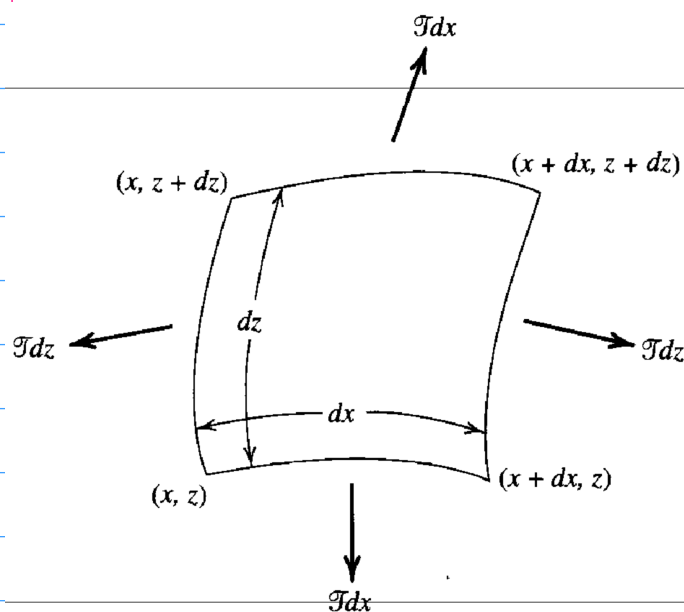




$$0 \leq x \leq \ell_x, \quad 0 \leq z \leq \ell_z$$

$$\sigma = \frac{M}{\ell_x \ell_z} \quad \text{چگالی سطحی یوسته}$$

$$M \quad \text{جرم یوسته}$$

$$\ell_x \times \ell_z \quad \text{ابعاد یوسته}$$

معادله موج عرضی در یک یوسته مستطیلی

$$y = y(x, z, t)$$

< یوسته را قابل ارتجاع و یکنواخت، بدون میرائی و ارتعاش آنرا با دامنه کم در نظر می‌گیریم و همچنین بسیار نازک که بتوان از سختی آن صرفه نظر کرد.

< چگالی سطحی یوسته ثابت و توزیع کشش در جهت‌های مختلف را یکنواخت در نظر می‌گیریم.

$$\text{نیروی بازگرداننده در امتداد محور } x \quad \mathcal{T} dz \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{(x+dx, z)} - \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{(x, z)} \right] = \mathcal{T} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_{(x, z)} dx dz$$

$$\text{نیروی بازگرداننده در امتداد محور } z \quad \mathcal{T} dx \left[\left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)_{(x, z+dz)} - \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)_{(x, z)} \right] = \mathcal{T} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \right)_{(x, z)} dx dz$$

$$\mathcal{T} dz \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{(x+dx, z)} - \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{(x, z)} \right] + \mathcal{T} dx \left[\left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)_{(x, z+dz)} - \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)_{(x, z)} \right] =$$

$$\mathcal{T} \left[\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_{(x, z)} + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \right)_{(x, z)} \right] dx dz \quad \text{نیروی بازگرداننده برابند}$$

قانون دوم نیوتن برای ارتعاشات یوسته در امتداد y

$$dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \mathcal{T} \left[\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_{(x,z)} + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \right)_{(x,z)} \right] dx dz$$

از آنجایی که $dm = \sigma dx dz$

$$\sigma dx dz \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \mathcal{T} \left[\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_{(x,z)} + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \right)_{(x,z)} \right] dx dz$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \left[\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \right) \right]$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 y \quad , \quad c = \sqrt{\frac{\mathcal{T}}{\sigma}} \quad , \quad [\mathcal{T}] = \frac{\text{نیرو}}{\text{طول}}$$

جداسازی متغیرها

$$y(x, z, t) = X(x)Z(z)T(t)$$

$$\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = c^2 \left[\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} \right]$$

اگر $\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -k_x^2 \Rightarrow \frac{d^2 X}{dx^2} + k_x^2 X = 0 : X = Ae^{ik_x x} + Be^{-ik_x x}$

اگر $\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -k_z^2 \Rightarrow \frac{d^2 Z}{dz^2} + k_z^2 Z = 0 : Z = Ce^{ik_z z} + De^{-ik_z z}$

$$\vec{k} = \hat{x}k_x + \hat{z}k_z \quad , \quad k = \sqrt{k_x^2 + k_z^2}$$

D, C, B, A ضرایب مختلط اند

ارتعاشهای-یوسته‌ها و ورقه‌ها-گروه فیزیک دانشگاه قم-محمدرضا مظفری

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T = 0 \quad , \quad \omega^2 = c^2 k^2 = c^2 (k_x^2 + k_z^2)$$

$$T = G e^{i\omega t}$$

اعمال شرایط مرزی

$$y(x=0, z, t) = y(x=\ell_x, z, t) = 0$$

$$y(x=0, z, t) = X(x=0) = 0 : A + B = 0 \Rightarrow B = -A$$

$$X(x) = A(e^{ik_x x} - e^{-ik_x x}) = 2iA \sin k_x x$$

$$y(x=\ell_x, z, t) = X(x=\ell_x) = 0 : \sin k_x \ell_x = 0$$

$$k_x \ell_x = m\pi \quad , \quad m = 1, 2, \dots$$

$$X_m(x) \sim \sin(m\pi x / \ell_x)$$

$$y(x, z=0, t) = y(x, z=\ell_z, t) = 0$$

$$y(x, z=0, t) = Z(z=0) = 0 : C + D = 0 \Rightarrow D = -C$$

$$Z(z) = C(e^{ik_z z} - e^{-ik_z z}) = 2iC \sin k_z z$$

$$y(x, z=\ell_z, t) = Z(z=\ell_z) = 0 : \sin k_z \ell_z = 0$$

$$k_z \ell_z = n\pi \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

$$Z_n(x) \sim \sin(n\pi z / \ell_z)$$

ارتعاشهای-یوسته‌ها و ورقه‌ها-گروه فیزیک دانشگاه قم-محمدرضا مظفری

$$y_{m,n}(x, z, t) = Y_{m,n} \sin(m\pi x/\ell_x) \sin(n\pi x/\ell_z) e^{i\omega t}$$

$Y_{m,n}$ ضریب مختلط است

$$y_{m,n}(x, z, t) = \sin(m\pi x/\ell_x) \sin(n\pi x/\ell_z) (a_{m,n} \cos \omega t + b_{m,n} \sin \omega t)$$

$$y(x, z, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} y_{m,n}(x, z, t)$$

$$y(x, z, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \sin(m\pi x/\ell_x) \sin(n\pi x/\ell_z) (a_{m,n} \cos \omega t + b_{m,n} \sin \omega t)$$

$a_{m,n}, b_{m,n}$ ضرایب حقیقی اند و با اعمال شرایط اولیه بدست می‌آیند

$$k_x = m\pi/\ell_x \quad , \quad m = 1, 2, \dots$$

$$k_z = n\pi/\ell_z \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

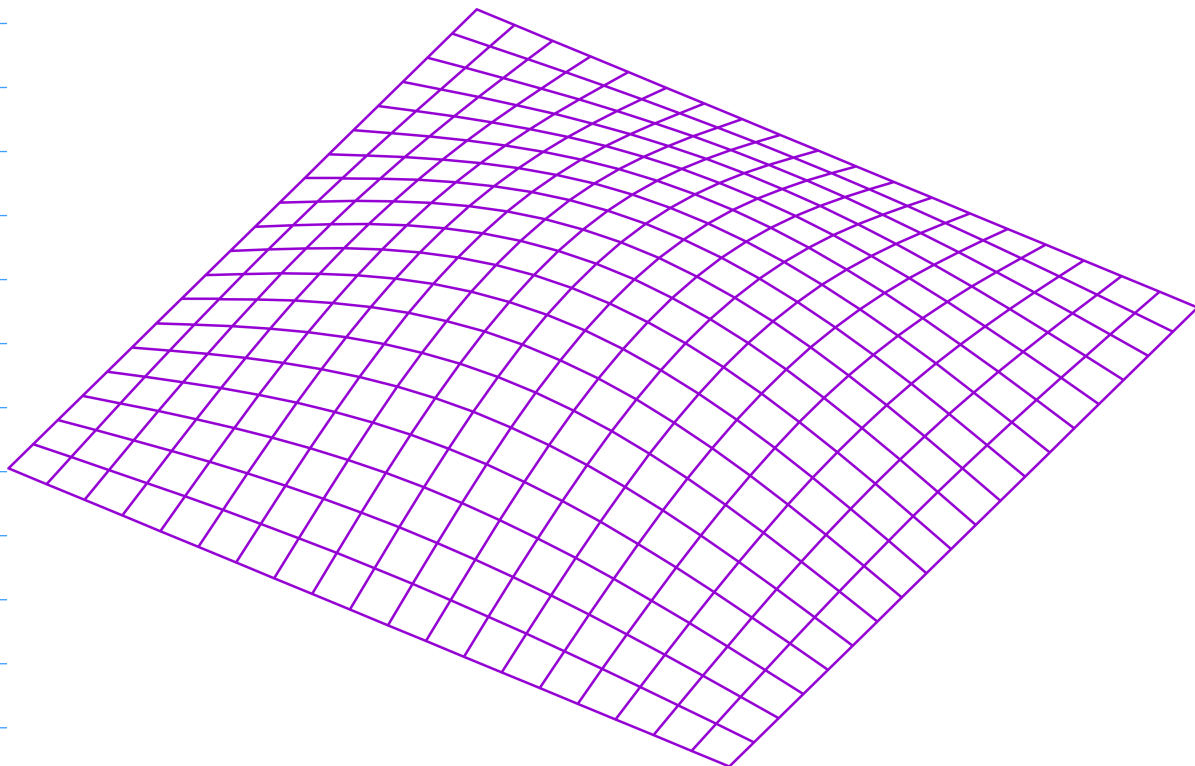
$$f_{m,n} = \frac{\omega_{m,n}}{2\pi} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{\ell_x}\right)^2 + \left(\frac{n}{\ell_z}\right)^2}$$

$(m, n) = (1, 1)$ فرکانس اصلی

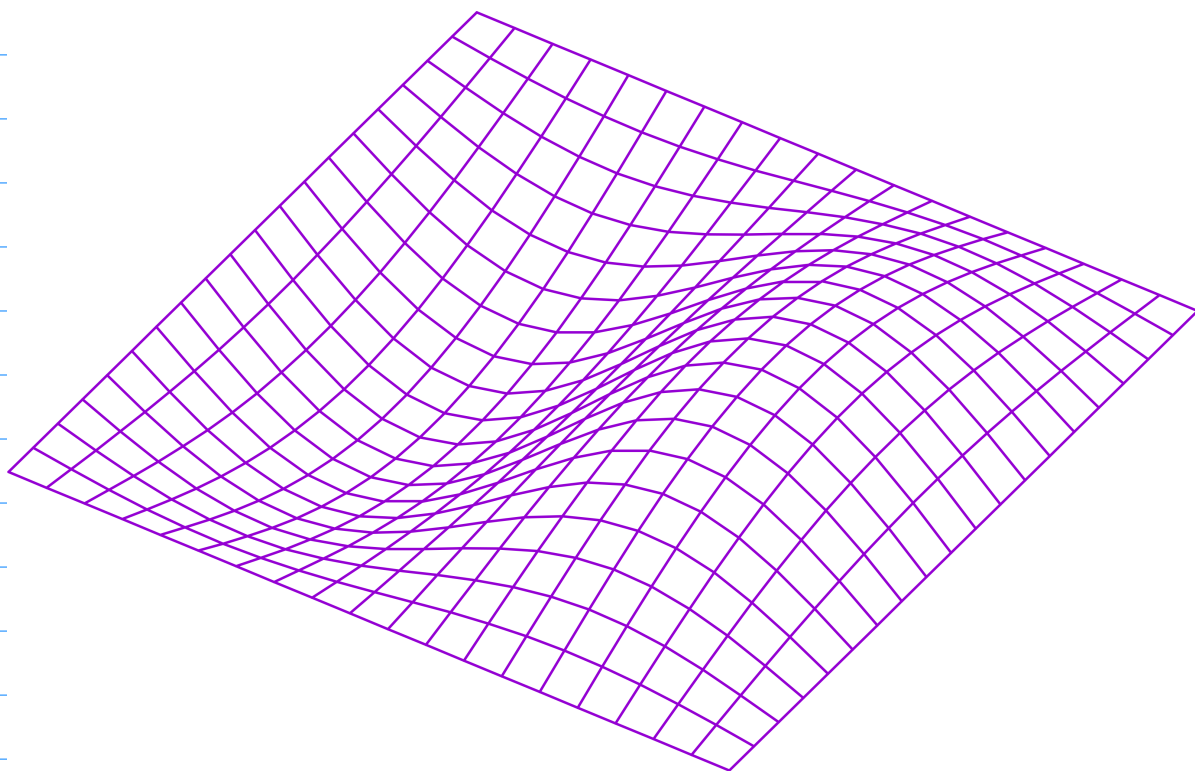
< مدهای فرعی به ازای $m = n$ هارمونیک‌های فرکانس اصلی هستند.

