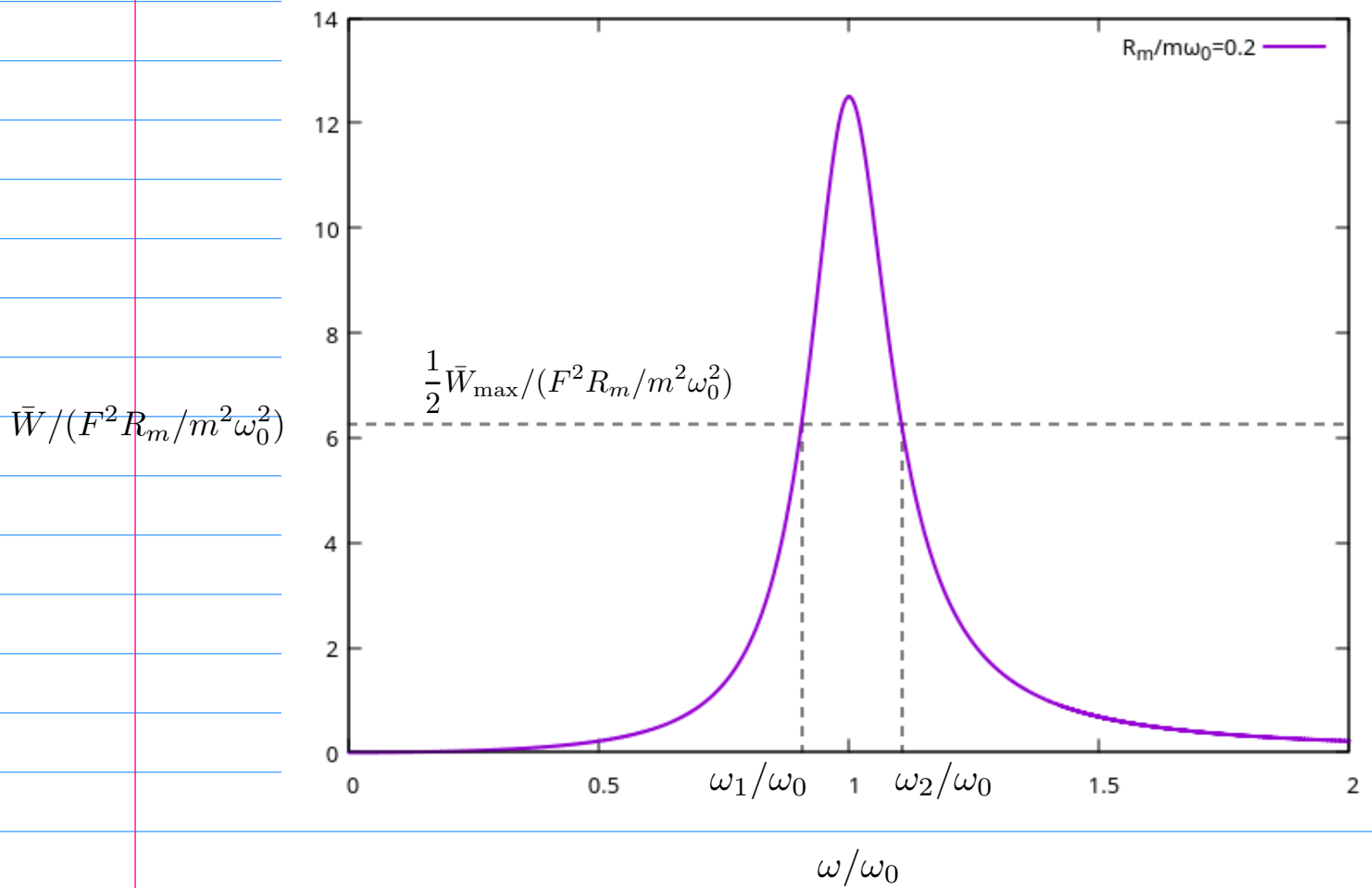
$$\frac{1}{2} \frac{1}{y^2} = \frac{1}{y^2 + (x - 1/x)^2} \Rightarrow x - \frac{1}{x} = \pm y$$

$$x - \frac{1}{x} = -y \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -y/2 + \sqrt{1 + y^2/4} > 0 \\ x_2 = -y/2 - \sqrt{1 + y^2/4} < 0 \end{cases}$$

$$x - \frac{1}{x} = y \Rightarrow \begin{cases} x_3 = y/2 + \sqrt{1 + y^2/4} > 0 \\ x_4 = y/2 - \sqrt{1 + y^2/4} < 0 \end{cases}$$

$$x_1 = \omega_1/\omega_0 \quad , \quad x_3 = \omega_2/\omega_0$$

$$Q = \frac{1}{x_3 - x_1} = \frac{1}{y} = \frac{m\omega_0}{R_m} \quad \text{یا} \quad R_m = \frac{m\omega_0}{Q}$$



1.14

$$x = \frac{F}{\omega Z_m} \sin(\omega t - \phi)$$

$$v = \frac{F}{Z_m} \cos(\omega t - \phi)$$

$$Z_m = \sqrt{R_m^2 + (m\omega - s/\omega)^2} \quad , \quad \phi = \tan^{-1} \left(\frac{m\omega - s/\omega}{R_m} \right)$$

$$Q = \frac{m\omega_0}{R_m}$$

در فرکانس رزونانس $\omega = \omega_0$

$$Z_m = R_m \quad , \quad \phi = 0$$

$$x = \frac{F}{\omega_0 R_m} \sin \omega_0 t$$

$$v = \frac{F}{R_m} \cos \omega_0 t$$

انرژی مصرف شده در هر پریود

$$E_{\text{ave}} = \int_0^T F(t)v(t)dt = \int_0^T (F \cos \omega_0 t) \left(\frac{F}{R_m} \cos \omega_0 t \right) dt$$

$$E_{\text{ave}} = \frac{F^2}{R_m} \int_0^T \cos^2 \omega_0 t dt = \frac{F^2}{R_m} \frac{T}{2} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$E_{\text{ave}} = \frac{\pi F^2}{R_m \omega_0}$$

