به نام خدا

تمرین شماره: ۳   درس ریاضی فیزیک ۱   تحویل: ۹۱/۱۲/۲۸

---

۱) نشان دهید یک شرط لازم و کافی برای اینکه سه بردار غیر صفر $\vec{A}$، $\vec{B}$ و $\vec{C}$ هم‌صفحه باشند این است که حاصلضرب سه‌گانه‌ی نرده‌ای آنها صفر باشد

$$\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C}=۰$$

۲) درستی اتحادهای زیر را بررسی کنید

$$\vec{\nabla}(\phi\psi)=\psi\vec{\nabla}\phi+\phi\vec{\nabla}\psi$$
$$\vec{\nabla}\cdot\phi\vec{A}=\vec{\nabla}\phi\cdot\vec{A}+\phi\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$$
$$\vec{\nabla}\times\phi\vec{A}=\vec{\nabla}\phi\times\vec{A}+\phi\vec{\nabla}\times\vec{A}$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}(\phi\psi)&=\sum_i\hat{e}_i\partial_i(\phi\psi)=\sum_i\hat{e}_i[(\partial_i\phi)\psi+\phi(\partial_i\psi)]=\left(\sum_i\hat{e}_i\partial_i\phi\right)\psi+\phi\left(\sum_i\hat{e}_i\partial_i\psi\right)\\&=(\vec{\nabla}\phi)\psi+\phi(\vec{\nabla}\psi)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\cdot\phi\vec{A}&=\sum_i\partial_i(\phi A_i)=\sum_i[(\partial_i\phi)A_i+\phi(\partial_iA_i)]\\&=\left(\sum_i A_i\partial_i\right)\phi+\phi\left(\sum_i\partial_iA_i\right)=(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\phi+\phi\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times\phi\vec{A}&=\sum_{ijk}\epsilon_{ijk}\partial_i(\phi A_j)\hat{e}_k=\sum_{ijk}\epsilon_{ijk}(\partial_i\phi)A_j\hat{e}_k+\sum_{ijk}\epsilon_{ijk}\phi(\partial_iA_j)\hat{e}_k\\&=\sum_{ijk}\epsilon_{ijk}(\partial_i\phi)A_j\hat{e}_k+\phi\left(\sum_{ijk}\epsilon_{ijk}(\partial_iA_j)\hat{e}_k\right)\\&=-\left(\sum_{ijk}\epsilon_{jik}A_j\partial_i\hat{e}_k\right)\phi+\phi\left(\sum_{ijk}\epsilon_{ijk}(\partial_iA_j)\hat{e}_k\right)\\&=-\vec{A}\times\vec{\nabla}\phi+\phi\vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{\nabla}\phi\times\vec{A}+\phi\vec{\nabla}\times\vec{A}\end{aligned}$$

۳) اگر $f(r)$ هر تابع دلخواهی از $r=\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}$ باشد، نشان دهید

$$\vec{\nabla}f(r)=\frac{df(r)}{dr}\frac{\vec{r}}{r}=\frac{df(r)}{dr}\hat{r}$$

و با استفاده از مسئله (۲) تساویهای زیر را بررسی کنید

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{r}f(r) = ۳f(r) + r\frac{df(r)}{dr}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{r}f(r) = ۰$$

$$\vec{\nabla}f(r) = \hat{i}\frac{\partial f(r)}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial f(r)}{\partial y} + \hat{j}\frac{\partial f(r)}{\partial z} = \hat{i}\frac{df(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} + \hat{j}\frac{df(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial y} + \hat{j}\frac{df(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial z}$$
$$= \frac{df(r)}{dr}\left(\hat{i}\frac{\partial r}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial r}{\partial y} + \hat{j}\frac{\partial r}{\partial z}\right)$$

از آنجایی که $r = \sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}$

$$\vec{\nabla}f(r) = \frac{df(r)}{dr}\left(\hat{i}\frac{x}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}} + \hat{j}\frac{y}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}} + \hat{j}\frac{z}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}}\right)$$
$$= \frac{df(r)}{dr}\left(\hat{i}\frac{x}{r} + \hat{j}\frac{y}{r} + \hat{j}\frac{z}{r}\right) = \frac{df(r)}{dr}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{df(r)}{dr}\hat{r}$$

با استفاده از مسئله (۲)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{r}f(r) = f(r)\vec{\nabla}\cdot\vec{r} + \vec{\nabla}f(r)\cdot\vec{r}$$

که $\vec{\nabla}\cdot\vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = ۳$ و اینکه $\vec{\nabla}f(r) = \frac{df(r)}{dr}\frac{\vec{r}}{r}$، بنابراین

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{r}f(r) = ۳f(r) + r\frac{df(r)}{dr}$$

