به نام خدا

تمرین شماره: ۲ **درس ریاضی فیزیک ۱** **تحویل: ۹۱/۱۲/۲۳**

---

۱) بوسیله اتحاد $\sum_k \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$ رابطه

$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = A^{2}B^{2} - (\vec{A}\cdot\vec{B})^{2}$$

را بدست آورید.

$$\begin{aligned}
(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) &= \left(\sum_{ijk} A_i B_j \epsilon_{ijk}\hat{e}_k\right)\cdot\left(\sum_{i'j'k'} A_{i'} B_{j'} \epsilon_{i'j'k'}\hat{e}_{k'}\right)\\
&= \sum_{ijk}\sum_{i'j'k'} A_i B_j A_{i'} B_{j'} \epsilon_{ijk}\epsilon_{i'j'k'}\delta_{kk'}\\
&= \sum_{ijk}\sum_{i'j'} A_i B_j A_{i'} B_{j'} \epsilon_{ijk}\epsilon_{i'j'k}\\
&= \sum_{ij}\sum_{i'j'} A_i B_j A_{i'} B_{j'} \left(\sum_k \epsilon_{ijk}\epsilon_{i'j'k}\right)\\
&= \sum_{ij}\sum_{i'j'} A_i B_j A_{i'} B_{j'} \left(\delta_{ii'}\delta_{jj'} - \delta_{ij'}\delta_{ji'}\right)\\
&= \sum_{ij} A_i B_j A_i B_j - \sum_{ij} A_i B_j A_j B_i\\
&= \left(\sum_i A_i^{2}\right)\left(\sum_j B_j^{2}\right) - \left(\sum_i A_i B_i\right)\left(\sum_j A_j B_j\right)\\
&= A^{2}B^{2} - (\vec{A}\cdot\vec{B})^{2}
\end{aligned}$$

۲) از رابطه $\vec{C} = \vec{A}+\vec{B}$ شروع کنید و نشان دهید که $\vec{C}\times\vec{C} = ۰$ منجر می‌شود به $\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$.

$$\begin{aligned}
\vec{C}\times\vec{C} &= (\vec{A}+\vec{B})\times(\vec{A}+\vec{B}) = \vec{A}\times\vec{A} + \vec{A}\times\vec{B} + \vec{B}\times\vec{A} + \vec{B}\times\vec{B}\\
۰ &= \vec{A}\times\vec{B} + \vec{B}\times\vec{A}
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$$

۳) نشان دهید که روابط

$$(\vec{A}-\vec{B})\cdot(\vec{A}+\vec{B}) = A^{2} - B^{2}, \qquad (\vec{A}-\vec{B})\times(\vec{A}+\vec{B}) = ۲\vec{A}\times\vec{B}$$

برقرار است.

$$
\begin{aligned}
(\vec{A}-\vec{B})\cdot(\vec{A}+\vec{B}) &= \vec{A}\cdot\vec{A}+\vec{A}\cdot\vec{B}-\vec{B}\cdot\vec{A}-\vec{B}\cdot\vec{B}\\
&= A^2-B^2
\end{aligned}
$$

و با توجه به سوال (۲)

$$
\begin{aligned}
(\vec{A}-\vec{B})\times(\vec{A}+\vec{B}) &= \vec{A}\times\vec{A}+\vec{A}\times\vec{B}-\vec{B}\times\vec{A}-\vec{B}\times\vec{B}\\
&= 2\vec{A}\times\vec{B}
\end{aligned}
$$

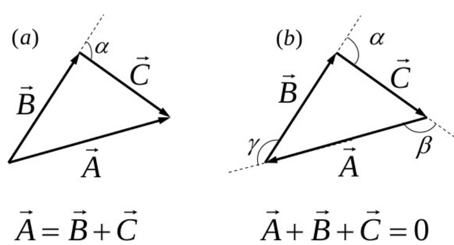
٤) با استفاده از شکل (a) اتحاد کسینوسها

$$C^2 = A^2+B^2+2AB\cos\alpha$$

و با استفاده از شکل (b) اتحاد سینوسها

$$\frac{\sin\alpha}{A}=\frac{\sin\beta}{B}=\frac{\sin\gamma}{C}$$

را بدست آورید.



