به نام خدا

تمرین شماره: ۳ درس ریاضی فیزیک ۱ تحویل: ۹۱/۱۲/۲۸

---

۱) نشان دهید یک شرط لازم و کافی برای اینکه سه بردار غیر صفر $\vec{A}$، $\vec{B}$ و $\vec{C}$ هم‌صفحه باشند این است که حاصلضرب سه‌گانه‌ی نرده‌ای آنها صفر باشد

$$\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C}=0$$

۲) درستی اتحادهای زیر را بررسی کنید

$$\vec{\nabla}(\phi\psi)=\psi\vec{\nabla}\phi+\phi\vec{\nabla}\psi$$
$$\vec{\nabla}\cdot\phi\vec{A}=\vec{\nabla}\phi\cdot\vec{A}+\phi\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$$
$$\vec{\nabla}\times\phi\vec{A}=\vec{\nabla}\phi\times\vec{A}+\phi\vec{\nabla}\times\vec{A}$$

۳) اگر $f(r)$ هر تابع دلخواهی از $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ باشد، نشان دهید

$$\vec{\nabla}f(r)=\frac{df(r)}{dr}\frac{\vec{r}}{r}=\frac{df(r)}{dr}\hat{r}$$

و با استفاده از مسئله (۲) تساویهای زیر را بررسی کنید

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{r}f(r)=3f(r)+r\frac{df(r)}{dr}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{r}f(r)=0$$

٤) نشان دهید شرط لازم وکافی برای اینکه $\phi(x,y,z)$ و $\psi(x,y,z)$ توسط تابعی $g(\phi,\psi)=0$ به هم مربوط باشند این است که $\vec{\nabla}\phi\times\vec{\nabla}\psi=0$. ب) اگر $\phi(x,y)$ و $\psi(x,y)$، نشان دهید

$$\vec{\nabla}\phi\times\vec{\nabla}\psi=\begin{vmatrix}\frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y}\\ \frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial y}\end{vmatrix}=0$$

٥) نشان دهید اگر $\vec{A}$ یک بردار باشد آنگاه $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ نیز یک بردار است.

٦) یک جسم صلبی با سرعت زاویه‌ای ثابت ω می‌چرخد، نشان دهید سرعت خطی $\vec{v}$ی آن سیملوله‌ای است(یعنی، $\vec{\nabla}\cdot\vec{v}=0$). (راهنمائی: سرعت خطی جسم از رابطه‌ی $\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$ بدست می‌آید که $\vec{r}=\hat{i}x+\hat{j}y+\hat{k}z$ است.)

۷) میدان الکترواستاتیکی بار نقطه ای q برابر است با

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3}\vec{r}$$

واگرایی($\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$) و چرخش ($\vec{\nabla}\times\vec{E}$) را محاسبه کنید(راهنمایی: از مسئله (۳) استفاده کنید).

۸) اگر $\vec{A}$ و $\vec{B}$ غیر چرخشی باشد(یعنی $\vec{\nabla}\times\vec{A}=0$ و $\vec{\nabla}\times\vec{B}=0$) نشان دهید که $\vec{A}\times\vec{B}$ سیملوله‌ای است(یعنی $\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=0$).(راهنمائی: از مسئله شماره (۱۵) سری ۲ برای پاسخ به این سوال استفاده کنید)

۹) اگر $\vec{A}$ غیر چرخشی باشد(یعنی $\vec{\nabla}\times\vec{A}=0$) نشان دهید که $\vec{A}\times\vec{r}$ سیملوله‌ای است.(راهنمائی: از مسئله شماره (۱۵) سری ۲ برای پاسخ به این سوال استفاده کنید)

۱۰) میدان برداری $\vec{A}(x,y,z)$ چرخشی است(یعنی $\vec{\nabla}\times\vec{A}\neq 0$) اما حاصل ضرب $\vec{A}$ و میدان اسکالر $\phi(x,y,z)$ غیر چرخشی است. نشان دهید

$$\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{A}=0$$

(راهنمائی: از مسئله (۲) استفاده کنید)

۱۱) درستی اتحادهای زیر را تحقیق کنید

$$\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B})=(\vec{A}\times\vec{\nabla})\times\vec{B}+(\vec{B}\times\vec{\nabla})\times\vec{A}+\vec{A}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})+\vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})$$
$$\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B})=\vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})+\vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})+(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}+(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}$$

۱۲) درستی اتحادهای زیر را تحقیق کنید

$$\vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})=\frac{1}{2}\vec{\nabla}A^2-(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}$$

(راهنمائی: از مسئله (۱۱) استفاده کنید)

۱۳) اگر $\vec{A}$ و $\vec{B}$ ثابت باشند، نشان دهید

$$\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{r})=\vec{A}\times\vec{B}$$

(راهنمائی: از مسئله (۱۱) استفاده کنید)

۱٤) اگر $\vec{A}=\hat{i}A_x(x,y)+\hat{j}A_y(x,y)$ و $\vec{\nabla}\times\vec{A}\neq 0$، نشان دهید که $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ و $\vec{A}$ برهم عمودند.

۱۵) توزیع از چند جریان الکتریکی، گشتاور مغناطیسی ثابت $\vec{m}$ را ایجاد می‌کند. نیروی وارد بر $\vec{m}$ در میدان مغناطیسی خارجی $\vec{B}$ برابر است با $\vec{F}=\vec{\nabla}\times(\vec{B}\times\vec{m})$، نشان دهید

$$\vec{F}=\vec{\nabla}(\vec{B}\cdot\vec{m})$$

(نکته: در اینجا میدانهای سیستم تابع زمان نیستند بنابراین با توجه به معادلات ماکسول نتیجه می‌گیریم، $\vec{\nabla}\times\vec{B}=0$. با توجه به اینکه تک قطبی مغناطیسی هم وجود ندارد، $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$) (راهنمائی: از مسئله (۱۱) استفاده کنید)

۱٦) یک گشتاور دو قطبی الکتریکی $\vec{p}$ در مبدا قرار دارد. پتانسیل الکتریکی حاصل از این دوقطبی در نقطه $\vec{r}$ برابر است با،

$$\phi(\vec{r})=\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

میدان الکتریکی ($\vec{E}=\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$) را در $\vec{r}$ بدست آورید.(راهنمائی: از مسئله (۱۱) استفاده کنید)

۱۷) پتانسیل برداری $\vec{A}$ی یک دوقطبی مغناطیسی با گشتاور $\vec{m}$، از رابطه‌ی $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_{\circ}}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^{3}}$ تعیین می‌شود. نشان دهید میدان مغناطیسی $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ از رابطه‌ی زیر بدست آورید

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_{\circ}}{4\pi}\left(\frac{3\vec{r}(\vec{r}\cdot\vec{m})}{r^{5}} - \frac{\vec{m}}{r^{3}}\right) = \frac{\mu_{\circ}}{4\pi}\frac{3\hat{r}(\hat{r}\cdot\vec{m}) - \vec{m}}{r^{3}}$$

که $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$ است.(راهنمائی: از مسئله (۱۱) استفاده کنید)

مظفری