هوالعلیم

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

ریاضی فیزیک ۱

پاییز ۱۴۰۳

---

۱) نشان دهید اگر $\vec{A}+\vec{B}$ و $\vec{A}-\vec{B}$ معلوم باشد چگونه می‌توان $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را بدست آورد.

$$\vec{A}=\frac{1}{2}(\vec{A}+\vec{B})+\frac{1}{2}(\vec{A}-\vec{B})$$
$$\vec{B}=\frac{1}{2}(\vec{A}+\vec{B})-\frac{1}{2}(\vec{A}-\vec{B})$$

۲) بردار $\vec{A}$ که بزرگی آن برابر ۲ است با محورهای مختصات زاویه‌های مساوی می‌سازد، مولفه‌های A_x، A_y و A_z و برداریکه منتسب به این بردار ($\hat{A}$) را پیدا کنید.

از تعریف کسینوسهای هادی داریم

$$\cos\alpha=\frac{A_x}{A},\qquad \cos\beta=\frac{A_y}{A},\qquad \cos\gamma=\frac{A_z}{A}$$

اگر $\alpha=\beta=\gamma$، بنابراین

$$\frac{A_x}{A}=\frac{A_y}{A}=\frac{A_z}{A}\Rightarrow A_x=A_y=A_z$$

با استفاده از فرض $A=|\vec{A}|=2$

$$A_x^2+A_y^2+A_z^2=4\Rightarrow 3A_x^2=4\Rightarrow A_x=A_y=A_z=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$
$$\hat{A}=\frac{\vec{A}}{A}=\frac{\sqrt{3}}{3}(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$$

۳) مثلثی توسط نوکهای سه بردار $\vec{A}$، $\vec{B}$ و $\vec{C}$ که ابتدا از مبدا کشیده می‌شوند تعریف شده است. نشان دهید که مجموع برداری اضلاع متوالی این مثلث ($\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CA}$) صفر است.

$$\triangle OAB:\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$
$$\triangle OBC:\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$$
$$\triangle OCA:\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})=0$$

۴) ناوردایی میدانهای برداری زیر را تحت چرخشهای داده شده بررسی کنید: **الف)** $(x-y, x+y, 0)$ برای چرخش حول محور z، **ب)** $(0, 2z+y, z-2y)$ برای چرخش حول محور x و $(y^2+z^2, -xy, -xz)$ برای چرخش حول هر یک از سه محور مختصات.

الف) تحت چرخش دستگاه مختصات حول محور z، بردار مکان وبردارهای یکه دستگاه مختصات بصورت زیر تبدیل می‌شوند

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \\ z' = z \end{cases} \tag{۱}$$

و

$$\begin{cases} \hat{i}' = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta \\ \hat{j}' = -\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta \\ \hat{k}' = \hat{k} \end{cases} \tag{۲}$$

انتظار داریم که هر میدان بردار دلخواه تحت دوران حول محور z بصورت

$$\begin{cases} A'_x = A_x\cos\theta + A_y\sin\theta \\ A'_y = -A_x\sin\theta + A_y\cos\theta A'_z = A_z \end{cases}$$

باشد. بدین ترتیب

$$\begin{cases} x' - y' = (x-y)\cos\theta + (x+y)\sin\theta \\ x' + y' = -(x-y)\sin\theta + (x+y)\cos\theta \end{cases}$$

بردار $(x'-y', x'+y', 0)$ در دستگاه پریم‌دار بصورت

$$\vec{A}' = \hat{i}'(x'-y') + \hat{j}'(x'+y') \tag{۳}$$

نمایش داده می‌شود. با جایگزین کردن رابطه (۲) در (۳) داریم

$$\begin{aligned} \vec{A}' &= (\hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta)(x'-y') + (-\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta)(x'+y') \\ &= \hat{i}((x'-y')\cos\theta - (x'+y')\sin\theta) + \hat{j}((x'-y')\sin\theta + (x'+y')\cos\theta) \end{aligned}$$

به کمک رابطه (۱)

$$
\begin{aligned}
&(x'-y')\cos\theta-(x'+y')\sin\theta\\
&=(x\cos\theta+y\sin\theta+x\sin\theta-y\cos\theta)\cos\theta-(x\cos\theta+y\sin\theta-x\sin\theta+y\cos\theta)\sin\theta\\
&=x-y=A_x
\end{aligned}
$$

و

$$
\begin{aligned}
&(x'-y')\sin\theta+(x'+y')\cos\theta\\
&=(x\cos\theta+y\sin\theta+x\sin\theta-y\cos\theta)\sin\theta+(x\cos\theta+y\sin\theta-x\sin\theta+y\cos\theta)\cos\theta\\
&=x+y=A_y
\end{aligned}
$$

بنابراین $\vec{A}'=\vec{A}$ پس $|\vec{A}'|=|\vec{A}|$.