اتحاد کسینوسها

$$
\begin{aligned}
C^2 &= \vec{C}\cdot\vec{C} = (\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{A}+\vec{B}) = \vec{A}\cdot\vec{A}+\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{B}\cdot\vec{A}+\vec{B}\cdot\vec{B}\\
&= A^2+B^2+2\vec{A}\cdot\vec{B} = A^2+B^2+2AB\cos\alpha
\end{aligned}
$$

اتحاد سینوسها

$$\vec{C}+\vec{A}+\vec{B}=0 \qquad (1)$$

اگر در طرفین تساوی بالا بردار $\vec{A}$ را ضرب خارجی کنیم

$$\vec{A}\times(\vec{C}+\vec{A}+\vec{B})=0 \Rightarrow \vec{A}\times\vec{C}+\vec{A}\times\vec{B}=0 \Rightarrow \vec{A}\times\vec{C}=-\vec{A}\times\vec{B}$$

باگرفتن اندازه عبارت بالا، داریم

$$|\vec{A}\times\vec{C}|=|\vec{A}\times\vec{B}| \Rightarrow AC\sin\beta = AB\sin\gamma$$

با تقسیم کردن ABC به عبارت بالا

$$\frac{AC\sin\beta}{ABC}=\frac{AB\sin\gamma}{ABC} \Rightarrow \frac{\sin\beta}{B}=\frac{\sin\gamma}{C}$$

اگر در طرفین عبارت (۱) را در بردار $\vec{B}$ ضرب خارجی کنیم، داریم

$$\vec{B}\times(\vec{C}+\vec{A}+\vec{B})=۰ \Rightarrow \vec{B}\times\vec{A}+\vec{B}\times\vec{C}=۰ \Rightarrow \vec{B}\times\vec{A}=-\vec{B}\times\vec{C}$$

باگرفتن اندازه عبارت بالا، داریم

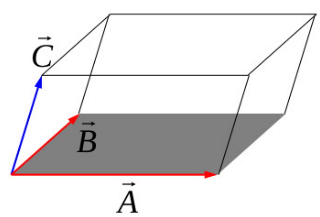
$$|\vec{B}\times\vec{A}|=|\vec{B}\times\vec{C}| \Rightarrow BA\sin\gamma = BC\sin\alpha$$

با تقسیم کردن ABC به عبارت بالا

$$\frac{BA\sin\gamma}{ABC}=\frac{BC\sin\alpha}{ABC} \Rightarrow \frac{\sin\gamma}{C}=\frac{\sin\alpha}{A}$$

۵) الف) مطابق شکل مساحت متوازی‌الاضلاع تشکیل شده بوسیله بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ رابدست آورید. ب) مطابق شکل حجم متوازی‌السطوح تشکیل شده بوسیله بردارهای $\vec{B}$، $\vec{A}$ و $\vec{C}$ رابدست آورید و نشان دهید

$$\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C}=\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$



۶) بردار $\vec{D}$ ترکیب خطی از سه بردار غیر هم سطح و نامتعامد بصورت

$$\vec{D}=\alpha\vec{A}+\beta\vec{B}+\gamma\vec{C}$$

است. نشان دهید $\alpha=\frac{\vec{D}\cdot\vec{B}\times\vec{C}}{\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C}}$، $\beta=\frac{\vec{D}\cdot\vec{C}\times\vec{A}}{\vec{B}\cdot\vec{C}\times\vec{A}}$ و $\gamma=\frac{\vec{D}\cdot\vec{A}\times\vec{B}}{\vec{C}\cdot\vec{A}\times\vec{B}}$.

برای بدست آوردن α طرفین بردار $\vec{D}=\alpha\vec{A}+\beta\vec{B}+\gamma\vec{C}$ را ابتدا در یک بردار $\vec{B}$ ضرب خارجی می‌کنیم

$$\vec{D}\times\vec{B}=\alpha\vec{A}\times\vec{B}+\beta\vec{B}\times\vec{B}+\gamma\vec{C}\times\vec{B}$$

وسپس در بردار $\vec{C}$ ضرب داخلی می‌کنیم

$$\vec{D}\times\vec{B}\cdot\vec{C}=\alpha\vec{A}\times\vec{B}\cdot\vec{C}+\gamma\vec{C}\times\vec{B}\cdot\vec{C}$$