< مدهای فرعی به ازای $m \neq n$ هارمونیک‌های فرکانس اصلی نیستند

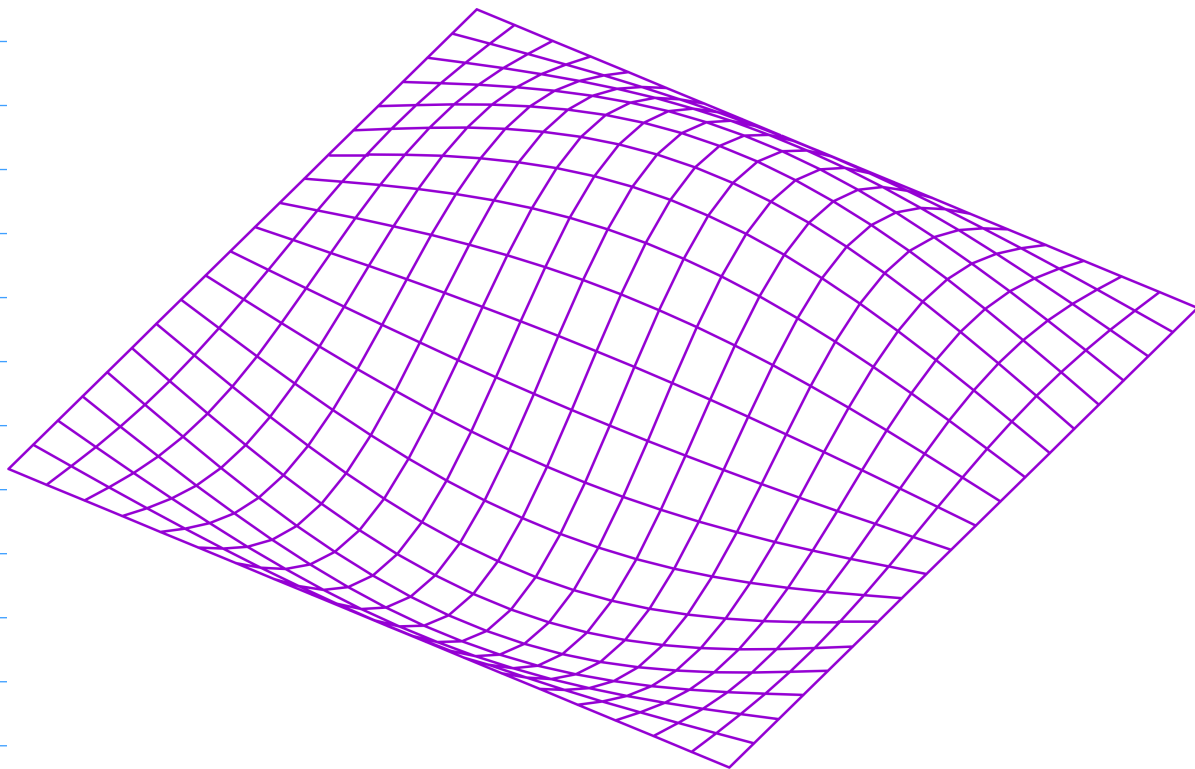
$$(m, n) = (1, 1)$$



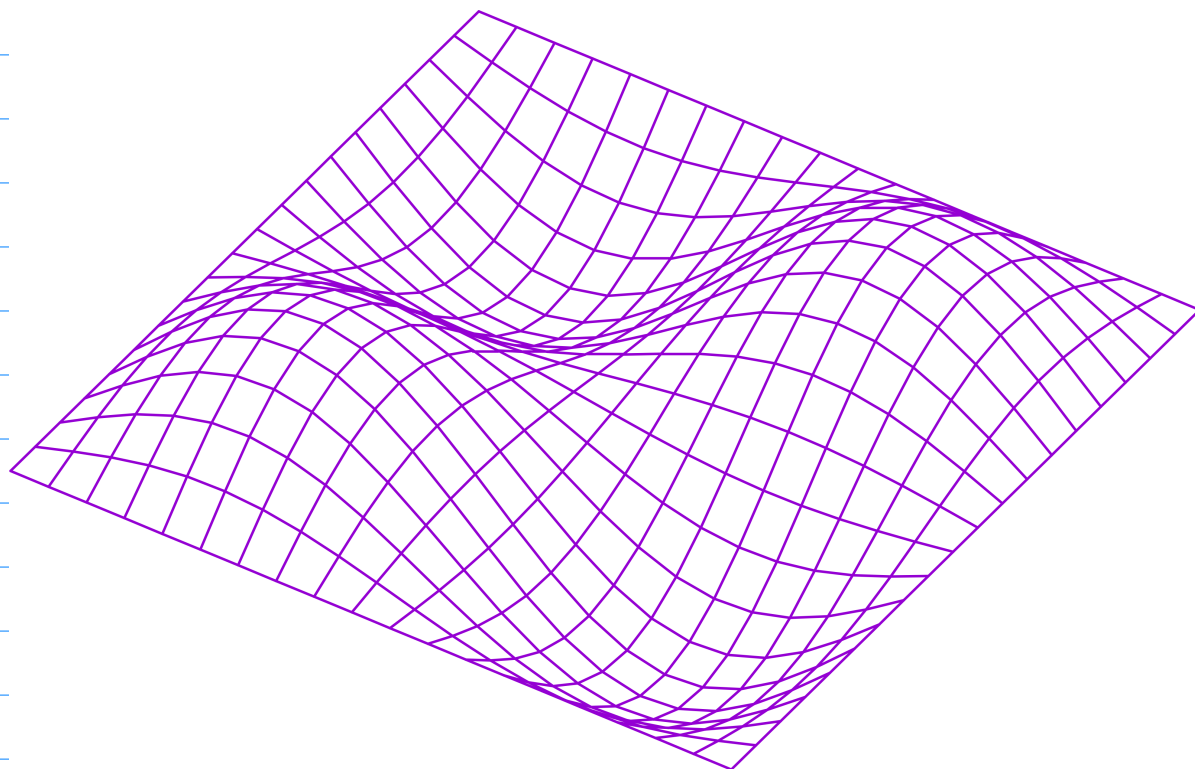
$$(m, n) = (2, 1)$$



$$(m, n) = (1, 2)$$



$$(m, n) = (2, 2)$$



معادله موج یک پوسته گرد

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 y, \quad c = \sqrt{\frac{\mathcal{T}}{\sigma}}$$

$$y = y(r, \theta, t)$$

مختصات قطبی

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ z = r \sin \theta \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + z^2} \\ \tan \theta = z/x \end{cases}$$

لاپلاسیان در مختصات قطبی

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} \right)$$

حالت خاص: ارتعاش با یک تقارن دایره‌ای

جداسازی متغیرها

$$\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = c^2 \frac{1}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right)$$

$$\frac{1}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) = -k^2 \Rightarrow \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + k^2 R = 0$$

$$\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = -\omega^2 \Rightarrow \frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T = 0 : T(t) \sim e^{i\omega t}$$

$$\omega = ck \quad \text{پاشندگی خطی محیط}$$

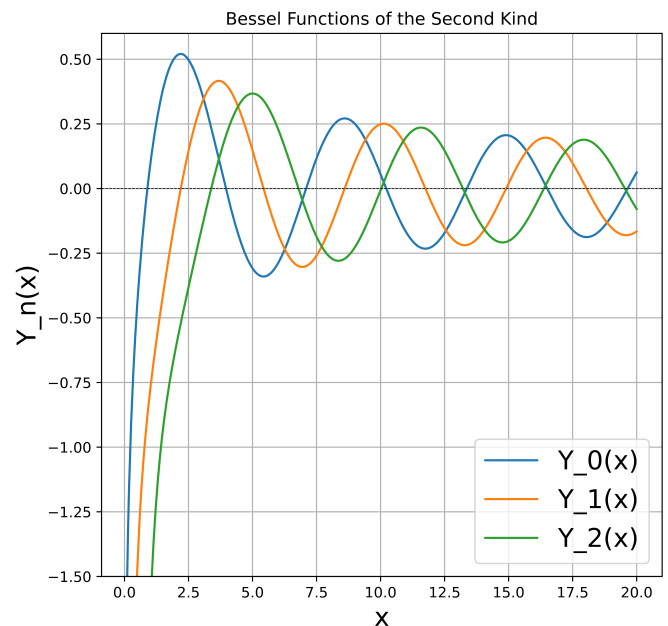
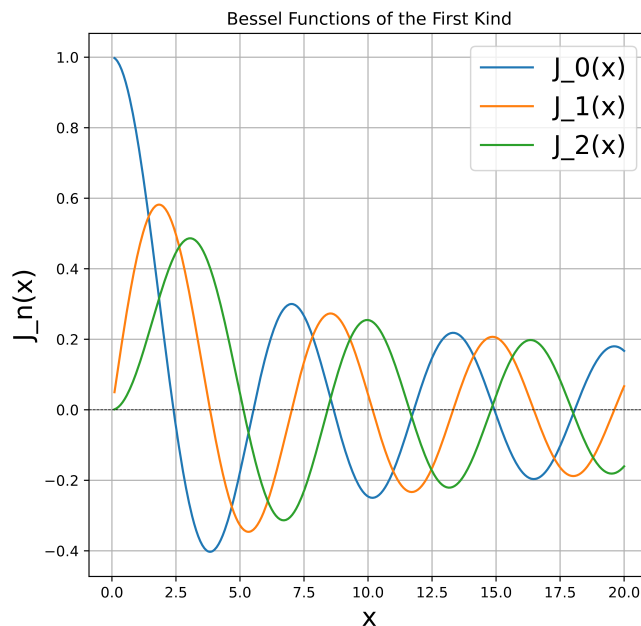
$$y(r, t) = R(r) e^{i\omega t} \quad \text{ارتعاشات هارمونیک}$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + k^2 R = 0$$