ب) تحت چرخش دستگاه مختصات حول محور x، بردار مکان وبردارهای یکه دستگاه مختصات بصورت زیر تبدیل می‌شوند

$$
\begin{cases}
x^{'}=x\\
y^{'}=y\cos\theta+z\sin\theta\\
z^{'}=-y\sin\theta+z\cos\theta
\end{cases}
\tag{۴}
$$

و

$$
\begin{cases}
\hat{i}'=\hat{i}\\
\hat{j}'=\hat{j}\cos\theta+\hat{k}\sin\theta\\
\hat{k}'=-\hat{j}\sin\theta+\hat{k}\cos\theta
\end{cases}
\tag{۵}
$$

انتظار داریم که هر میدان بردار دلخواه تحت دوران حول محور x بصورت

$$
\begin{cases}
A_x^{'}=A_x\\
A_y^{'}=A_y\cos\theta+A_z\sin\theta\\
A_z^{'}=-A_y\sin\theta+A_z\cos\theta
\end{cases}
$$

باشد. بدین ترتیب

$$
\begin{cases}
2z^{'}+y^{'}=(2z+y)\cos\theta+(z-2y)\sin\theta\\
z^{'}-2y^{'}=-(2z+y)\sin\theta+(z-2y)\cos\theta
\end{cases}
$$

بردار $(0,2z'+y',2z'-y')$ در دستگاه پریم‌دار بصورت

$$
\vec{A}'=\hat{j}'(2z'+y')+\hat{k}'(z'-2y')
\tag{۶}
$$

نمایش داده می‌شود. با جایگزین کردن رابطه (۸) در (۹) داریم

$$\begin{aligned}\vec{A'} &= (\hat{j}\cos\theta + \hat{k}\sin\theta)(2z' + y') + (-\hat{j}\sin\theta + \hat{k}\cos\theta)(z' - 2y') \\ &= \hat{j}((2z' + y')\cos\theta - (z' - 2y')\sin\theta) + \hat{k}((2z' + y')\sin\theta + (z' - 2y')\cos\theta)\end{aligned}$$

به کمک رابطه (۷)

$$\begin{aligned}&(2z' + y')\cos\theta - (z' - 2y')\sin\theta \\ &= (-2y\sin\theta + 2z\cos\theta + y\cos\theta + z\sin\theta)\cos\theta - (-y\sin\theta + z\cos\theta - 2y\cos\theta - 2z\sin\theta)\sin\theta \\ &= 2z + y = A_y\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}&(2z' + y')\sin\theta + (z' - 2y')\cos\theta \\ &= (-2y\sin\theta + 2z\cos\theta + y\cos\theta + z\sin\theta)\sin\theta + (-y\sin\theta + z\cos\theta - 2y\cos\theta - 2z\sin\theta)\cos\theta \\ &= z - 2y = A_z\end{aligned}$$

بنابراین $\vec{A'} = \vec{A}$ پس $|\vec{A'}| = |\vec{A}|$.

ج) تحت چرخش دستگاه مختصات حول محور x، بردار مکان وبردارهای یکه دستگاه مختصات بصورت زیر تبدیل می‌شوند

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y\cos\theta + z\sin\theta \\ z' = -y\sin\theta + z\cos\theta \end{cases} \tag{۷}$$

و

$$\begin{cases} \hat{i}' = \hat{i} \\ \hat{j}' = \hat{j}\cos\theta + \hat{k}\sin\theta \\ \hat{k}' = -\hat{j}\sin\theta + \hat{k}\cos\theta \end{cases} \tag{۸}$$

انتظار داریم که هر میدان بردار دلخواه تحت دوران حول محور x بصورت

$$\begin{cases} A'_x = A_x \\ A'_y = A_y\cos\theta + A_z\sin\theta \\ A'_z = -A_y\sin\theta + A_z\cos\theta \end{cases}$$

باشد. بدین ترتیب

$$\begin{cases} y'^2 + z'^2 = y^2 + z^2 \\ -x'y' = -x(y\cos\theta + z\sin\theta) \\ -x'z' = -x(-y\sin\theta + z\cos\theta) \end{cases}$$