باتوجه به اینکه بردارها غیر هم سطح و نامتعامد، $\vec{A}\times\vec{B}\cdot\vec{C}\neq ۰$، بنابراین

$$\alpha=\frac{\vec{D}\times\vec{B}\cdot\vec{C}}{\vec{A}\times\vec{B}\cdot\vec{C}}=\frac{\vec{C}\times\vec{D}\cdot\vec{B}}{\vec{C}\times\vec{A}\cdot\vec{B}}=\frac{\vec{B}\times\vec{C}\cdot\vec{D}}{\vec{B}\times\vec{C}\cdot\vec{A}}$$

برای بدست آوردن β طرفین بردار $\vec{D}=\alpha\vec{A}+\beta\vec{B}+\gamma\vec{C}$ را ابتدا در یک بردار $\vec{C}$ ضرب خارجی می‌کنیم

$$\vec{D}\times\vec{C}=\alpha\vec{A}\times\vec{C}+\beta\vec{B}\times\vec{C}+\gamma\vec{C}\times\vec{C}$$

وسپس در بردار $\vec{A}$ ضرب داخلی می‌کنیم

$$\vec{D}\times\vec{C}\cdot\vec{A}=\alpha\vec{A}\times\vec{C}\cdot\vec{A}+\beta\vec{B}\times\vec{C}\cdot\vec{A}$$

باتوجه به اینکه بردارها غیر هم سطح و نامتعامد، $\vec{A}\times\vec{B}\cdot\vec{C}\neq ۰$، بنابراین

$$\beta=\frac{\vec{D}\times\vec{C}\cdot\vec{A}}{\vec{B}\times\vec{C}\cdot\vec{A}}=\frac{\vec{A}\times\vec{D}\cdot\vec{C}}{\vec{C}\times\vec{A}\cdot\vec{B}}=\frac{\vec{C}\times\vec{A}\cdot\vec{D}}{\vec{B}\times\vec{C}\cdot\vec{A}}$$

کمیت γنیز به همین ترتیب بدست می‌آید.

۷) درستی اتحادهای

$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D})=(\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D})-(\vec{A}\cdot\vec{D})(\vec{B}\cdot\vec{C})$$
$$(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{C}\times\vec{D})=(\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{D})\vec{C}-(\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C})\vec{D}$$

را بررسی کنید.

عبارت $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D})$ را می‌توان بصورت

$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D})=\vec{D}\cdot[(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}]=-\vec{D}\cdot[\vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{B})]$$

نوشت. با استفاده از اتحاد بک‌کب $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})=\vec{v}(\vec{u}\cdot\vec{w})-\vec{w}(\vec{u}\cdot\vec{v})$، عبارت داخل کروشه برابر

$$\begin{aligned}(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D})&=-\vec{D}\cdot[\vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{B})]=-\vec{D}\cdot[\vec{A}(\vec{C}\cdot\vec{B})-\vec{B}(\vec{C}\cdot\vec{A})]\\&=-(\vec{D}\cdot\vec{A})(\vec{C}\cdot\vec{B})+(\vec{D}\cdot\vec{B})(\vec{C}\cdot\vec{A})\end{aligned}$$

با استفاده از اتحاد بک‌کب $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})=\vec{v}(\vec{u}\cdot\vec{w})-\vec{w}(\vec{u}\cdot\vec{v})$، واینکه در اینجا $\vec{u}=\vec{A}\times\vec{B}$، $\vec{v}=\vec{C}$ و $\vec{w}=\vec{D}$ داریم

$$\begin{aligned}(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{C}\times\vec{D})&=\vec{C}[(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{D}]-\vec{D}[(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}]\\&=\vec{C}[(\vec{D}\times\vec{A})\cdot\vec{B}]-\vec{D}[(\vec{C}\times\vec{A})\cdot\vec{B}]\\&=\vec{C}[(\vec{B}\times\vec{D})\cdot\vec{A}]-\vec{D}[(\vec{B}\times\vec{C})\cdot\vec{A}]\end{aligned}$$

۸) با استفاده از اتحاد بک‌کب، نشان دهید

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})+\vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{A})+\vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{B})=۰$$

$$\begin{aligned}&\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})+\vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{A})+\vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{B})=\\&[\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})]+[\vec{C}(\vec{B}\cdot\vec{A})-\vec{A}(\vec{B}\cdot\vec{C})]+[\vec{A}(\vec{C}\cdot\vec{B})-\vec{B}(\vec{C}\cdot\vec{A})]=۰\end{aligned}$$

۹) نشان دهید اپراتور گرادیان $\vec{\nabla}$ یک بردار است (راهنمایی: برای این بررسی ناوردایی، بردار گرادیان را تحت چرخش دستگاه مختصات حول محور x بررسی کنید.)