معادله دیفرانسیل بسل

$$\frac{d^2 \mathcal{Y}}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\mathcal{Y}}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) \mathcal{Y} = 0$$

نوع اول $m : \mathcal{Y}(x) = J_m(x)$, $m : \mathcal{Y}(x) = Y_m(x)$ نوع دوم



خواص توابع بسل

$$J_0(x) \rightarrow 1 - \frac{x^2}{4}, \text{ for } x \rightarrow 0, \quad J_1(x) \rightarrow \frac{x}{2} \left(1 - \frac{x^2}{8}\right), \text{ for } x \rightarrow 0$$

$$J_0(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \text{ for } x \rightarrow \infty$$

$$J_1(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \text{ for } x \rightarrow \infty$$

$$\int x J_0(x) dx = x J_1(x) \qquad \int J_1(x) dx = -J_0(x)$$

$$\int x J_0^2(x) dx = \frac{x^2}{2} [J_0^2(x) + J_1^2(x)]$$

$$J_{m-2}(x) + J_m(x) = \frac{2(m-1)}{x} J_{m-1}(x)$$

ارتعاشهای-پوسته‌ها و ورقه‌ها-گروه فیزیک دانشگاه قم-محمدرضا مظفری

$$\omega = ck \quad \text{یا شندگی خطی محیط}$$

$$y(r, t) = R(r)e^{i\omega t} \quad \text{ارتعاشات هارمونیک}$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + k^2 R = 0$$

$$\frac{d^2 \mathcal{Y}}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\mathcal{Y}}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) \mathcal{Y} = 0, \quad m : \mathcal{Y}(x) = J_m(x)$$

$$\text{اگر} \quad \begin{cases} x = kr \\ m = 0 \end{cases} \Rightarrow R(r) = J_0(kr)$$

$$\text{ارتعاشات هارمونیک} \quad y(r, t) = J_0(kr)e^{i\omega t}$$

شرایط مرزی

$$y(r = a, t) = 0 : J_0(ka) = 0$$

$$k_n a = 2.405, 5.520, 8.654, 11.792, \dots$$

$$\omega_n = ck_n = \frac{c}{a} k_n a = \frac{c}{a} (2.405, 5.520, 8.654, 11.792, \dots)$$

$$\omega_n = 2\pi f_n$$

$$f_n = \frac{c}{2\pi a} k_n a = \frac{c}{2\pi a} (2.405, 5.520, 8.654, 11.792, \dots)$$

$$\text{فرکانس اصلی} \quad f_1 = \frac{c}{2\pi a} k_1 a = 2.405 \frac{c}{2\pi a}$$

$$\text{فرکانس فرعی} \quad f_2 = \frac{c}{2\pi a} k_2 a = 5.520 \frac{c}{2\pi a} = \frac{5.520}{2.405} f_1$$

$\vdots$

$$y_n(r, t) = A_n J_0(k_n r) e^{i\omega_n t}$$

A_n ضریب مختلط است

$$y_n(r, t) = J_0(k_n r) (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t)$$

a_n, b_n ضرایب حقیقی اند

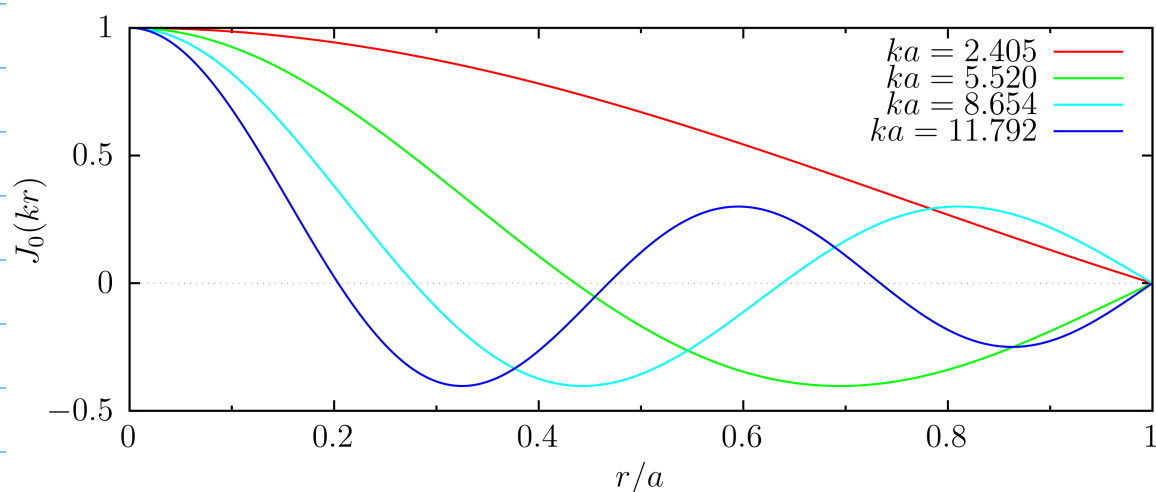
$$y(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(r, t)$$

$$y(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} J_0(k_n r) (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t)$$

