به نام خدا

تمرین شماره: ۲ **درس ریاضی فیزیک ۱** **تحویل: ۹۱/۱۲/۲۳**

---

۱) بوسیله اتحاد $\sum_k \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$ رابطه

$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = A^2B^2 - (\vec{A}\cdot\vec{B})^2$$

را بدست آورید.

۲) از رابطه $\vec{C} = \vec{A}+\vec{B}$ شروع کنید و نشان دهید که $\vec{C}\times\vec{C} = 0$ منجر می‌شود به $\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$.

۳) نشان دهید که روابط

$$(\vec{A}-\vec{B})\cdot(\vec{A}+\vec{B}) = A^2 - B^2, \qquad (\vec{A}-\vec{B})\times(\vec{A}+\vec{B}) = 2\vec{A}\times\vec{B}$$

برقرار است.

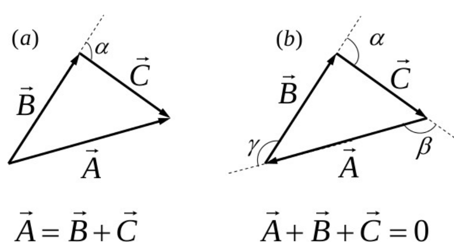
۴) با استفاده از شکل (a) اتحاد کسینوسها

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\alpha$$

و با استفاده از شکل (b) اتحاد سینوسها

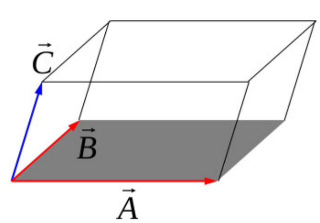
$$\frac{\sin\alpha}{A} = \frac{\sin\beta}{B} = \frac{\sin\gamma}{C}$$

را بدست آورید.



۵) الف) مطابق شکل مساحت متوازی‌الاضلاع تشکیل شده بوسیله بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ رابدست آورید. ب) مطابق شکل حجم متوازی‌السطوح تشکیل شده بوسیله بردارهای $\vec{A}$، $\vec{B}$ و $\vec{C}$ رابدست آورید و نشان دهید

$$\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$



۶) بردار $\vec{D}$ ترکیب خطی از سه بردار غیر هم سطح و نامتعامد بصورت

$$\vec{D} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{B} + \gamma\vec{C}$$

است. نشان دهید $\alpha = \frac{\vec{D}\cdot\vec{B}\times\vec{C}}{\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C}}$، $\beta = \frac{\vec{D}\cdot\vec{C}\times\vec{A}}{\vec{B}\cdot\vec{C}\times\vec{A}}$ و $\gamma = \frac{\vec{D}\cdot\vec{A}\times\vec{B}}{\vec{C}\cdot\vec{A}\times\vec{B}}$.

۷) درستی اتحادهای

$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D}) - (\vec{A}\cdot\vec{D})(\vec{B}\cdot\vec{C})$$
$$(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{C}\times\vec{D}) = (\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{D})\vec{C} - (\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C})\vec{D}$$

را بررسی کنید.

۸) با استفاده از اتحاد بک‌کب، نشان دهید

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) + \vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{A}) + \vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = ۰$$

۹) نشان دهید اپراتور گرادیان $\vec{\nabla}$ یک بردار است (راهنمایی: برای این بررسی ناوردایی، بردار گرادیان را تحت چرخش دستگاه مختصات حول محور x بررسی کنید.)

۱۰) اگر $f(x,y,z) = (x^۲+y^۲+z^۲)^{-\frac{۳}{۲}}$، کمیتهای زیر را بدست آورید الف) $\vec{\nabla}f(x,y,z)$ را در نقطه $(۳,۲,۱)$، ب) $|\vec{\nabla}f(x,y,z)|$ بزرگی گرادیان در نقطه $(۳,۲,۱)$ و ج) کسینوسهای هادی $\vec{\nabla}f(x,y,z)$ در نقطه $(۳,۲,۱)$.

۱۱) بردار یکه عمود برسطح سهمی‌گون $z = x^۲ + y^۲$ را در نقطه $(۱,۲,۱)$ محاسبه کنید و معادله صفحه مماس بر این سهمی‌گون را در نقطه $(۱,۲,۱)$ بدست آورید.

۱۲) اگر $\vec{F}(x,y,z,t)$ یک میدان بردار تابع مکان $\vec{r}$ و زمان t باشد، نشان دهید

$$d\vec{F} = (d\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\vec{F} + dt\frac{\partial}{\partial t}\vec{F}$$

۱۳) نشان دهید اگر $\vec{F}(x,y,z,t)$ یک بردار باشد، $\frac{d\vec{F}}{dt}$ نیز یک بردار است(راهنمائی: از مسئله قبل استفاده کنید و در نظر داشته باشید که گرادیان $\vec{\nabla}$ و $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ نیز بردارند).

۱۴) با مشتق‌گیری از مولفه‌ها نشان دهید

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{dt}$$
$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B} + \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt}$$

(راهنمائی: از مسئله (۱۲) برای بررسی اتحادها استفاده کنید.)

۱۵) با استفاده از نمایش اندیسی بردارها، روابط زیر را بررسی کنید

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})$$
$$\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} - \vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) + \vec{A}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})$$