تحت چرخش دستگاه مختصات حول محور x، بردار مکان وبردارهای یکه دستگاه مختصات بصورت زیر تبدیل می‌شوند

$$\begin{cases} x = x' \\ y = y'\cos\theta - z'\sin\theta \\ z = y'\sin\theta + z'\cos\theta \end{cases} \tag{۲}$$

و

$$\begin{cases} \hat{i}' = \hat{i} \\ \hat{j}' = \hat{j}\cos\theta + \hat{k}\sin\theta \\ \hat{k}' = -\hat{j}\sin\theta + \hat{k}\cos\theta \end{cases} \tag{۳}$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}' &= \hat{i}'\frac{\partial}{\partial x'} + \hat{j}'\frac{\partial}{\partial y'} + \hat{k}'\frac{\partial}{\partial z'} \\ &= \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + (\hat{j}\cos\theta + \hat{k}\sin\theta)(\frac{\partial y}{\partial y'}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial y'}\frac{\partial}{\partial z}) + (-\hat{j}\sin\theta + \hat{k}\cos\theta)(\frac{\partial y}{\partial z'}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z'}\frac{\partial}{\partial z}) \\ &= \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + (\hat{j}\cos\theta + \hat{k}\sin\theta)(\cos\theta\frac{\partial}{\partial y} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial z}) + (-\hat{j}\sin\theta + \hat{k}\cos\theta)(-\sin\theta\frac{\partial}{\partial y} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial z}) \\ &= \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z} = \vec{\nabla} \end{aligned}$$

۱۰) اگر $f(x,y,z) = (x^۲+y^۲+z^۲)^{-\frac{۳}{۲}}$، کمیتهای زیر را بدست آورید الف) $\vec{\nabla}f(x,y,z)$ را در نقطه $(۳,۲,۱)$، ب) $|\vec{\nabla}f(x,y,z)|$ بزرگی گرادیان در نقطه $(۳,۲,۱)$ و ج) کسینوسهای هادی $\vec{\nabla}f(x,y,z)$ در نقطه $(۳,۲,۱)$.

۱۱) بردار یکه عمود برسطح سهمی‌گون $z = x^۲ + y^۲$ را در نقطه $(۱,۲,۱)$ محاسبه کنید و معادله صفحه مماس بر این سهمی‌گون را در نقطه $(۱,۲,۱)$ بدست آورید.

۱۲) اگر $\vec{F}(x,y,z,t)$ یک میدان بردار تابع مکان $\vec{r}$ و زمان t باشد، نشان دهید

$$d\vec{F} = (d\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\vec{F} + dt\frac{\partial}{\partial t}\vec{F}$$

اگر $\phi(x,y,z,t)$ یک میدان اسکالر تابع مکان $\vec{r}$ و زمان t باشد، در اینصورت

$$d\phi = dz\frac{\partial\phi}{\partial z} + dy\frac{\partial\phi}{\partial y} + dz\frac{\partial\phi}{\partial z} + dt\frac{\partial\phi}{\partial t} = (d\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\phi + dt\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

اگر مولفه‌های بردار $\vec{F}(x,y,z,t)$ را میدانهای اسکالر در نظر بگیریم، رابطه بالا برای هر یک از مولفه‌های بردار $(F_x(x,y,z,t), F_y(x,y,z,t), F_z(x,y,z,t))$ صادق است، یعنی

$$dF_x = (d\vec{r}\cdot\vec{\nabla})F_x + dt\frac{\partial F_x}{\partial t}$$
$$dF_y = (d\vec{r}\cdot\vec{\nabla})F_y + dt\frac{\partial F_y}{\partial t}$$
$$dF_z = (d\vec{r}\cdot\vec{\nabla})F_z + dt\frac{\partial F_z}{\partial t}$$

اگر $d\vec{F} = \hat{i}dF_x + \hat{j}dF_y + \hat{k}dF_z$، بنابراین

$$d\vec{F} = (d\vec{r}\cdot\vec{\nabla})(\hat{i}F_x + \hat{j}F_y + \hat{k}F_z) + dt\frac{\partial}{\partial t}(\hat{i}F_x + \hat{j}F_y + \hat{k}F_z)$$

و

$$d\vec{F} = (d\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\vec{F} + dt\frac{\partial}{\partial t}\vec{F}$$

۱۳) نشان دهید اگر $\vec{F}(x,y,z,t)$ یک بردار باشد، $\frac{d\vec{F}}{dt}$ نیز یک بردار است(راهنمائی: از مسئله قبل استفاده کنید و در نظر داشته باشید که گرادیان $\vec{\nabla}$ و $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ نیز بردارند).