a_n, b_n ها با اعمال شرایط اولیه بدست می‌آیند

رسم تابع بسل مرتبه صفر در مدهای مختلف و بررسی گره‌های آنها

$$J_0(kr) = J_0((ka)r/a)$$



موقعیت گره‌ها

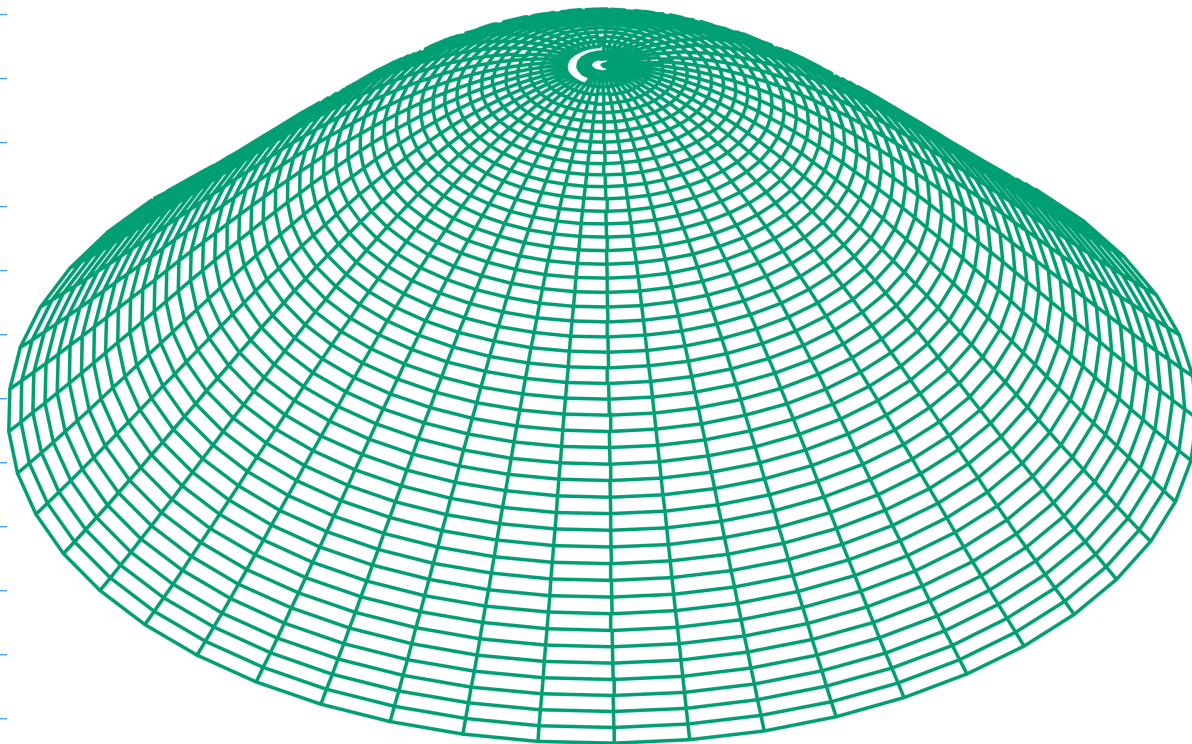
$$ka = 2.405 : r/a = 1$$

$$ka = 5.520 : r/a = 0.436, 1$$

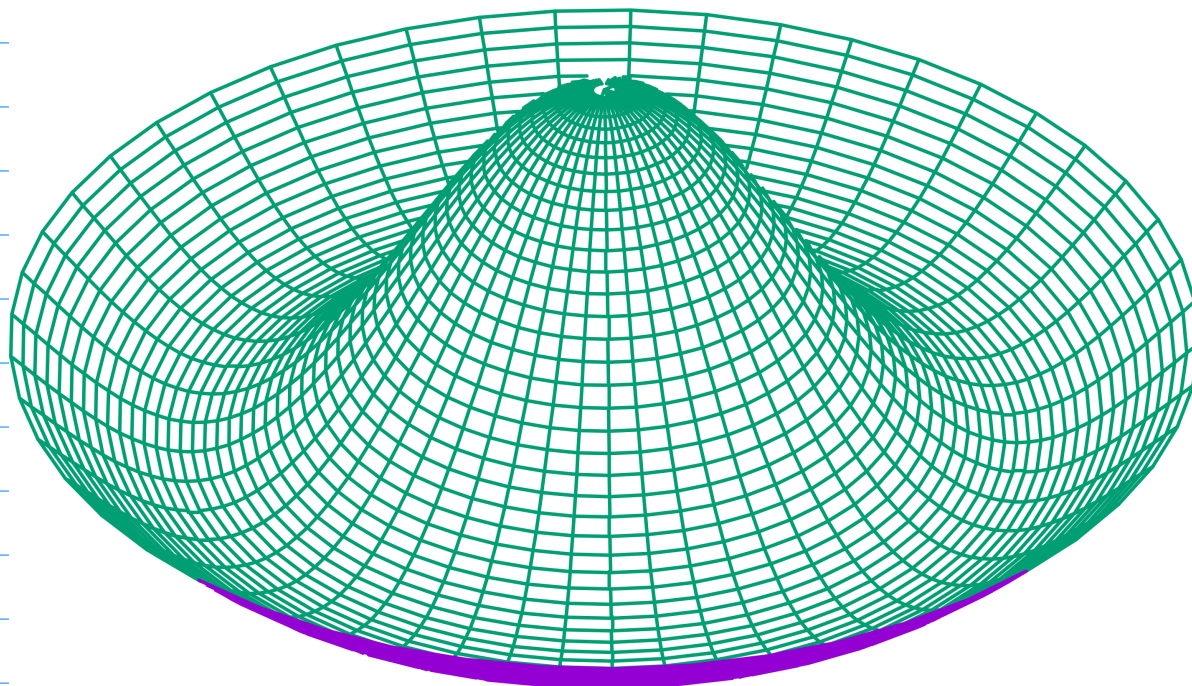
$$ka = 8.654 : r/a = 0.279, 0.638, 1$$

$$ka = 11.792 : r/a = 0.204, 0.468, 0.734, 1$$

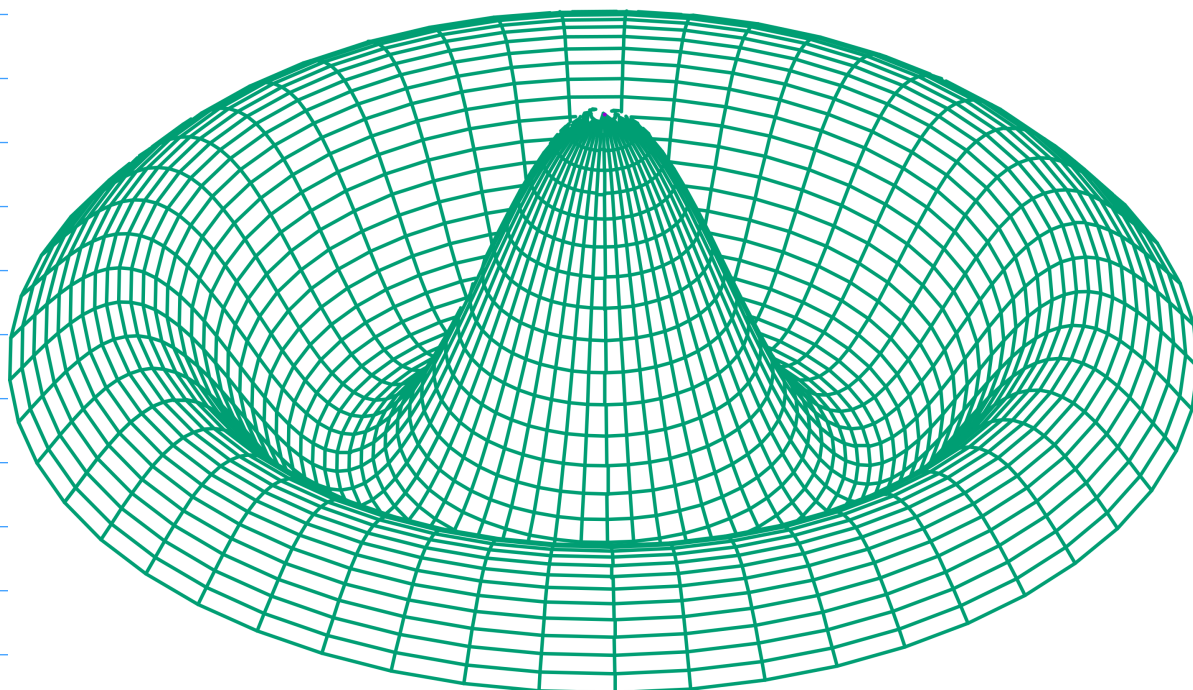
$$ka = 2.405$$



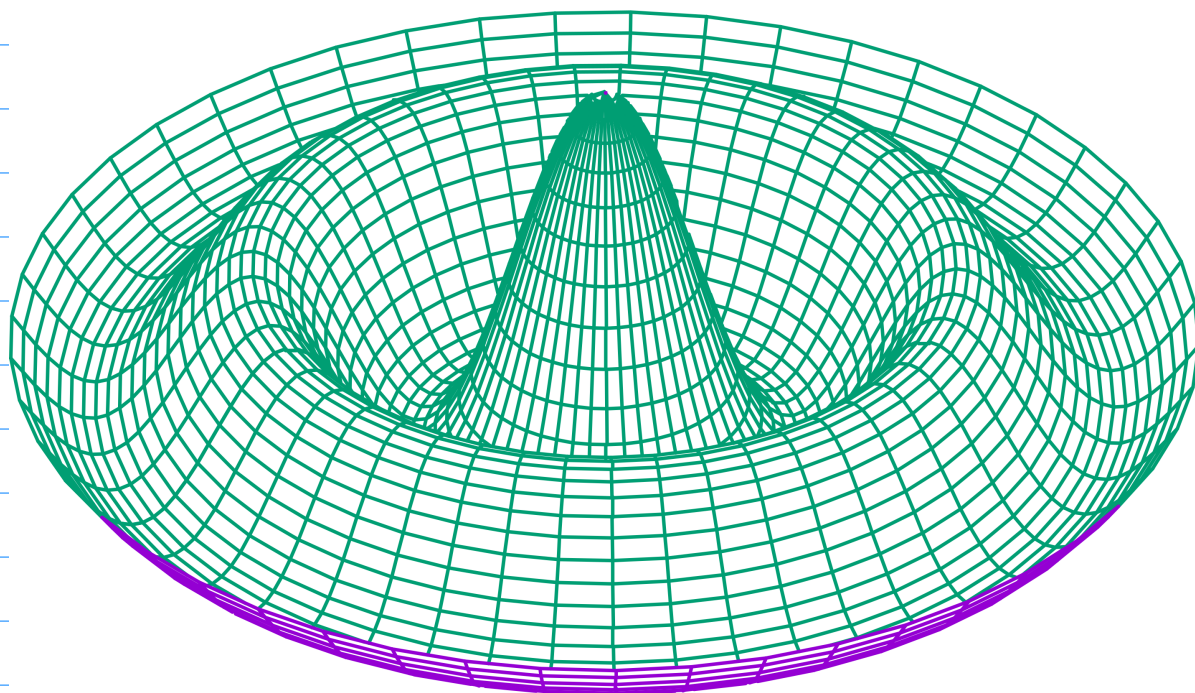
$$ka = 5.520$$



$$ka = 8.654$$



$$ka = 11.792$$



ارتعاشهای-پوسته‌ها و ورقه‌ها-گروه فیزیک دانشگاه قم-محمدرضا مظفری

< هنگامی که حلقه‌ها داخلی بالا می‌روند حلقه‌های خارجی پایین می‌روند و بالعکس.

نتیجه اینگونه ارتعاش آن است که هوای مجاور فرکانس‌های فرعی دارای تغییر مکان جزئی است.

< بدین جهت پوسته طبل در این فرکانس‌ها (فرکانس‌های فرعی) بازده کافی ندارد.

یعنی صداها را کم منتشر می‌کند.

< تعریف سنجش میزان قدرت انتشار پوسته در هر مد

$$\bar{R}_n = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a R_n(r) 2\pi r dr$$

$$R_n(r) = A_n J_0(k_n r)$$

$$\bar{R}_n = \frac{A_n}{\pi a^2} \int_0^a J_0(k_n r) 2\pi r dr$$

$$\int x J_0(x) dx = x J_1(x) \quad \text{می‌دانیم}$$

$$\bar{R}_n = \frac{2A_n}{(k_n a)^2} \int_0^{k_n a} J_0(x) x dx = \frac{2A_n}{(k_n a)^2} (k_n a) J_1(k_n a) = \frac{2A_n}{k_n a} J_1(k_n a)$$

$$\bar{R}_n = \frac{2A_n}{k_n a} J_1(k_n a)$$

$$n = 1 : \quad \bar{R}_1 = \frac{2A_1}{k_1 a} J_1(k_1 a) = \frac{2J_1(2.405)}{2.405} A_1 = 0.432 A_1$$

$$n = 2 : \quad \bar{R}_2 = \frac{2A_2}{k_2 a} J_1(k_2 a) = \frac{2J_1(5.520)}{5.520} A_2 = -0.123 A_2$$

$$\text{اگر } A_1 = A_2 \Rightarrow |\bar{R}_1| > |\bar{R}_2|$$

یعنی قدرت انتشار صوت در مد اصلی بیشتر از مدها دیگر است.

ارتعاشهای-پوسته‌ها و ورقه‌ها-گروه فیزیک دانشگاه قم-محمدرضا مظفری

< خصوصیات موج صوتی بیشتر بستگی به میزان حجم هوای جابجا شده دارد و شکل سطح مورد انتشار صوت زیاد موثر نیست.

< هر منبع موج را می‌توان به پیستون ساده‌ای معادل کرده حاصلضرب سطح آن S در دامنه ξ حجم هوای جابجا شده به وسیله سطح منبع را تعیین می‌کند.

$$\xi S = \text{حجم هوای جابجا شده}$$

$$\bar{R}_1 S = 0.432 A_1 \pi a^2 = \text{حجم هوای جابجا شده در مد اصلی پوسته گرد به شعاع } a$$

نقاره (Kettledrum)



< یکی از نیروهای موثر در ارتعاش، نیروی حاصل از تغییر فشاری است

که در هوای موجود در فضای بسته‌ی محدود به پوسته است

< نقاره ظرف نیمکره‌ای است که دهانه‌ی آن از پوست کشیده شده است.

< هنگامی که پوست به ارتعاش در می‌آید، حجم هوای درون ظرف را منبسط و متراکم می‌سازد.

< در اینجا فرض می‌شود که فشار حاصل از تراکم و انبساط هوای ظرف در تمامی نقاط پوسته

یکنواخت باشد.

ارتعاشهای-پوسته‌ها و ورقه‌ها-گروه فیزیک دانشگاه قم-محمدرضا مظفری

< تغییرات فشار را متناسب را با تغییر مکان متوسط پوسته فرض می‌کنیم،

$$dP \sim \bar{y}$$

< برای تغییر مکان متوسط پوسته، تغییر حجم هوای ظرف برابر

$$dV = \pi a^2 \bar{y}$$

می‌شود

< در اینجا تغییر حجم هوای داخل ظرف نواره را بصورت بی‌درو فرض می‌کنیم. یعنی

$$PV^\gamma = P_0 V_0^\gamma = \text{const.}$$

$$\gamma = C_p / C_v \text{ که}$$

< اگر از رابطه بین حجم و فشار در یک فرایند به درو دیفرانسیل بگیریم

$$dP V^\gamma + \gamma P V^{\gamma-1} dV = 0$$

$$dP = -\gamma \frac{P}{V} dV$$

< اگر در حالت تعادل که حجم و فشار هوای ظرف نواره برابر V_0 و P_0 باشد

$$dP = -\gamma \frac{P_0}{V_0} dV$$

< اگر تغییر حجم هوای ظرف برابر با مکان متوسط پوسته باشد، $dV = \pi a^2 \bar{y}$

$$dP = -\gamma \frac{P_0}{V_0} \pi a^2 \bar{y}$$

< معادله موج با تقارن شعاعی در حضور نیروی ناشی از تغییر فشار خارجی

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial r} \right) + \frac{dP}{\sigma}, \quad \left[\frac{dP}{\sigma} \right] = m/s^2$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial r} \right) - \gamma \frac{P_0}{V_0 \sigma} \pi a^2 \bar{y}$$

ارتعاشهای-یوسته‌ها و ورقه‌ها-گروه فیزیک دانشگاه قم-محمدرضا مظفری

$$\text{اگر } y(r, t) = R(r)e^{i\omega t}$$

آنگاه

$$-\omega^2 R = c^2 \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dy}{dr} \right) - \gamma \frac{P_0}{V_0 \sigma} \pi a^2 \bar{y}$$

$$\mathcal{T} = c^2 \sigma$$

اگر طرفین را بر c^2 تقسیم کنیم

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dy}{dr} + k^2 R = \frac{\gamma P_0}{V_0 c^2 \sigma} \int_0^a R(r) 2\pi r dr$$

چون $\mathcal{T} = c^2 \sigma$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dy}{dr} + k^2 R = \frac{\gamma P_0}{V_0 \mathcal{T}} \int_0^a R(r) 2\pi r dr$$

برای حل معادله بالا فرض می‌کنیم که

$$R(r) = A[J_0(kr) - J_0(ka)]$$

این فرض بدان جهت است که اگر سمت راست معادله دیفرانسیل صفر باشد، حل آن بصورت

$$R(r) = AJ_0(kr)$$

است و به علت وجود انتگرال در سمت راست، جمله

$$AJ_0(ka)$$

اضافه شده است تا جواب نهایی $R(r)$ با شرایط مرزی تطبیق داشته باشد.