بردار $(z'^2 + y'^2, -x'y', -x'z')$ در دستگاه پریم‌دار بصورت

$$\vec{A'} = \hat{i}'(z'^2 + y'^2) - \hat{j}'x'y' - \hat{k}'x'z' \tag{۹}$$

نمایش داده می‌شود. با جایگزین کردن رابطه (۸) در (۹) داریم

$$\begin{aligned} \vec{A'} &= \hat{i}(y'^2 + z'^2) - (\hat{j}\cos\theta + \hat{k}\sin\theta)x'y' - (-\hat{j}\sin\theta + \hat{k}\cos\theta)x'z' \\ &= \hat{i}(y'^2 + z'^2) + \hat{j}(-x'y'\cos\theta + x'z'\sin\theta) + \hat{k}(-x'y'\sin\theta - x'z'\cos\theta) \end{aligned}$$

به کمک رابطه (۷)

$$y'^2 + z'^2 = y^2 + z^2 = A_x$$

و

$$\begin{aligned} &-x'y'\cos\theta + x'z'\sin\theta \\ &= x(-(y\cos\theta + z\sin\theta)\cos\theta + (-y\sin\theta + z\cos\theta)\sin\theta) \\ &= -xy = A_y \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} &-x'y'\sin\theta - x'z'\cos\theta \\ &= x(-(y\cos\theta + z\sin\theta)\sin\theta - (-y\sin\theta + z\cos\theta)\cos\theta) \\ &= -xz = A_z \end{aligned}$$

بنابراین $\vec{A'} = \vec{A}$ پس $|\vec{A'}| = |\vec{A}|$.

تحت چرخش دستگاه مختصات حول محور z، بردار مکان وبردارهای یکه دستگاه مختصات بصورت زیر تبدیل می‌شوند

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \\ z' = z \end{cases} \tag{۱۰}$$

و

$$\begin{cases} \hat{i}' = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta \\ \hat{j}' = -\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta \\ \hat{k}' = \hat{k} \end{cases} \tag{۱۱}$$

انتظار داریم که هر میدان بردار دلخواه تحت دوران حول محور z بصورت

$$\begin{cases} A_x^{'} = A_x\cos\theta + A_y\sin\theta \\ A_y^{'} = -A_x\sin\theta + A_y\cos\theta \\ A_z^{'} = A_z \end{cases}$$

باشد. بدین ترتیب

$$\begin{cases} (y^{'2} + z^{'2}) = (y^2 + z^2)\cos\theta - xy\sin\theta \\ -x'y' = -(y^2 + z^2)\sin\theta - xy\cos\theta \\ -x'z' = -xz \end{cases}$$

بردار $(y^{'2} + z^{'2}, -x'y', -x'z')$ در دستگاه پریم‌دار بصورت

$$\vec{A}' = \hat{i}'(y^{'2} + z^{'2}) + \hat{j}'(-x'y') + \hat{k}'(-x'z') \tag{۱۲}$$

نمایش داده می‌شود. با جایگزین کردن رابطه (۱۴) در (۱۵) داریم

$$\begin{aligned} \vec{A}' &= (\hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta)(y^{'2} + z^{'2}) + (-\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta)(-x'y') + \hat{k}(-x'z') \\ &= \hat{i}((y^{'2} + z^{'2})\cos\theta + x'y'\sin\theta) + \hat{j}((y^{'2} + z'2)\sin\theta - x'y'\cos\theta) - \hat{k}x'z' \end{aligned}$$

به کمک رابطه (۱۳)

$$\begin{aligned} &(y^{'2} + z^{'2})\cos\theta + x'y'\sin\theta \\ &= ((-x\sin\theta + y\cos\theta)^2 + z^2)\cos\theta + (x\cos\theta + y\sin\theta)(-x\sin\theta + y\cos\theta)\sin\theta \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} &(y^{'2} + z^{'2})\sin\theta - x'y'\cos\theta \\ &= ((-x\sin\theta + y\cos\theta)^2 + z^2)\sin\theta - (x\cos\theta + y\sin\theta)(-x\sin\theta + y\cos\theta)\cos\theta \end{aligned}$$

و

$$-x'z' = -(x\cos\theta + y\sin\theta)z$$

بنابراین $|\vec{A}'| \neq |\vec{A}|$.

