

هوالعلیم  
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم  
ریاضی فیزیک ۱  
پاییز ۱۴۰۳

---

(۱) نشان دهید اگر  $\vec{A} + \vec{B}$  و  $\vec{A} - \vec{B}$  معلوم باشد چگونه می‌توان  $\vec{A}$  و  $\vec{B}$  را بدست آورد.

(۲) بردار  $\vec{A}$  که بزرگی آن برابر ۲ است با محورهای مختصات زاویه‌های مساوی می‌سازد، مولفه‌های  $A_x$ ،  $A_y$  و  $A_z$  و برداریکه متناسب به این بردار ( $\vec{A}$ ) را پیدا کنید.

(۳) مولفه‌های بردار یکه‌ای واقع در صفحه‌ی  $xy$  را محاسبه کنید که با جهت‌های مثبت محورهای  $x$  و  $y$  زاویه‌ی مساوی می‌سازد.

(۴) سرعت قایق بادبانی  $A$  نسبت به قایق بادبانی  $B$ ، برابر  $\vec{v}_{\text{نسبی}}$  است که از معادله  $\vec{v}_{\text{نسبی}} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$  بدست می‌آید.  $\vec{v}_A$  سرعت قایق  $A$  و  $\vec{v}_B$  سرعت قایق  $B$  است. اگر

$$\begin{cases} \vec{v}_A = 30 \text{ km/hr} & \text{بطرف شرق} \\ \vec{v}_B = 40 \text{ km/hr} & \text{بطرف شمال} \end{cases}$$

سرعت  $A$  نسبت به  $B$  را پیدا کنید.

(۵) هر معادله برداری را می‌توان بصورت  $\vec{A} = \vec{B}$  خلاصه کرد. به کمک این رابطه نشان دهید که معادله برداری هم‌ارز با سه معادله اسکالر است. اگر قانون دوم نیوتن بصورت یک معادله برداری صادق باشد، نتیجه می‌گیریم که  $a_x$  فقط به  $F_x$  بستگی دارد و از  $F_y$  و  $F_z$  مستقل است.

(۶) مثلثی توسط نوکهای سه بردار  $\vec{A}$ ،  $\vec{B}$  و  $\vec{C}$  که ابتدا از مبدا کشیده می‌شوند تعریف شده است. نشان دهید که مجموع برداری اضلاع متوالی این مثلث  $(\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA})$  صفر است.

(۷) رئوس  $A$ ،  $B$  و  $C$  یک مثلث به ترتیب با نقاط  $(-1, 0, 2)$ ،  $(0, 1, 0)$  و  $(1, -1, 0)$  مشخص می‌شوند. نقطه‌ی  $D$  را چنان بیابید که شکل  $ABCD$  یک متوازی‌الاضلاع مسطح باشد. جواب  $(0, -2, 2)$  یا  $(2, 0, -2)$

(۸) مرکز کره‌ای به شعاع  $a$  در نقطه‌ی  $\vec{r}_1$  واقع شده است. الف) معادله برداری و ب) معادله جبری کره را بنویسید.

(۹) قانون هابل-هابل پی برد که کهکشان‌های دور با سرعتی متناسب با فاصله‌ی آنها از مکان ما در

زمین دور می‌شوند. برای کهکشان  $i$  ام داریم

$$\vec{v}_i = H_0 \vec{r}_i$$

که مکان خودمان را در زمین مبدا مختصات گرفته‌ایم. نشان دهید که اگر کهکشان دیگری بعنوان مبدا در نظر بگیریم، قانون هابل برقرار است.

(۱۰) از رودخانه‌ای به عرض ۲۰۰ متر، آب با سرعت ثابت ۲ متر بر ثانیه بطرف غرب جریان دارد. قایقی با سرعت ۸ متر بر ثانیه نسبت به آب، ساحل جنوبی را ترک می‌کند و در جهت ۳۰ درجه شمال شرقی حرکت می‌کند. الف) اندازه و جهت سرعت قایق نسبت به زمین را بدست آورید. ب) چقدر طول می‌کشد تا قایق عرض رودخانه را طی کند؟

(۱۱) ناوردایی میدانهای برداری زیر را تحت چرخشهای داده شده بررسی کنید: الف)  $(x-y, x+y, 0)$  برای چرخش حول محور  $z$ ، ب)  $(0, 2z+y, z-2y)$  برای چرخش حول محور  $x$  و  $(y^2+z^2, -xy, -xz)$  برای چرخش حول هر یک از سه محور مختصات.

(۱۲) ناوردایی میدانهای برداری  $(xyc_x + y^2c_y, -xyc_y - x^2c_x, 0)$  را برای چرخش حول محور  $z$  بررسی کنید. کمیت‌های  $c_x$  و  $c_y$  مولفه‌های یک بردار ثابت هستند.