$$\frac{\gamma P_0}{V_0 \mathcal{T}} \int_0^a R(r) 2\pi r dr = A \frac{2\pi \gamma P_0}{V_0 \mathcal{T}} \int_0^a [J_0(kr) - J_0(ka)] r dr$$

$$= A \frac{2\pi \gamma P_0}{V_0 \mathcal{T}} \left(\int_0^a J_0(kr) r dr - J_0(ka) \int_0^a r dr \right)$$

$$\int x J_0(x) dx = x J_1(x) \quad \text{می‌دانیم}$$

$$\frac{\gamma P_0}{V_0 \mathcal{T}} \int_0^a R(r) 2\pi r dr = A \frac{\pi a^2 \gamma P_0}{V_0 \mathcal{T}} \left(\frac{2}{ka} J_1(ka) - J_0(ka) \right)$$

$$J_0(x) + J_2(x) = \frac{2}{x} J_1(x) \quad \text{می‌دانیم}$$

$$\frac{\gamma P_0}{V_0 \mathcal{T}} \int_0^a R(r) 2\pi r dr = A \frac{\pi a^2 \gamma P_0}{V_0 \mathcal{T}} J_2(ka)$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dy}{dr} + k^2 R = -Ak^2 J_0(ka)$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dy}{dr} + k^2 R = \frac{\gamma P_0}{V_0 \mathcal{T}} \int_0^a R(r) 2\pi r dr \Rightarrow -Ak^2 J_0(ka) = A \frac{\pi a^2 \gamma P_0}{V_0 \mathcal{T}} J_2(ka)$$

$$-Ak^2 J_0(ka) = A \frac{\pi a^2 \gamma P_0}{V_0 \mathcal{T}} J_2(ka)$$

$$-J_0(ka) = \frac{\pi a^4 \gamma P_0}{V_0 \mathcal{T}} \frac{J_2(ka)}{(ka)^2}$$

$$-J_0(ka) = \alpha \frac{J_2(ka)}{(ka)^2}, \quad \alpha = \frac{\pi a^4 \gamma P_0}{V_0 \mathcal{T}}$$

$$\alpha = \frac{\pi a^5 \gamma P_0 / V_0}{\mathcal{T} a} = \frac{\text{نیروی حاصل از تراکم هوای ظرف}}{\text{نیروی کشش پوسته نقاره}}$$

$\alpha <$ ثابت و بدون بعد است.

$<$ بستگی به نیروی حاصل از تراکم ظرف و نیروی کشش پوسته نقاره دارد.

$<$ هرگاه نیروی کشش پوسته نقاره بزرگ باشد، α کوچک است.

$$\begin{cases} -J_0(ka) = \alpha \frac{J_2(ka)}{(ka)^2} \\ \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow J_0(ka) = 0, \quad ka = 2.405, 5.520, 8.654, \dots$$

ارتعاشهای-پوسته‌ها و ورقه‌ها-گروه فیزیک دانشگاه قم-محمدرضا مظفری

$$\alpha = 0 : \quad ka = 2.405, 5.520, 8.654$$

$$\alpha = 1 : \quad ka = 2.544, 5.532, 8.657$$

$$\alpha = 2 : \quad ka = 2.674, 5.545, 8.660$$

$$\alpha = 5 : \quad ka = 3.020, 5.588, 8.670$$

$$\alpha = 10 : \quad ka = 3.487, 5.675, 8.690$$

< وجود کاسه نقره، مقادیر ka و فرکانس را افزایش می‌دهد

ارتعاشات واداشته در پوسته گرد

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial r} \right) + \frac{p(t)}{\sigma}, \quad \left[\frac{P}{\sigma} \right] = m/s^2$$

< فرض می‌کنیم پوسته گرد تحت تاثیر نیروی واداشته سینوسی به ارتعاش در می‌آید.

< فشار بر آن بطور یکنواخت در امتداد y وارد می‌شود

$$p(t) = P \cos \omega t \quad \text{حقیقی}$$

$$p(t) = P e^{i\omega t} \quad \text{مختلط}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial r} \right) + \frac{P}{\sigma} e^{i\omega t}$$

< جواب پیشنهادی

$$y(r, t) = R(r) e^{i\omega t}$$

$$-\omega^2 R e^{i\omega t} = c^2 \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) e^{i\omega t} + \frac{P}{\sigma} e^{i\omega t}$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + k^2 R = -\frac{P}{\sigma c^2} = -\frac{P}{\mathcal{T}}$$

ارتعاشهای-پوسته‌ها و ورقه‌ها-گروه فیزیک دانشگاه قم-محمدرضا مظفری

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + k^2 R = -\frac{P}{\mathcal{T}} \Rightarrow k^2 B = -\frac{P}{\mathcal{T}} \Rightarrow B = -\frac{P}{k^2 \mathcal{T}}$$

$$R(r) = AJ_0(kr) + B$$

$$R(r) = AJ_0(kr) - \frac{P}{k^2 \mathcal{T}}$$

< شرایط مرزی

$$y(r = a, t) = 0 \Rightarrow R(r = a) = 0$$

$$AJ_0(ka) - \frac{P}{k^2 \mathcal{T}} = 0 \Rightarrow A = \frac{P}{k^2 \mathcal{T}} \frac{1}{J_0(ka)}$$

بنابراین

$$R(r) = \frac{P}{k^2 \mathcal{T}} \left[\frac{J_0(kr)}{J_0(ka)} - 1 \right]$$

$$y(r, t) = R(r)e^{i\omega t} = \frac{P}{k^2 \mathcal{T}} \left[\frac{J_0(kr)}{J_0(ka)} - 1 \right] e^{i\omega t}$$

< دامنه تغییر مکان نسبت مستقیم با نیروی واداشته و نسبت معکوس با کشش پوسته دارد.

< هرگاه فرکانس نیروی واداشته

$$\frac{P}{\sigma} e^{i\omega t}$$

با یکی از فرکانس‌های آزاد پوسته

$$ka = 2.405, 5.520, 8.654, 11.792, \dots$$

برابر گردد، در اینصورت

$$J_0(ka) = 0$$

و دامنه تغییر مکان بینهایت می‌شود.

< در عمل همیشه نیروی‌های میرائی هستند و در معادله

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial r} \right) + \frac{P}{\sigma} e^{i\omega t}$$

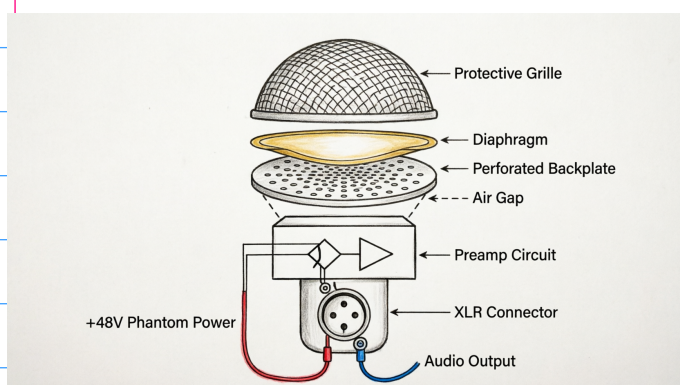
می‌توان آن را با جمله‌ای مانند

$$-(R/\sigma)(\partial y/\partial t)$$

بکار برد.

< در این شرایط بزرگی دامنه تغییر مکان به مقادیر معینی محدود می‌گردند.

مهمترین کاربرد پوسته واداشته، در دیافراگم گرد میکروفون خازنی است، که در آن موج صوتی در برخورد به پوسته فلزی نازک کشیده شده ایجاد نیروی واداشته در برابر صفحه فلزی دیگری که در مقابل آن قرار دارد می‌کند. تغییر مکان پوسته باعث تغییر ظرفیت خازن حاصل از پوسته و صفحه می‌گردد و ولتاژی متناسب با تغییر مکان متوسط پوسته تولید می‌کند.



متوسط جابجایی پوسته

$$\bar{y}(t) = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a y(r, t) 2\pi r dr = \frac{2P}{(ka)^2} \mathcal{T} e^{i\omega t} \int_0^a \left[\frac{J_0(kr)}{J_0(ka)} - 1 \right] r dr$$

$$\int_0^a \left[\frac{J_0(kr)}{J_0(ka)} - 1 \right] r dr = \frac{1}{k^2 J_0(ka)} \int_0^{ka} J_0(x) x dx - \int_0^a r dr$$

$$\int x J_0(x) dx = x J_1(x) \quad \text{می‌دانیم}$$

$$\int_0^a \left[\frac{J_0(kr)}{J_0(ka)} - 1 \right] r dr = \frac{a^2}{2J_0(ka)} \left[\frac{J_1(ka)}{(ka)} - J_0(ka) \right]$$

$$J_0(x) + J_2(x) = \frac{2}{x} J_1(x) \quad \text{می‌دانیم}$$

$$\int_0^a \left[\frac{J_0(kr)}{J_0(ka)} - 1 \right] r dr = \frac{a^2 J_2(ka)}{2J_0(ka)}$$

$$\bar{y}(t) = \frac{2P}{(ka)^2 \mathcal{J}} e^{i\omega t} \int_0^a \left[\frac{J_0(kr)}{J_0(ka)} - 1 \right] r dr$$

$$\bar{y}(t) = \frac{P}{k^2 \mathcal{J}} \frac{J_2(ka)}{J_0(ka)} e^{i\omega t} = \frac{Pa^2}{8\mathcal{J}} \frac{8}{(ka)^2} \frac{J_2(ka)}{J_0(ka)} e^{i\omega t}, \quad \left[\frac{Pa^2}{\mathcal{J}} \right] = \text{طول}$$

$$\frac{\bar{y}_{\text{amp}}}{Pa^2/8\mathcal{J}} = \frac{8}{(ka)^2} \frac{J_2(ka)}{J_0(ka)}$$

حالت حدی: برای فرکانس‌های پایین که در آنها $ka \ll 1$ است.

$$J_0(ka) \approx 1 - \frac{(ka)^2}{4}, \quad J_2(ka) \approx \frac{(ka)^2}{8} \left[1 - \frac{(ka)^2}{12} \right]$$

$$\frac{J_2(ka)}{J_0(ka)} \approx \frac{(ka)^2}{8} \left[1 - \frac{(ka)^2}{12} \right] \left[1 - \frac{(ka)^2}{4} \right]^{-1}$$