۵) ناوردایی میدانهای برداری $(xyc_x + y^2c_y, -xyc_y - x^2c_x, 0)$ را برای چرخش حول محور z بررسی کنید. کمیتهای c_x و c_y مولفه‌های یک بردار ثابت هستند.

تحت چرخش دستگاه مختصات حول محور z، بردار مکان وبردارهای یکه دستگاه مختصات و بردار $\vec{c}$ بصورت زیر تبدیل می‌شوند

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \\ z' = z \end{cases} , \qquad \begin{cases} c'_x = c_x\cos\theta + c_y\sin\theta \\ c'_y = -c_x\sin\theta + c_y\cos\theta \\ c'_z = c_z \end{cases} \tag{۱۳}$$

و

$$\begin{cases} \hat{i}' = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta \\ \hat{j}' = -\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta \\ \hat{k}' = \hat{k} \end{cases} \tag{۱۴}$$

انتظار داریم که هر میدان بردار دلخواه تحت دوران حول محور z بصورت

$$\begin{cases} A'_x = A_x\cos\theta + A_y\sin\theta \\ A'_y = -A_x\sin\theta + A_y\cos\theta \\ A'_z = A_z \end{cases}$$

باشد. بدین ترتیب

$$\begin{cases} (x'y'c'_x + y'^2c'_y) = (xyc_x + y^2c_y)\cos\theta - (xyc_y + x^2c_x)\sin\theta \\ (x'y'c'_y + x'^2c'_x) = (xyc_x + y^2c_y)\sin\theta + (xyc_y + x^2c_x)\cos\theta \end{cases}$$

بردار $(x'y'c'_x + y'^2c'_y, -x'y'c'_y - x'^2c'_x, 0)$ در دستگاه پریم‌دار بصورت

$$\vec{A'} = \hat{i}'(x'y'c'_x + y'^2c'_y) - \hat{j}'(x'y'c'_y + x'^2c'_x) \tag{۱۵}$$

نمایش داده می‌شود. با جایگزین کردن رابطه (۱۴) در (۱۵) داریم

$$\begin{aligned} \vec{A'} &= (\hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta)(x'y'c'_x + y'^2c'_y) - (-\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta)(x'y'c'_y + x'^2c'_x) \\ &= \hat{i}((x'y'c'_x + y'^2c'_y)\cos\theta + (x'y'c'_y + x'^2c'_x)\sin\theta) + \hat{j}((x'y'c'_x + y'^2c'_y)\sin\theta - (x'y'c'_y + x'^2c'_x)\cos\theta) \end{aligned}$$

به کمک رابطه (۱۳)

$$\begin{aligned}
&(x^{'}y^{'}c^{'}_x+y^{'2}c^{'}_y)\cos\theta+(x^{'}y^{'}c^{'}_y+x^{'2}c^{'}_x)\sin\theta\\
&=(x\cos\theta+y\sin\theta)(-x\sin\theta+y\cos\theta)(c_x\cos\theta+c_y\sin\theta)\cos\theta\\
&+(-x\sin\theta+y\cos\theta)^2(-c_x\sin\theta+c_y\cos\theta)\cos\theta\\
&+(x\cos\theta+y\sin\theta)(-x\sin\theta+y\cos\theta)(-c_x\sin\theta+c_y\cos\theta)\sin\theta\\
&+(x\cos\theta+y\sin\theta)^2(c_x\cos\theta+c_y\sin\theta)\sin\theta\\
&=xyc_x+y^2c_y=A_x
\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}
&(x^{'}y^{'}c^{'}_x+y^{'2}c^{'}_y)\sin\theta-(x^{'}y^{'}c^{'}_y+x^{'2}c^{'}_x)\cos\theta\\
&=(x\cos\theta+y\sin\theta)(-x\sin\theta+y\cos\theta)(c_x\cos\theta+c_y\sin\theta)\sin\theta\\
&+(-x\sin\theta+y\cos\theta)^2(-c_x\sin\theta+c_y\cos\theta)\sin\theta\\
&-(x\cos\theta+y\sin\theta)(-x\sin\theta+y\cos\theta)(-c_x\sin\theta+c_y\cos\theta)\cos\theta\\
&-(x\cos\theta+y\sin\theta)^2(c_x\cos\theta+c_y\sin\theta)\cos\theta\\
&=-(x^2c_x+xyc_y)=A_y
\end{aligned}$$

بنابراین $|\vec{A}|=|\vec{A}'|$.