اگر $\vec{F}(x,y,z,t)$ یک بردار باشد، در اینصورت رابطه بین مولفه‌های آن در دو دستگاه پریمدار و بدون پریم بصورت

$$F_i^{'} = \sum_j \lambda_{ij}F_j$$

داده می‌شود، که در آن λ_{ij} کسینوس بین جهت مثبت دو محور i و j با یکدیگر است. قصد داریم نشان دهیم که $\frac{d\vec{F}}{dt}$ یک بردار است یعنی

$$\frac{dF_i^{'}}{dt} = \sum_j \lambda_{ij}\frac{dF_j}{dt}$$

از مسئله قبل داریم

$$\frac{dF_i^{'}}{dt} = \vec{v}^{'}\cdot\vec{\nabla}^{'}F_i^{'} + \frac{\partial}{\partial t}F_i^{'}$$

$$\frac{dF_i^{'}}{dt} = \left(\sum_j \hat{e}_j v_j^{'}\right)\cdot\left(\sum_k \hat{e}_k\partial_k^{'}\right)F_i^{'} + \frac{\partial}{\partial t}F_i^{'} = \left(\sum_{jk}\delta_{jk}v_j^{'}\partial_k^{'}\right)F_i^{'} + \frac{\partial}{\partial t}F_i^{'} = \left(\sum_j v_j^{'}\partial_j^{'}\right)F_i^{'} + \frac{\partial}{\partial t}F_i^{'}$$

اگر گرادیان و سرعت بردار باشند

$$\frac{dF_i^{'}}{dt} = \left[\sum_j\left(\sum_l \lambda_{jl}v_l\right)\left(\sum_m \lambda_{jm}\partial_m\right)\right]F_i^{'} + \frac{\partial}{\partial t}F_i^{'}$$

و

$$\frac{dF_i^{'}}{dt} = \left[\sum_{lm}\left(\sum_j \lambda_{jl}\lambda_{jm}\right)v_l\partial_m\right]F_i^{'} + \frac{\partial}{\partial t}F_i^{'} = \left(\sum_{lm}\delta_{lm}v_l\partial_m\right)F_i^{'} + \frac{\partial}{\partial t}F_i^{'} = \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)F_i^{'} + \frac{\partial}{\partial t}F_i^{'}$$

و اگر $\vec{F}$ نیز یک بردار باشد

$$\begin{aligned}\frac{dF_i'}{dt} &= \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)F_i' + \frac{\partial}{\partial t}F_i' = \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\sum_k \lambda_{ik}F_k + \frac{\partial}{\partial t}\sum_k \lambda_{ik}F_k \\ &= \sum_k \lambda_{ik}\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}F_k + \frac{\partial}{\partial t}F_k\right) = \sum_k \lambda_{ik}\frac{dF_k}{dt}\end{aligned}$$

۱۴) با مشتق‌گیری از مولفه‌ها نشان دهید

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{B}) &= \frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{dt} \\ \frac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B}) &= \frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B} + \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt}\end{aligned}$$

(راهنمائی: از مسئله (۱۲) برای بررسی اتحادها استفاده کنید.)
ابتدا حاصلضرب دو میدان اسکالر f و g را بررسی کنیم، یعنی

$$\begin{aligned}d(fg) &= (d\vec{r}\cdot\vec{\nabla})(fg) + dt\frac{\partial}{\partial t}(fg) \\ &= dx\frac{\partial}{\partial x}(fg) + dy\frac{\partial}{\partial y}(fg) + dz\frac{\partial}{\partial z}(fg) + dt\frac{\partial}{\partial t}(fg) \\ &= dx\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)g + f\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)\right] + dy\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)g + f\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)\right] + dz\left[\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)g + f\left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)\right] + dt\left[\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)g + f\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)\right] \\ &= g\left(dx\frac{\partial}{\partial x}f + dy\frac{\partial}{\partial y}f + dz\frac{\partial}{\partial z}f + dt\frac{\partial}{\partial t}f\right)g + f\left(dx\frac{\partial}{\partial x}g + dy\frac{\partial}{\partial y}g + dz\frac{\partial}{\partial z}g + dt\frac{\partial}{\partial t}g\right) \\ &= \left(d\vec{r}\cdot\vec{\nabla}f + dt\frac{\partial}{\partial t}f\right)g + f\left(d\vec{r}\cdot\vec{\nabla}g + dt\frac{\partial}{\partial t}g\right)\end{aligned}$$