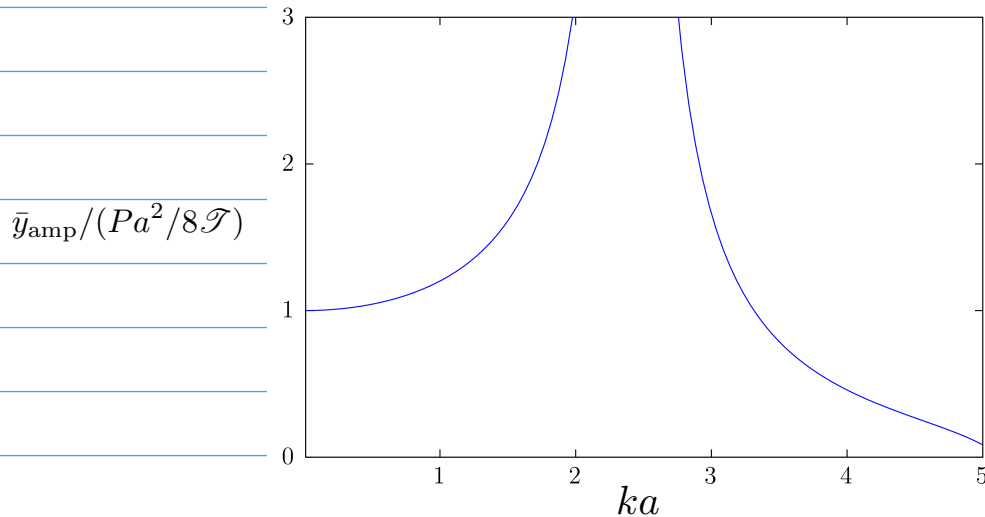
$$\frac{J_2(ka)}{J_0(ka)} \approx \frac{(ka)^2}{8} \left[1 - \frac{(ka)^2}{12} \right] \left[1 + \frac{(ka)^2}{4} \right] \approx \frac{(ka)^2}{8} \left[1 + \frac{(ka)^2}{6} \right]$$

$$\bar{y}(t) \approx \frac{Pa^2}{8\mathcal{J}} \left[1 + \frac{(ka)^2}{6} \right] e^{i\omega t}$$

$$\text{اگر } ka < 1 \Rightarrow \frac{\omega a}{c} < 1 \Rightarrow \frac{2\pi f a}{c} < 1$$

$$f < \frac{1}{2\pi a} \sqrt{\frac{\mathcal{J}}{\sigma}}$$

در محدوده‌ی فرکانسی بالا اشکالی از لحاظ روزنانس پیش نمی‌آید



$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial r} \right) - 2\beta \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{P}{\sigma} e^{i\omega t}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial y}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial r} \right) + \frac{P}{\sigma} e^{i\omega t}$$

$$y(r, t) = R(r) e^{i\omega t}$$

$$-(\omega^2 - 2i\beta\omega) R e^{i\omega t} = c^2 \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) e^{i\omega t} + \frac{P}{\sigma} e^{i\omega t}$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \mathbf{k}^2 R = -\frac{P}{\mathcal{T}} \quad , \quad \mathbf{k}^2 = \frac{\omega^2 - 2i\beta\omega}{c^2}$$

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{2i\beta}{\omega} \right)^{1/2}$$

با فرض betaهای کوچک

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{i\beta}{\omega} \right) = k \left(1 - \frac{i\beta}{\omega} \right)$$

$$y(r, t) = \frac{P}{\mathbf{k}^2 \mathcal{T}} \left[\frac{J_0(\mathbf{k}r)}{J_0(\mathbf{k}a)} - 1 \right] e^{i\omega t}$$

$$\bar{y}(t) = \frac{P}{\mathbf{k}^2 \mathcal{T}} \frac{J_2(\mathbf{k}a)}{J_0(\mathbf{k}a)} e^{i\omega t} = \frac{Pa^2}{\mathcal{T}} \frac{1}{(\mathbf{k}a)^2} \frac{J_2(\mathbf{k}a)}{J_0(\mathbf{k}a)} e^{i\omega t}$$

ارتعاشهای آزاد نامتقارن در پوسته گرد

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} \right)$$

$$y = y(r, \theta, t)$$

$$y(r, \theta, t) = R(r)\Theta(\theta)e^{i\omega t}$$

$$-\omega^2 = c^2 \left[\frac{1}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} \right]$$

$$\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = -m^2 \Rightarrow \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + m^2 \Theta = 0$$

$$-k^2 = \frac{1}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) - \frac{m^2}{r^2}$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0$$

$$x = kr : \frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2} \right) R = 0$$

ارتعاشهای-پوسته‌ها و ورقه‌ها-گروه فیزیک دانشگاه قم-محمدرضا مظفری

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + m^2\Theta = 0 \quad , \quad \Theta(\theta) = e^{im\theta}$$

شرایط دوره‌ای $y(r, \theta, t) = y(r, \theta + 2\pi, t) : \Theta(\theta) = \Theta(2\pi + \theta)$

$$e^{i2\pi m} = 1 \Rightarrow m = 0, 1, 2, \dots$$

$$x = kr : \frac{d^2R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right)R = 0$$

$$R_m(r) = J_m(kr)$$

شرایط مرزی $y(r = a, \theta, t) = 0 : J_m(ka) = 0$

$$m = 0 : ka = 2.405, 5.520, 8.654, 11.792, \dots$$

$$m = 1 : ka = 3.832, 7.016, 10.173, 13.324, \dots$$

$$m = 2 : ka = 5.136, 8.417, 11.620, 14.796, \dots$$

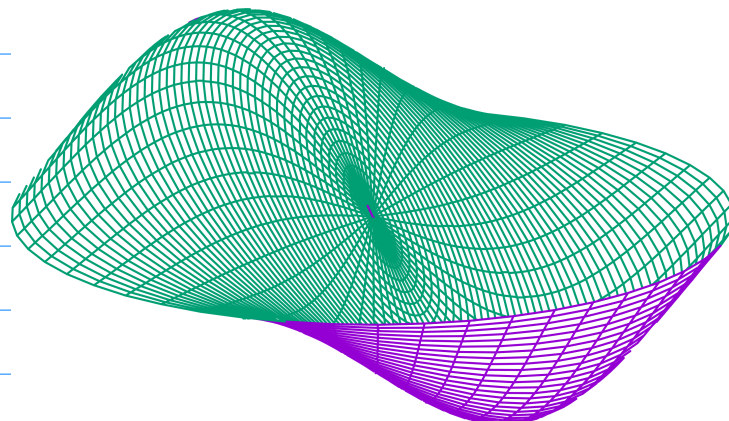
$\vdots$

$$y_{mn}(r, \theta, t) = A_{mn} J_m(k_{mn}r) e^{im\theta} e^{i\omega_{mn}t}$$

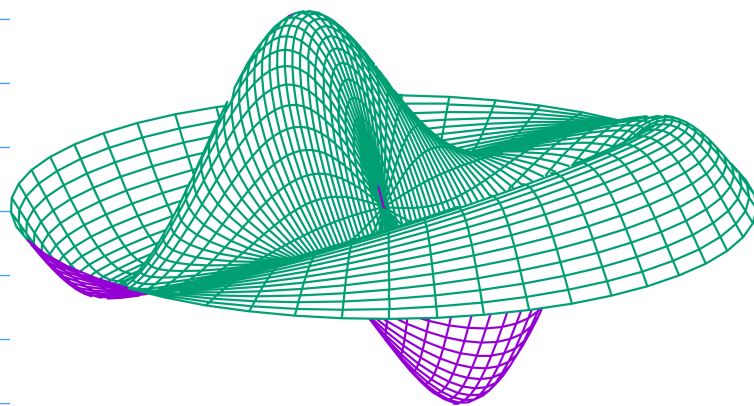
A_{mn} ضریب مختلط است که $\omega_{mn} = ck_{mn}$

$$y_{mn}(r, \theta, t) = a_{mn} J_m(k_{mn}r) \cos(m\theta + \alpha_{mn}) \cos(\omega_{mn}t + \phi_{mn})$$

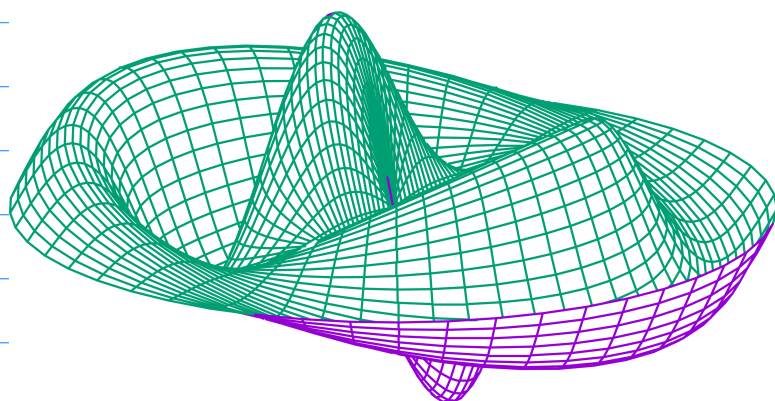
a_{mn} ضریب حقیقی است



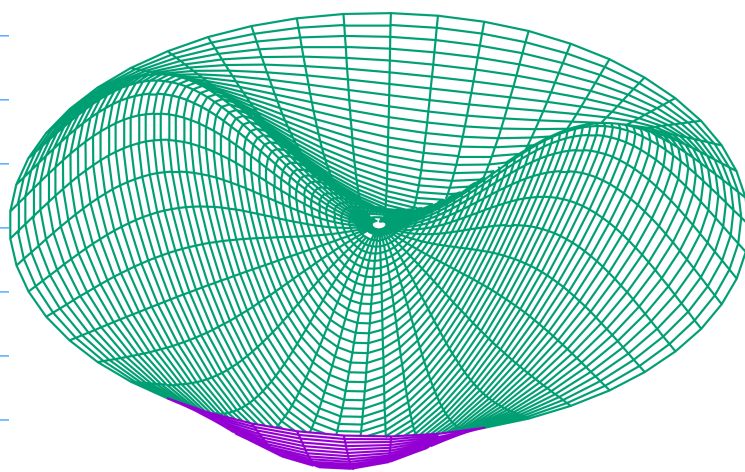
$(m, n) = (1, 1)$
 $ka = 3.832$



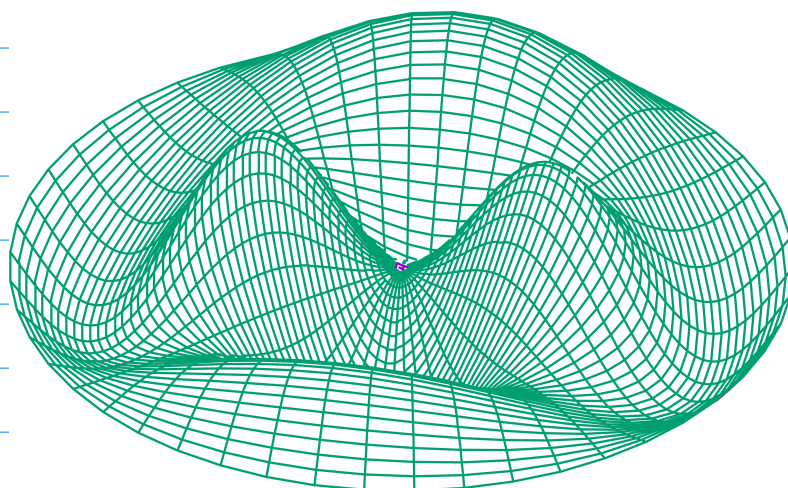
$$(m, n) = (1, 2)$$
$$ka = 7.016$$



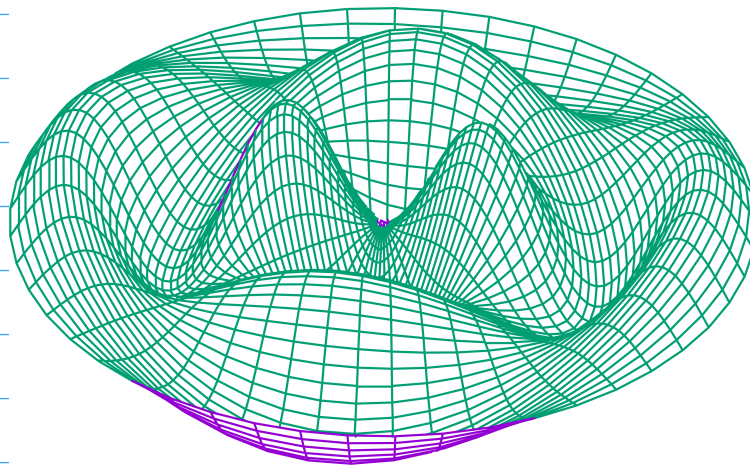
$$(m, n) = (1, 3)$$
$$ka = 10.173$$



$$(m, n) = (2, 1)$$
$$ka = 5.136$$



$$(m, n) = (2, 2)$$
$$ka = 8.417$$



$$(m, n) = (2, 3)$$

$$ka = 11.620$$

ارتعاش ورق های نازک

فرق اساسی ارتعاشهای پیوسته و ورق نازک در این است که نیروی بازگرداننده بر پیوسته از کشش وارد به اطراف آن ایجاد می‌شود در صورتیکه در ورق نازک این نیرو در اثر سختی جنس ورقه پدیدار می‌گردد برای ارتعاش‌های متقارن ، معادله موج عرضی ورق نازک گرد بصورت زیر داده می‌شود

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{\kappa^2 Y}{\rho(1 - \sigma^2)} \nabla^4 y$$

$$\sigma = \frac{\text{تراکم عرضی ورق}}{\text{انبساط طولی ورق}}$$

ρ : چگالی حجمی κ : شعاع ژیراسیون

Y : مدول ینگ

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = \text{انبساط طولی ورق} \quad \text{تراکم عرضی ورق} = -\frac{\partial \zeta}{\partial z}$$

< ضریب $\frac{\kappa^2 Y}{\rho(1 - \sigma^2)}$ مشابه ضریب ارتعاش عرضی میله $\frac{\kappa^2 Y}{\rho}$ است.
 < اما ارتعاشات عرضی میله و ارتعاشات عرضی ورق نازک رفتار یکسانی ندارند.
 < هر انبساط طولی ورق با تراکم عرضی ورق همراه است و بالعکس. این پدیده سبب افزایش سختی ورق می‌شود.