۶) اگر $\vec{A}$ برداری ثابت(هم از نظر اندازه و هم از نظر جهت) و $\vec{r}$ برداری از مبدا مختصات تا نقطه‌ی (x,y,z) باشد، رابطه $(\vec{r}-\vec{A})\cdot\vec{A}=0$ مکان هندسی چه نقاطی از فضاست؟ و توصیف هندسی $\vec{A}$ چیست؟

$$(\vec{r}-\vec{A})\cdot\vec{A}=0\Rightarrow a_x(x-a_x)+a_y(y-a_y)+a_z(z-a_z)=0$$

معادله بالا، معادله یک صفحه‌ای را نشان می‌دهد که از نقطه (a_x,a_y,a_z) می‌گذرد و بردار عمود بر سطح آن $\vec{A}$ است.

۷) بردار مکان $\vec{r}=\hat{e}_1x_1+\hat{e}_2x_2+\hat{e}_3x_3$ تحت چرخش به اندازه θ حول محور x_3 بصورت

$$\begin{cases}x^{'}_1=x_1\cos\theta+x_2\sin\theta\\ x^{'}_2=-x_1\sin\theta+x_2\cos\theta\\ x^{'}_3=x_3\end{cases}$$

تغییر می‌کند که می‌توان آنرا در حالت کلی به فرم فشرده

$$x^{'}_i=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x_j,\qquad i=1,2,3$$

نمایش داد که a_{ij} کسینوس زاویه بین جهت مثبت x'_i و جهت مثبت x_j است($a_{ij} = \cos(x'_i, x_j) = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}$). اتحاد

$$\sum_i a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}$$

که بعنوان شرط تعامد شناخته می‌شود را با این فرض که طول بردارها در هر دو دستگاه با یکدیگر برابرند (یعنی $L' = L$)، بدست آورید(δ_{jk} تابع دلتای کرونکر است).

$$L'^2 = L^2 \Rightarrow \sum_i x_i'^2 = \sum_i x_i^2$$

$$L'^2 = \sum_i x_i'^2 = \sum_i x'_i x'_i = \sum_i \left(\sum_j a_{ij} x_j \right) \left(\sum_j a_{ik} x_k \right) = \sum_{j,k} \left(\sum_i a_{ij} a_{ik} \right) x_j x_k$$

$$\sum_i a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}$$

$$L'^2 = \sum_{j,k} \delta_{jk} x_j x_k = \sum_j x_j x_j = \sum_j x_j^2 = L^2$$

۸) فاصله نقطه‌ی $P(x, y, z)$ را از خط

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

بدست آورید(از تعریف ضرب خارجی بردارها استفاده کنید).

در معادله خط بالا، a, b, c مولفه‌های بردار هادی $\vec{v} = (a, b, c)$ و $Q(x_0, y_0, z_0)$ یک نقطه مشخص روی خط است. در اینجا از بردار یکه $\hat{v} = \frac{\vec{v}}{v}$ و بردار $\vec{PQ} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ بصورت

$$|\vec{PQ} \times \hat{v}| = d$$

استفاده می‌شود که d فاصله عمودی نقطه P از خط می‌باشد.

۹) فاصله نقطه‌ی $p(x, y, z)$ را از صفحه

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

بدست آورید(از تعریف ضرب داخلی بردارها استفاده کنید).

در معادله صفحه بالا، a, b, c مولفه‌های بردار عمود برسطح $\vec{v} = (a, b, c)$ و $Q(x_0, y_0, z_0)$ یک نقطه

مشخص روی سطح است. در اینجا از بردار یکه $\hat{v}=\frac{\vec{v}}{v}$ و بردار $\vec{PQ}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$ بصورت

$$|\vec{PQ}\cdot\hat{v}|=d$$

استفاده می‌شود که d فاصله عمودی نقطه P از صفحه می‌باشد(منظور از قدرمطلق این است که بزرگی ضرب داخلی مهم است و علامت اهمیتی ندارد).