(۱۳) اگر  $\vec{A}$  برداری ثابت (هم از نظر اندازه و هم از نظر جهت) و  $\vec{r}$  برداری از مبدا مختصات تا نقطه‌ی  $(x, y, z)$  باشد، رابطه  $(\vec{r}-\vec{A}) \cdot \vec{A} = 0$  مکان هندسی چه نقاطی از فضا است؟ و توصیف هندسی  $\vec{A}$  چیست؟

(۱۴) بردار مکان  $\vec{r} = \hat{e}_1x_1 + \hat{e}_2x_2 + \hat{e}_3x_3$  تحت چرخش به اندازه  $\theta$  حول محور  $x_3$  بصورت

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta \\ x'_2 = -x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta \\ x'_3 = x_3 \end{cases}$$

تغییر می‌کند که می‌توان آنرا در حالت کلی به فرم فشرده

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, 3$$

نمایش داد که  $a_{ij}$  کسینوس زاویه بین جهت مثبت  $x'_i$  و جهت مثبت  $x_j$  است  $(= \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = \cos(x'_i, x_j))$  اتحاد  $(\frac{\partial x_j}{\partial x'_i})$

$$\sum_i a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk}$$

که بعنوان شرط تعامد شناخته می‌شود را با این فرض که طول بردارها در هر دو دستگاه با یکدیگر برابرند (یعنی  $L' = L$ )، بدست آورید ( $\delta_{jk}$  تابع دلتای کرونکر است).

(۱۵) فاصله نقطه‌ی  $p(x, y, z)$  را از خط

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

بدست آورید (از تعریف ضرب خارجی بردارها استفاده کنید).

(۱۶) فاصله نقطه‌ی  $p(x, y, z)$  را از صفحه

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

بدست آورید (از تعریف ضرب داخلی بردارها استفاده کنید).

(۱۷) نمایش فشرده ضرب داخلی دو بردار  $\vec{A} = \hat{e}_1 A_1 + \hat{e}_2 A_2 + \hat{e}_3 A_3$  و  $\vec{B} = \hat{e}_1 B_1 + \hat{e}_2 B_2 + \hat{e}_3 B_3$  بصورت

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_i \hat{e}_i A_i \cdot \sum_j \hat{e}_j B_j = \sum_{i,j} A_i B_j \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j$$

داده می‌شود. با استفاده از تابع دلتای کرونکر حاصلضرب داخلی بردارهای یکه برابر دلتای کرونکر است ( $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$ ). بدین ترتیب  $\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{i,j} A_i B_j \delta_{ij}$  نشان دهید

$$\sum_{i,j} A_i B_j \delta_{ij} = \sum_i A_i B_i$$

(۱۸) نمایش فشرده ضرب خارجی دو بردار  $\vec{A} = \hat{e}_1 A_1 + \hat{e}_2 A_2 + \hat{e}_3 A_3$  و  $\vec{B} = \hat{e}_1 B_1 + \hat{e}_2 B_2 + \hat{e}_3 B_3$  بصورت

$$\vec{A} \times \vec{B} = \sum_i \hat{e}_i A_i \cdot \sum_j \hat{e}_j B_j = \sum_{i,j} A_i B_j \hat{e}_i \times \hat{e}_j$$

داده می‌شود. با استفاده از نماد لوی چی ویتا حاصلضرب خارجی بردارهای یکه برابر است با  $\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \sum_k \epsilon_{ijk} \hat{e}_k$  نشان دهید

$$(\vec{A} \times \vec{B})_k = \sum_{ij} A_i B_j \epsilon_{ijk}$$

(۱۹) اتحادهای زیر را بدست آورید

$$\sum_{ij} \epsilon_{ijk} \delta_{ij} = 0, \quad \sum_{i,j} \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}, \quad \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijk} = 6$$

(۲۰) برقراری اتحاد

$$\sum_k \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$$

را بررسی کنید و بوسیله آن رابطه

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$$

را بدست آورید

(۲۱) بردار  $\vec{A}$  را می‌توان به دو بردار شعاعی  $\vec{A}_r$  و مماسی  $\vec{A}_t$  تجزیه کرد. اگر  $\hat{r}$  بردار یکه در امتداد شعاعی باشد، نشان دهید

$$\begin{aligned}\vec{A}_r &= \hat{r}(\vec{A} \cdot \hat{r}) \\ \vec{A}_t &= \hat{r} \times (\vec{A} \times \hat{r}).\end{aligned}$$

(۲۲) بردار نا معلوم  $\vec{X}$  روابط زیر که شامل کمیت‌های معلوم  $\vec{A}$ ،  $\vec{B}$  و  $\phi$  اند را برآورده می‌کند

$$\vec{A} \times \vec{X} = \vec{B}, \quad \vec{A} \cdot \vec{X} = \phi$$

بردار  $\vec{X}$  را برحسب کمیت‌های معلوم  $\vec{A}$ ،  $\vec{B}$  و  $\phi$  و اندازه بردار  $\vec{A}$  بدست آورید.

مظفری