< با انبساط طولی مثبت، تراکم عرضی مثبت است و نسبت پواسون پیوسته عددی مثبت است.
 < مقدار عددی نسبت پواسون تقریباً برابر 0.3 است.

ارتعاشات هارمونیک ساده

جواب پیشنهادی $y(r, t) = R(r)e^{i\omega t}$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{\kappa^2 Y}{\rho(1-\sigma^2)} \nabla^4 y$$

$$-\omega^2 R = -\frac{\kappa^2 Y}{\rho(1-\sigma^2)} \nabla^4 R \Rightarrow \nabla^4 R = \frac{\omega^2 \rho(1-\sigma)}{\kappa^2 Y} R$$

اگر $K^4 = \frac{\omega^2 \rho(1-\sigma)}{\kappa^2 Y}$ یا $\omega = \kappa K^2 \sqrt{\frac{Y}{\rho(1-\sigma)}}$

$$\nabla^4 R = K^4 R \Rightarrow (\nabla^4 - K^4)R = 0$$

$$(\nabla^2 - K^2)(\nabla^2 + K^2)R = 0$$

$$(\nabla^2 - K^2)R = 0 \quad \text{or} \quad (\nabla^2 + K^2)R = 0$$

$$(\nabla^2 - K^2)R = 0 : \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + K^2 R = 0 \Rightarrow R(r) = J_0(Kr)$$

$$(\nabla^2 + K^2)R = 0 : \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - K^2 R = 0 \Rightarrow R(r) = I_0(Kr)$$

بنابراین

$$y(r, t) = R(r)e^{i\omega t} = [AJ_0(Kr) + BI_0(Kr)]e^{i\omega t}$$

شرایط مرزی

$$y(r = a, t) = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial r}(r = a, t) = 0$$

$$y(r = a, t) = 0 : AJ_0(Ka) + BI_0(Ka) = 0 \Rightarrow B = -A \frac{J_0(Ka)}{I_0(Ka)}$$

$$y(r, t) = A \left[J_0(Kr) - \frac{J_0(Ka)}{I_0(Ka)} I_0(Kr) \right] e^{i\omega t}$$

معادله دیفرانسیل بسل اصلاح شده

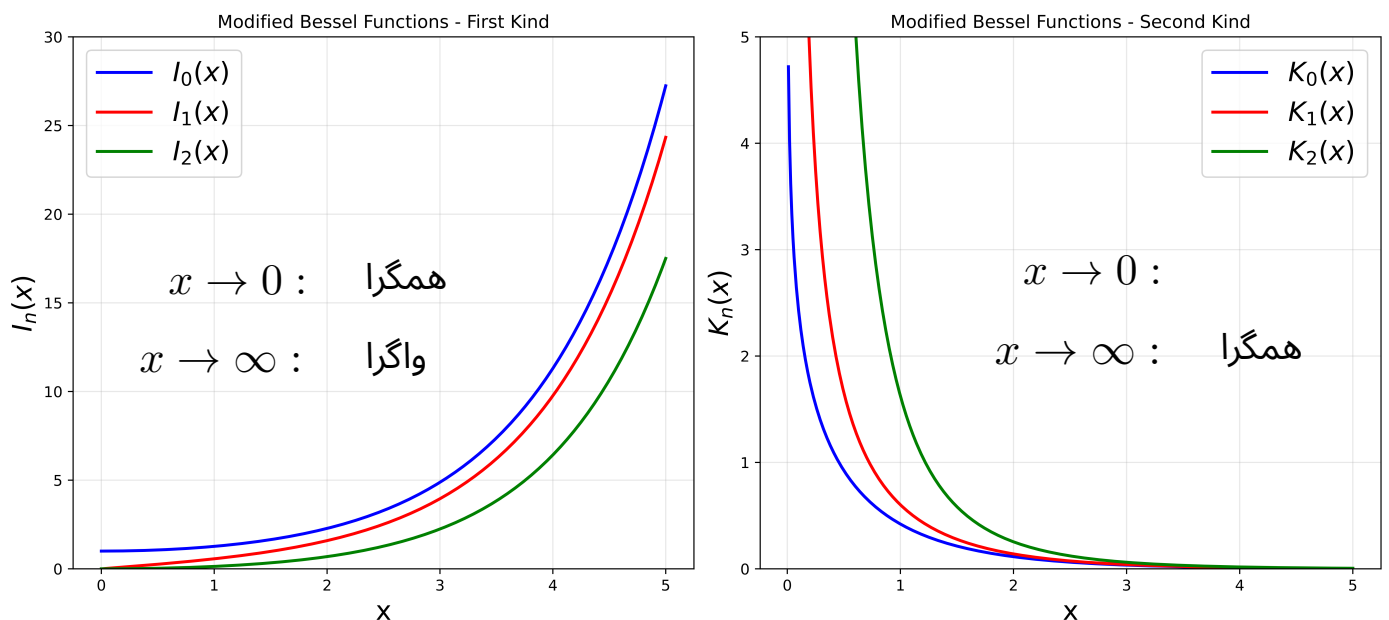
$$\frac{d^2 \mathcal{Y}}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\mathcal{Y}}{dx} - \left(1 + \frac{m^2}{x^2}\right) \mathcal{Y} = 0$$

< متغیر x یک مقدار موهومی است.

< ارتباط بسل اصلاح شده نوع اول و نوع دوم

$$m : \mathcal{Y}(x) = I_m(x)$$

$$m : \mathcal{Y}(x) = K_m(x)$$



رابطه بین بسل اصلاح شده نوع اول و بسل نوع اول $I_m(x) = i^{-m} J_m(x)$

رابطه بین بسل اصلاح شده نوع دوم و بسل نوع دوم $K_m(x) = \frac{\pi}{2} i^{m+1} [J_m(ix) + iY_m(ix)]$

روابط بازگشتی

$$I_{n-1}(x) - I_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} I_n(x)$$

$$K_{n-1}(x) - K_{n+1}(x) = -\frac{2n}{x} K_n(x)$$

معادله دیفرانسیل بسل اصلاح شده

مشتقات

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} I_0(x) &= I_1(x) \\ \frac{d}{dx} K_0(x) &= -K_1(x) \\ \frac{d}{dx} I_n(x) &= \frac{1}{2} [I_{n-1}(x) + I_{n+1}(x)] \\ \frac{d}{dx} K_n(x) &= -\frac{1}{2} [K_{n-1}(x) + K_{n+1}(x)]\end{aligned}$$

انتگرال‌های مفید

$$\begin{aligned}\int x I_0(x) dx &= x I_1(x) \\ \int I_1(x) dx &= I_0(x) \\ \int x I_1(x) dx &= x I_0(x) - \int I_0(x) dx\end{aligned}$$

شرایط مرزی

$$y(r, t) = A \left[J_0(Kr) - \frac{J_0(Ka)}{I_0(Ka)} I_0(Kr) \right] e^{i\omega t}$$

$$\frac{\partial y}{\partial r}(r = a, t) = 0 : -K J_1(Ka) - K \frac{J_0(Ka)}{I_0(Ka)} I_1(Ka) = 0$$

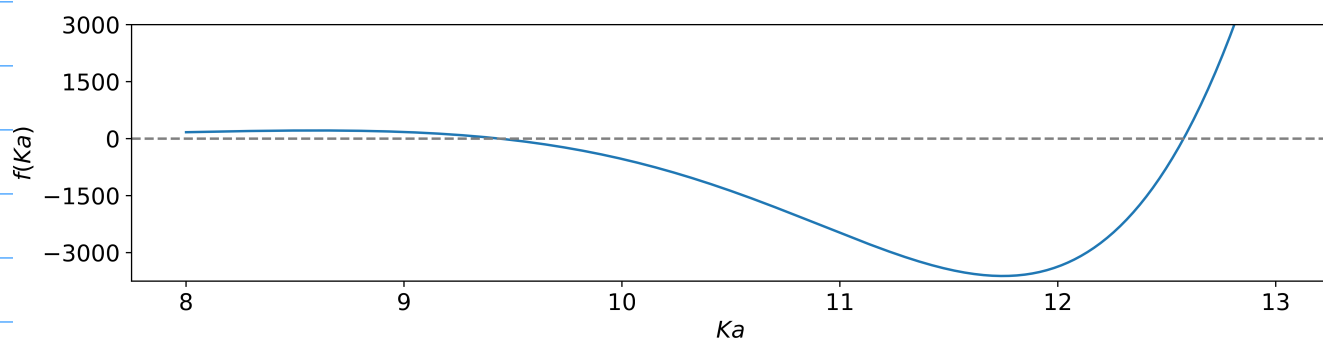
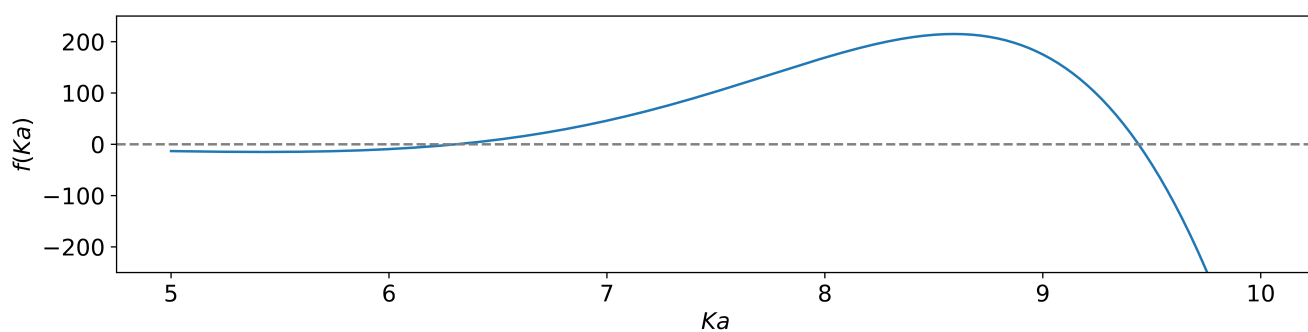
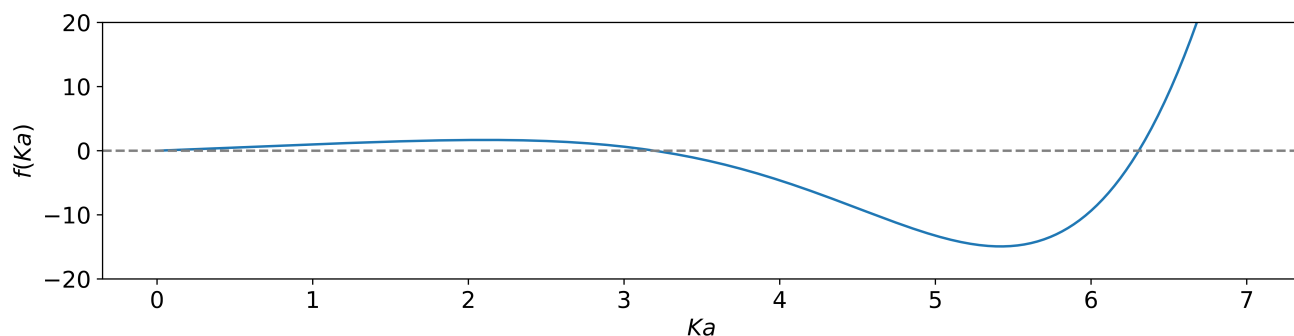
$$\frac{J_0(Ka)}{J_1(Ka)} = -\frac{I_0(Ka)}{I_1(Ka)}$$