۱۰) نمایش فشرده ضرب داخلی دو بردار $\vec{A}=\hat{e}_1A_1+\hat{e}_2A_2+\hat{e}_3A_3$ و $\vec{B}=\hat{e}_1B_1+\hat{e}_2B_2+\hat{e}_3B_3$ بصورت

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\sum_i\hat{e}_iA_i\cdot\sum_i\hat{e}_jB_j=\sum_{i,j}A_iB_i\hat{e}_i\cdot\hat{e}_j$$

داده می‌شود. با استفاده از تابع دلتای کرونکر حاصلضرب داخلی بردارهای یکه برابر دلتای کرونکر است($\hat{e}_i\cdot\hat{e}_j=\delta_{ij}$). بدین ترتیب $\vec{A}\cdot\vec{B}=\sum_{i,j}A_iB_j\delta_{ij}$. نشان دهید

$$\sum_{i,j}A_iB_j\delta_{ij}=\sum_iA_iB_i$$

ابتدا جمع بروی اندیس j

$$\sum_{i,j}A_iB_j\delta_{ij}=\sum_iA_i(B_1\delta_{i1}+B_2\delta_{i2}+B_3\delta_{i3})$$

حالا جمع روی i رو اعمال کنید

$$\begin{aligned}\sum_{i,j}A_iB_j\delta_{ij}&=\sum_iA_i(B_{i1}\delta_{i1}+B_{i2}\delta_{i2}+B_{i3}\delta_{i3})\\&=A_1B_1\delta_{11}+A_1B_2\delta_{12}+A_1B_3\delta_{13}\\&+A_2B_1\delta_{21}+A_2B_2\delta_{22}+A_2B_3\delta_{23}\\&+A_3B_1\delta_{31}+A_3B_2\delta_{32}+A_3B_3\delta_{33}\end{aligned}$$

با توجه به تعریف دلتای‌کرونکر ($\delta_{ij}=1,\quad i=j$ و $\delta_{ij}=0,\quad i\neq j$)، عبارت بالا به صورت

$$\sum_{i,j}A_iB_j\delta_{ij}=A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3=\sum_iA_iB_i$$

تغییر می‌کند.

۱۱) نمایش فشرده ضرب خارجی دو بردار $\vec{A}=\hat{e}_1A_1+\hat{e}_2A_2+\hat{e}_3A_3$ و $\vec{B}=\hat{e}_1B_1+\hat{e}_2B_2+\hat{e}_3B_3$ بصورت

$$\vec{A}\times\vec{B}=\sum_i\hat{e}_iA_i\times\sum_i\hat{e}_jB_j=\sum_{i,j}A_iB_i\hat{e}_i\times\hat{e}_j$$

داده می‌شود. با استفاده از نماد لوی‌چی‌ویتا حاصلضرب خارجی بردارهای یکه برابر است با $=\hat{e}_i\times\hat{e}_j$

$\sum_k \epsilon_{ijk}\hat{e}_k$. نشان دهید

$$(\vec{A}\times\vec{B})_k = \sum_{ij} A_i B_j \epsilon_{ijk}$$

با توجه به تعریف ضرب خارجی

$$\vec{A}\times\vec{B} = \sum_i \hat{e}_i A_i \times \sum_i \hat{e}_j B_j = \sum_{i,j} A_i B_j \hat{e}_i \times \hat{e}_j = \sum_{i,j,l} A_i B_j \epsilon_{ijl}\hat{e}_l$$

مولفه kام بردار $\vec{A}\times\vec{B}$ برابر $(\vec{A}\times\vec{B})_k = (\vec{A}\times\vec{B})\cdot\hat{e}_k$، بدین ترتیب

$$(\vec{A}\times\vec{B})_k = \sum_{i,j,l} A_i B_j \epsilon_{ijl}\hat{e}_l\cdot\hat{e}_k = \sum_{i,j,l} A_i B_j \epsilon_{ijl}\delta_{lk} = \sum_{i,j} A_i B_j \epsilon_{ijk}$$

۱۲) اتحادهای زیر را بدست آورید

$$\sum_{ij}\epsilon_{ijk}\delta_{ij} = 0, \qquad \sum_{i,j}\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}, \qquad \sum_{i,j,k}\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6$$