ماکزیمم انرژی مکانیکی

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}sx^2$$

$$E = \frac{1}{2}m \left(\frac{F}{R_m} \right)^2 \cos^2 \omega t + \frac{1}{2}s \left(\frac{F}{\omega_0 R_m} \right)^2 \sin^2 \omega t$$

$$\omega_0^2 = \frac{s}{m}$$

$$E = \frac{1}{2}m \left(\frac{F}{R_m} \right)^2 \cos^2 \omega t + \frac{1}{2}m \left(\frac{F}{R_m} \right)^2 \sin^2 \omega t$$

$$E_{\max} = E(t=0) = E(t=T) = \frac{1}{2}m \left(\frac{F}{R_m} \right)^2$$

$$\frac{E_{\text{ave}}}{E_{\max}} = \frac{\pi F^2 / R_m \omega_0}{F^2 m / 2 R_m^2} = \frac{2\pi R_m}{m \omega_0} = \frac{2\pi}{Q}$$

1.17

$$x = \frac{F}{\omega Z_m} \sin(\omega t - \phi)$$

$$v = \frac{F}{Z_m} \cos(\omega t - \phi)$$

$$a = -\frac{F\omega}{Z_m} \sin(\omega t - \phi)$$

$$Z_m = \sqrt{R_m^2 + (m\omega - s/\omega)^2} \quad , \quad \phi = \tan^{-1} \left(\frac{m\omega - s/\omega}{R_m} \right)$$

$$a_{\text{amplitude}} = \frac{F\omega}{\sqrt{R_m^2 + (m\omega - s/\omega)^2}}$$

$$\frac{d}{d\omega} a_{\text{amplitude}} = 0$$

$$\frac{F}{\sqrt{R_m^2 + (m\omega - s/\omega)^2}} - \frac{1}{2} \frac{F\omega^2(m + s/\omega^2)(m\omega - s/\omega)}{\sqrt{(R_m^2 + (m\omega - s/\omega)^2)^3}} = 0$$

$$\frac{F}{\sqrt{R_m^2 + (m\omega - s/\omega)^2}} \left(1 - \frac{(m\omega + s/\omega)(m\omega - s/\omega)}{R_m^2 + (m\omega - s/\omega)^2} \right) = 0$$

$$(m\omega - s/\omega)(m\omega + s/\omega) = R_m^2 + (m\omega - s/\omega)^2$$

$$(m\omega - s/\omega)(m\omega + s/\omega) - (m\omega - s/\omega)^2 = R_m^2$$

$$(m\omega - s/\omega)[(m\omega + s/\omega) - (m\omega - s/\omega)] = R_m^2$$

$$(m\omega - s/\omega)(2s/\omega) = R_m^2$$

$$1 - \omega_0^2/\omega^2 = \frac{R_m^2}{2ms}$$

$$\omega_0^2/\omega^2 = 1 - \frac{R_m^2}{2ms}$$

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{R_m^2}{2ms}}} \quad , \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{s}{m}}$$

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{R_m^2}{2m^2\omega_0^2}}}$$

$$R_m = \sqrt{sm} \quad \text{اگر}$$

$$a_{\text{amplitude}}(\omega = \omega_0) = \frac{F\omega_0}{\sqrt{sm + (m\omega_0 - s/\omega_0)^2}} = \frac{F}{m}$$

$$\lim_{\omega/\omega_0 \rightarrow \infty} a_{\text{amplitude}} = \lim_{\omega/\omega_0 \rightarrow \infty} \frac{F\omega}{\sqrt{sm + (m\omega - s/\omega)^2}}$$

$$\frac{F\omega}{\sqrt{sm + (m\omega - s/\omega)^2}} = \frac{F\omega}{\sqrt{m^2\omega_0^2 + m^2\omega_0^2((\omega/\omega_0) - (\omega_0/\omega))^2}}$$

$$= \frac{F}{m} \frac{(\omega/\omega_0)}{\sqrt{1 + ((\omega/\omega_0) - (\omega_0/\omega))^2}}$$

$$= \frac{F}{m} \frac{(\omega/\omega_0)}{(\omega/\omega_0) \sqrt{(\omega_0/\omega)^2 + (1 - (\omega_0/\omega)^2)^2}}$$

$$= \frac{F}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0/\omega)^2 + (1 - (\omega_0/\omega)^2)^2}}$$

اصول ارتعاش-گروه فیزیک دانشگاه قم-محمدرضا مظفری

$$\begin{aligned}\lim_{\omega/\omega_0 \rightarrow \infty} a_{\text{amplitude}} &= \lim_{\omega/\omega_0 \rightarrow \infty} \frac{F\omega}{\sqrt{sm + (m\omega - s/\omega)^2}} \\&= \frac{F}{m} \lim_{(\omega/\omega_0) \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0/\omega)^2 + (1 - (\omega_0/\omega)^2)^2}} \\&= \frac{F}{m}\end{aligned}$$

$$\lim_{\omega/\omega_0 \rightarrow \infty} a_{\text{amplitude}} = a_{\text{amplitude}}(\omega = \omega_0)$$