مقدار Ka ، بصورت عددی، از رابطه بالا برای فرکانس‌های مختلف بدست می‌آید.

$$K_n a = 3.20, 6.30, 9.44, 12.57, \dots$$

نقاط گره (Kaها) در بازه‌های مختلف

$$f(Ka) = J_0(Ka)I_1(Ka) + J_1(Ka)I_0(Ka)$$



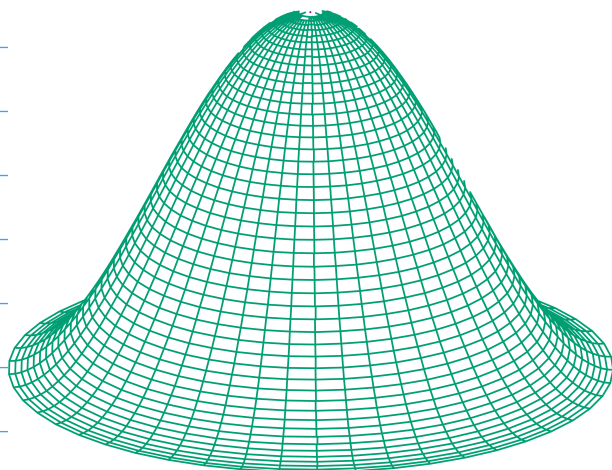
$$\omega_n = \kappa K_n^2 \sqrt{\frac{Y}{\rho(1-\sigma)}} = (K_n a)^2 \left[\kappa a^2 \sqrt{\frac{Y}{\rho(1-\sigma)}} \right]$$

$$y_n(r, t) = A_n \left[J_0(K_n r) - \frac{J_0(K_n a)}{I_0(K_n a)} I_0(K_n r) \right] e^{i\omega_n t}$$

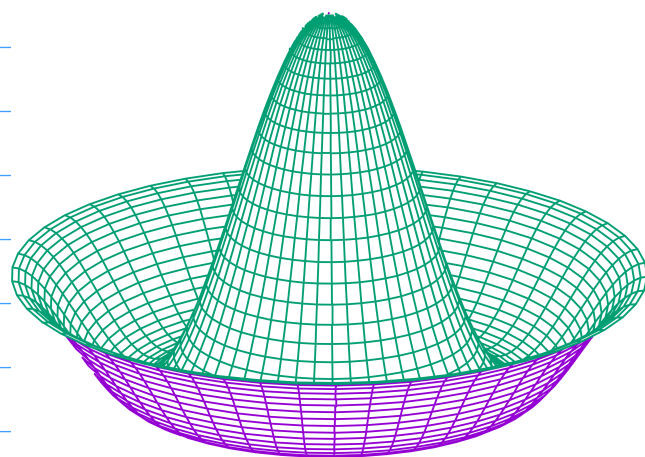
A_n ضریب مختلط است

$$y_n(r, t) = A_n \cos(\omega_n t + \phi_n) \left[J_0(K_n r) - \frac{J_0(K_n a)}{I_0(K_n a)} I_0(K_n r) \right]$$

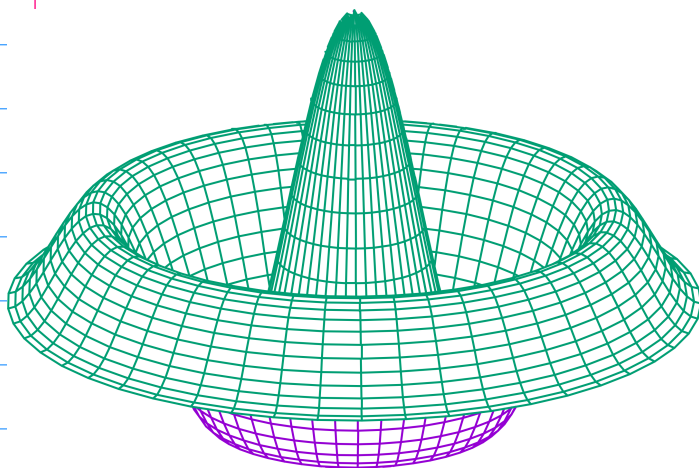
A_n ضریب حقیقی است



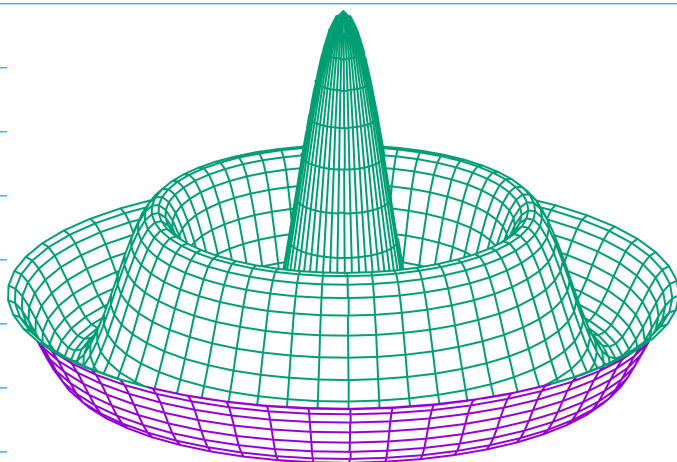
$$K_1 a = 3.20$$



$$K_2 a = 6.30$$



$$K_3 a = 9.44$$



$$K_4 a = 12.57$$

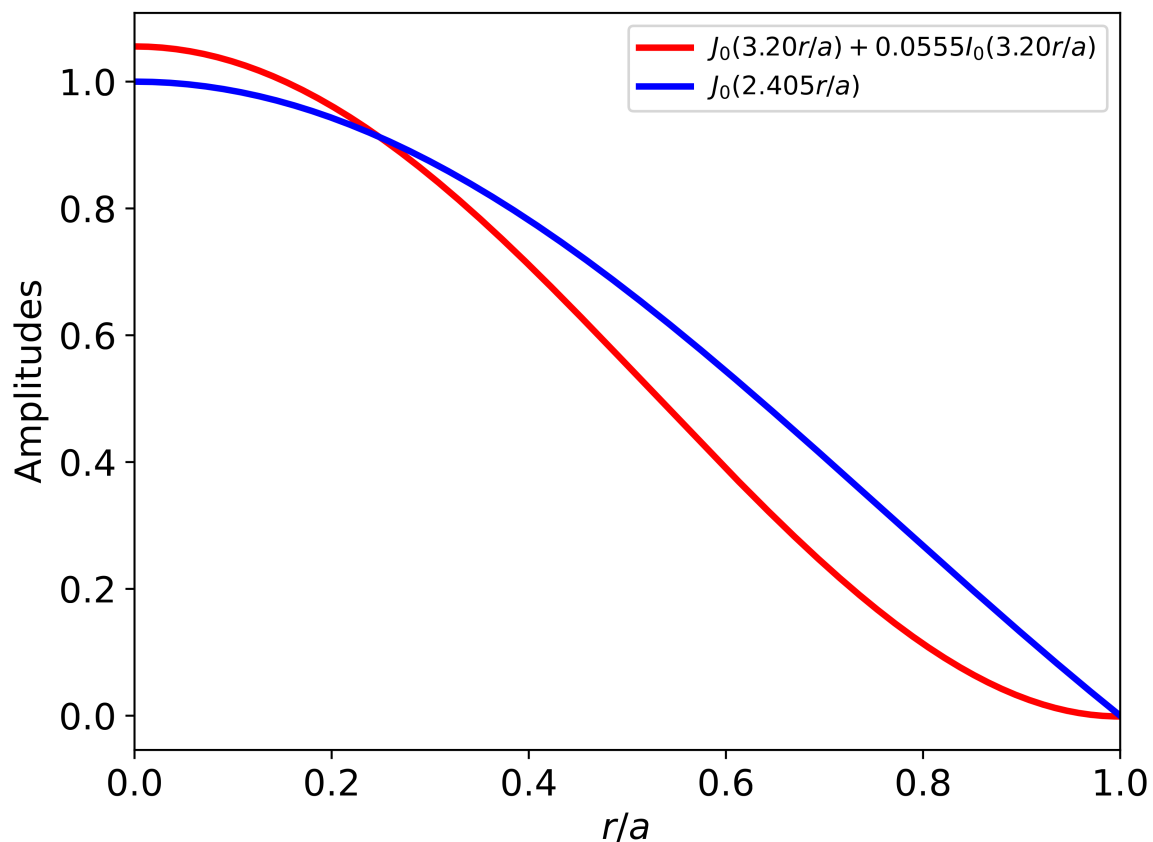
تغییر مکان ورق نازک گرد در مد اصلی

$$y_1(r, t) = A_n \cos(\omega_1 t + \phi_1) \left[J_0(K_1 r) - \frac{J_0(K_1 a)}{I_0(K_1 a)} I_0(K_1 r) \right]$$

$$K_1 a = 3.20 : \frac{J_0(K_1 a)}{I_0(K_1 a)} = -0.0555$$

$$\text{دامنه مد اصلی ورق نازک گرد} = J_0(3.20r/a) + 0.0555 I_0(3.20r/a)$$

$$\text{دامنه مد اصلی پوسته گرد} = J_0(2.405r/a)$$



بطور نسبی، تغییر مکان ورق نازک گرد از تغییر مکان پوسته گرد با شعاع مشابه کوچکتر است.

$$\begin{aligned} \text{متوسط دامنه ارتعاش ورق نازک گرد} &= \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a [J_0(3.20r/a) + 0.0555I_0(3.20r/a)] 2\pi r dr \\ &= 2 \int_0^1 [J_0(3.20x) + 0.0555I_0(x)] x dx \\ &= \frac{2}{3.20} [J_1(3.20) + 0.0555I_1(3.20)] = 0.309 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{متوسط دامنه ارتعاش پوسته گرد} &= \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a J_0(2.405r/a) 2\pi r dr \\ &= 2 \int_0^1 J_0(2.405x) x dx \\ &= \frac{2}{2.405} J_1(2.405) = 0.432 \end{aligned}$$