$$\begin{aligned}
\sum_{ij}\epsilon_{ijk}\delta_{ij} &= \sum_i(\epsilon_{i1k}\delta_{i1} + \epsilon_{i2k}\delta_{i2} + \epsilon_{i3k}\delta_{i3}) \\
&= \epsilon_{11k}\delta_{11} + \epsilon_{12k}\delta_{12} + \epsilon_{13k}\delta_{13} \\
&+ \epsilon_{21k}\delta_{21} + \epsilon_{22k}\delta_{22} + \epsilon_{23k}\delta_{23} \\
&+ \epsilon_{31k}\delta_{21} + \epsilon_{32k}\delta_{22} + \epsilon_{33k}\delta_{33} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j}\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl} &= \sum_i(\epsilon_{i1k}\epsilon_{i1l} + \epsilon_{i2k}\epsilon_{i2l} + \epsilon_{i3k}\epsilon_{i3l}) \\
&= \epsilon_{11k}\epsilon_{11l} + \epsilon_{12k}\epsilon_{12l} + \epsilon_{13k}\epsilon_{13l} \\
&+ \epsilon_{21k}\epsilon_{21l} + \epsilon_{22k}\epsilon_{22l} + \epsilon_{23k}\epsilon_{23l} \\
&+ \epsilon_{31k}\epsilon_{31l} + \epsilon_{32k}\epsilon_{32l} + \epsilon_{33k}\epsilon_{33l} \\
&= \epsilon_{12k}\epsilon_{12l} + \epsilon_{13k}\epsilon_{13l} \\
&+ \epsilon_{21k}\epsilon_{21l} + \epsilon_{23k}\epsilon_{23l} \\
&+ \epsilon_{31k}\epsilon_{31l} + \epsilon_{32k}\epsilon_{32l} \\
&= 2\epsilon_{12k}\epsilon_{12l} + 2\epsilon_{31k}\epsilon_{31l} + 2\epsilon_{23k}\epsilon_{23l} = 2\delta_{kl}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j,k}\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} &= \sum_{i,j}(\epsilon_{ij1}\epsilon_{ij1}+\epsilon_{ij2}\epsilon_{ij2}+\epsilon_{ij3}\epsilon_{ij3}) \\
&= \sum_{i}(\epsilon_{i11}\epsilon_{i11}+\epsilon_{i12}\epsilon_{i12}+\epsilon_{i13}\epsilon_{i13}+\epsilon_{i21}\epsilon_{i21}+\epsilon_{i22}\epsilon_{i22}+\epsilon_{i23}\epsilon_{i23}+\epsilon_{i31}\epsilon_{i31}+\epsilon_{i32}\epsilon_{i32}+\epsilon_{i33}\epsilon_{i33}) \\
&= 2\sum_{i}(\epsilon_{i12}\epsilon_{i12}+\epsilon_{i31}\epsilon_{i31}+\epsilon_{i23}\epsilon_{i23}) \\
&= 2(\epsilon_{112}\epsilon_{112}+\epsilon_{131}\epsilon_{131}+\epsilon_{123}\epsilon_{123}+\epsilon_{212}\epsilon_{212}+\epsilon_{231}\epsilon_{231}+\epsilon_{223}\epsilon_{223}+\epsilon_{312}\epsilon_{312}+\epsilon_{331}\epsilon_{331}+\epsilon_{323}\epsilon_{323}) \\
&= 2(\epsilon_{123}\epsilon_{123}+\epsilon_{231}\epsilon_{231}+\epsilon_{312}\epsilon_{312}) = 6
\end{aligned}
$$

۱۳) برقراری اتحاد

$$\sum_{k}\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

را بررسی کنید و بوسیله آن رابطه

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$$

را بدست آورید

$$
\begin{aligned}
\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) &= \left(\sum_i A_i\hat{e}_i\right)\times\left[\left(\sum_j B_j\hat{e}_j\right)\times\left(\sum_k C_k\hat{e}_k\right)\right] \\
&= \left(\sum_i A_i\hat{e}_i\right)\times\left(\sum_{jk} B_jC_k\hat{e}_j\times\hat{e}_k\right) \\
&= \sum_{ijk} A_iB_jC_k[\hat{e}_i\times(\hat{e}_j\times\hat{e}_k)]
\end{aligned}
$$

$$\hat{e}_i\times(\hat{e}_j\times\hat{e}_k) = \hat{e}_i\times\sum_l \epsilon_{jkl}\hat{e}_l = \sum_l \epsilon_{jkl}\hat{e}_i\times\hat{e}_l = \sum_{lm}\epsilon_{jkl}\epsilon_{ilm}\hat{e}_m = \sum_m\left(\sum_l \epsilon_{jkl}\epsilon_{ilm}\right)\hat{e}_m$$