و اگر $v_y = \frac{dy}{dt}$، $v_x = \frac{dx}{dt}$ و $v_z = \frac{dz}{dt}$ باشد، بنابراین

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(fg) &= (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})(fg) + \frac{\partial}{\partial t}(fg) \\ &= \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}f + \frac{\partial}{\partial t}f\right)g + f\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}g + \frac{\partial}{\partial t}g\right) \\ &= \frac{df}{dt}g + f\frac{dg}{dt}\end{aligned}$$

برای ضرب داخلی دو بردار

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\sum_i A_iB_i &= \sum_i\left(\frac{d}{dt}(A_iB_i)\right) \\ &= \sum_i\left(\frac{dA_i}{dt}B_i + A_i\frac{dB_i}{dt}\right) \\ &= \sum_i\frac{dA_i}{dt}B_i + \sum_i A_i\frac{dB_i}{dt} \\ &= \frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{dt}\end{aligned}$$

برای ضرب خارجی دو بردار

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\sum_{ijk} A_i B_j \epsilon_{ijk}\hat{e}_k &= \sum_{ijk}\epsilon_{ijk}\hat{e}_k\left(\frac{d}{dt}(A_iB_j)\right) \\
&= \sum_{ijk}\epsilon_{ijk}\hat{e}_k\left(\frac{dA_i}{dt}B_j + A_i\frac{dB_j}{dt}\right) \\
&= \sum_{ijk}\epsilon_{ijk}\hat{e}_k\frac{dA_i}{dt}B_j + \sum_{ijk}\epsilon_{ijk}\hat{e}_k A_i\frac{dB_j}{dt} \\
&= \frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B} + \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt}
\end{aligned}$$

۱۵) با استفاده از نمایش اندیسی بردارها، روابط زیر را بررسی کنید

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) &= \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}) \\
\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B}) &= (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} - \vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) + \vec{A}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) &= \sum_{ijk}\epsilon_{ijk}\partial_i(A_jB_k) = \sum_{ijk}\epsilon_{ijk}[(\partial_iA_j)B_k + A_j(\partial_iB_k)] \\
&= \sum_{ijk}\epsilon_{ijk}(\partial_iA_j)B_k + \sum_{ijk}\epsilon_{ijk}A_j(\partial_iB_k) \\
&= \sum_{ijk}\epsilon_{kij}B_k(\partial_iA_j) - \sum_{ijk}\epsilon_{ijk}A_j(\partial_iB_k) \\
&= \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B}) &= \vec{\nabla}\times(\sum_{ijk}\epsilon_{ijk}A_iB_j\hat{e}_k) = \sum_{ijklm}\epsilon_{ijk}\epsilon_{lkm}\partial_l(A_iB_j)\hat{e}_m \\
&= \sum_{ijlm}((\partial_lA_i)B_j + A_i(\partial_lB_j))(\sum_k\epsilon_{ijk}\epsilon_{lkm})\hat{e}_m = \sum_{ijlm}((\partial_lA_i)B_j + A_i(\partial_lB_j))(-\sum_k\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk})\hat{e}_m \\
&= -\sum_{ijlm}((\partial_lA_i)B_j + A_i(\partial_lB_j))(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\hat{e}_m \\
&= -\sum_{ij}(\partial_iA_i)B_j\hat{e}_j - \sum_{ij}A_i(\partial_iB_j)\hat{e}_j + \sum_{ij}B_j(\partial_jA_i)\hat{e}_i + \sum_{ij}\hat{e}_iA_i(\partial_jB_j) \\
&= -\left(\sum_i\partial_iA_i\right)\left(\sum_jB_j\hat{e}_j\right) - \left(\sum_iA_i\partial_i\right)\left(\sum_jB_j\hat{e}_j\right) \\
&\quad + \left(\sum_jB_j\partial_j\right)\left(\sum_iA_i\hat{e}_i\right) + \left(\sum_i\hat{e}_iA_i\right)\left(\sum_j\partial_jB_j\right) \\
&= -\vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} + \vec{A}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})
\end{aligned}$$

مظفری