با توجه به قسمت اول مسئله داریم

$$\hat{e}_i\times(\hat{e}_j\times\hat{e}_k) = -\sum_m\left(\sum_l \epsilon_{jkl}\epsilon_{iml}\right)\hat{e}_m = -\sum_m\left(\delta_{ij}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{ik}\right)\hat{e}_m$$

$$
\begin{aligned}
\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) &= \sum_{ijk} A_iB_jC_k[\hat{e}_i\times(\hat{e}_j\times\hat{e}_k)] = -\sum_{ijkm} A_iB_jC_k\left(\delta_{ij}\delta_{km}-\delta_{jm}\delta_{ik}\right)\hat{e}_m \\
&= -\sum_{ik} A_iB_iC_k\hat{e}_k + \sum_{ij} A_iB_jC_i\hat{e}_j \\
&= -\left(\sum_i A_iB_i\right)\left(\sum_k C_k\hat{e}_k\right) + \left(\sum_i A_iC_i\right)\left(\sum_j B_j\hat{e}_j\right) \\
&= -(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C} + (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})
\end{aligned}
$$

عبارت بدست آمده به اتحاد بَک‌کَب معروف است.

۱۴) بردار $\vec{A}$ را می‌توان به دو بردار شعاعی $\vec{A}_r$ و مماسی $\vec{A}_t$ تجزیه کرد. اگر $\hat{r}$ بردار یکه در امتداد شعاعی باشد، نشان دهید

$$
\begin{aligned}
\vec{A}_r &= \hat{r}(\vec{A}\cdot\hat{r}) \\
\vec{A}_t &= \hat{r}\times(\vec{A}\times\hat{r})\cdot
\end{aligned}
$$

در اینجا از اتحاد بک‌کب بصورت

$$\hat{r}\times(\vec{A}\times\hat{r}) = \vec{A}(\hat{r}\cdot\hat{r}) - \hat{r}(\hat{r}\cdot\vec{A})$$

استفاده می‌کنیم. از آنجایکه $\hat{r}\cdot\hat{r}$ برابر یک است، بنابراین عبارت بالا بصورت

$$\hat{r}\times(\vec{A}\times\hat{r}) = \vec{A} - \hat{r}(\hat{r}\cdot\vec{A})$$

تبدیل می‌شود که بردار $\vec{A}$ برابر

$$\vec{A} = \hat{r}(\hat{r}\cdot\vec{A}) + \hat{r}\times(\vec{A}\times\hat{r}) \qquad (۱۶)$$

جمله اول در عبارت سمت راست (یعنی، $\hat{r}(\hat{r}\cdot\vec{A})$)، تصویر بردار $\vec{A}$ را بر روی بردار یکه $\hat{r}$ نشان می‌دهد که در بردار یکه $\hat{r}$ ضرب شده است.

در حالت کلی بردار $\vec{A}$ را می‌توان به دو راستای $\hat{r}$ و $\hat{t}$ تجزیه کرد که در آن و $\hat{t}$، $\hat{r}$ و $\vec{A}$ در یک صفحه‌اند و همچنین $\hat{t}$ و $\hat{r}$ بریکدیگر عمودند($\hat{r}\cdot\hat{t}=0$). بدین ترتیب

$$\vec{A} = \hat{r}(\hat{r}\cdot\vec{A}) + \hat{t}(\hat{t}\cdot\vec{A}) \qquad (۱۷)$$

از مقایسه رابطه‌های (۱۶) و (۱۷) با یکدیگر داریم

$$\hat{t}(\hat{t}\cdot\vec{A}) = \hat{r}\times(\vec{A}\times\hat{r})$$

و مولفه مماسی A_t برابر

$$A_t = \hat{t}\cdot\vec{A} = \hat{t}\cdot\hat{r}\times(\vec{A}\times\hat{r})$$

۱۵) بردار نا معلوم $\vec{X}$ روابط زیر که شامل کمیتهای معلوم $\vec{A}$، $\vec{B}$ و ϕ اند را برآورده می‌کند

$$\vec{A}\times\vec{X} = \vec{B}, \qquad \vec{A}\cdot\vec{X} = \phi$$

بردار $\vec{X}$ را برحسب کمیتهای معلوم $\vec{A}$، $\vec{B}$ و ϕ و اندازه بردار $\vec{A}$ بدست آورید.

در اینجا از اتحاد بک‌کب بصورت

$$\vec{A}\times(\vec{X}\times\vec{A}) = \vec{X}(\vec{A}\cdot\vec{A}) - \vec{A}(\vec{A}\cdot\vec{X})$$

استفاده می‌کنیم. با توجه به فرض مسئله، معادله بالا بصورت

$$\vec{A}\times\vec{B} = A^2\vec{X} - \phi\vec{A}$$

تغییر می‌کند که در آن

$$\vec{X} = \frac{1}{A^2}(\vec{A}\times\vec{B} + \phi\vec{A})$$

مظفری