با استفاده از مسئله (۲)

$$\vec{\nabla}\times\vec{r}f(r) = f(r)\vec{\nabla}\times\vec{r} + \vec{\nabla}f(r)\times\vec{r}$$

که $\vec{\nabla}\times\vec{r} = \hat{i}\left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}\right) + \hat{j}\left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right) = ۰$ و اینکه $\vec{\nabla}f(r) = \frac{df(r)}{dr}\frac{\vec{r}}{r}$، بنابراین

$$\vec{\nabla}\times\vec{r}f(r) = \frac{df(r)}{dr}\frac{\vec{r}}{r}\times\vec{r} = \frac{df(r)}{dr}\frac{۱}{r}(\vec{r}\times\vec{r}) = ۰$$

٤) نشان دهید شرط لازم وکافی برای اینکه $\phi(x,y,z)$ و $\psi(x,y,z)$ توسط تابعی $g(\phi,\psi) = ۰$ به هم مربوط باشند این است که $\vec{\nabla}\phi\times\vec{\nabla}\psi = ۰$. ب) اگر $\phi(x,y)$ و $\psi(x,y)$، نشان دهید

$$\vec{\nabla}\phi\times\vec{\nabla}\psi = \begin{vmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix} = ۰$$

$$\vec{\nabla}g = \frac{\partial g}{\partial\phi}\vec{\nabla}\phi + \frac{\partial g}{\partial\psi}\vec{\nabla}\psi = ۰$$

اگر طرفین رابطه بالا را در $\vec{\nabla}\phi$ ضرب خارجی کنیم داریم

$$\frac{\partial g}{\partial \phi}\vec{\nabla}\phi \times \vec{\nabla}\phi + \frac{\partial g}{\partial \psi}\vec{\nabla}\psi \times \vec{\nabla}\phi = ۰ \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial \psi}\vec{\nabla}\psi \times \vec{\nabla}\phi = ۰$$

چون $g(\phi,\psi)$ تابعی از توابع ϕ و ψ است، بنابراین

$$\vec{\nabla}\psi \times \vec{\nabla}\phi = ۰$$

۵) نشان دهید اگر $\vec{A}$ یک بردار باشد آنگاه $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ نیز یک بردار است.
تحت چرخش دستگاه مختصات حول محور z، بردار مکان وبردارهای یکه دستگاه مختصات بصورت زیر تبدیل می‌شوند

$$\begin{cases} x = x' \cos\theta - y' \sin\theta \\ y = x' \sin\theta + y' \cos\theta \\ z = z' \end{cases}$$

و

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial x}{\partial y'}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y'}\frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x'} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y'} = -\sin\theta\frac{\partial}{\partial x} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z} \end{cases}$$

و همچنین

$$\begin{cases} \hat{i}' = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta \\ \hat{j}' = -\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta \\ \hat{k}' = \hat{k} \end{cases}, \begin{cases} A'_x = \cos\theta A_x + \sin\theta A_y \\ A'_y = -\sin\theta A_x + \cos\theta A_y \\ A'_z = A_z \end{cases}$$

در دستگاه پریمدار

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}' \times \vec{A}' &= \hat{i}' \left(\frac{\partial A'_z}{\partial y'} - \frac{\partial A'_y}{\partial z'}\right) + \hat{j}' \left(\frac{\partial A'_x}{\partial z'} - \frac{\partial A'_z}{\partial x'}\right) + \hat{k}' \left(\frac{\partial A'_y}{\partial x'} - \frac{\partial A'_x}{\partial y'}\right) \\ &= (\hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta)\left(-\sin\theta\frac{\partial A_z}{\partial x} + \cos\theta\frac{\partial A_z}{\partial y} + \sin\theta\frac{\partial A_x}{\partial z} - \cos\theta\frac{\partial A_y}{\partial z}\right) \\ &+ (-\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta)\left(\cos\theta\frac{\partial A_x}{\partial z} + \sin\theta A_y - \cos\theta\frac{\partial A_z}{\partial x} - \sin\theta\frac{\partial A_z}{\partial y}\right) \\ &+ \hat{k}\left[\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}\right)(-\sin\theta A_x + \cos\theta A_y) - \left(-\sin\theta\frac{\partial}{\partial x} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial y}\right)(\cos\theta A_x + \sin\theta A_y)\right] \end{aligned}$$

بنابراین

$$\vec{\nabla}' \times \vec{A}' = \hat{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \hat{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

۶) یک جسم صلبی با سرعت زاویه‌ای ثابت ω می‌چرخد، نشان دهید سرعت خطی $\vec{v}$ی آن سیملوله‌ای است(یعنی، $\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = ۰$). (راهنمائی: سرعت خطی جسم از رابطه‌ی $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ بدست می‌آید که $\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$ است.)

با استفاده از اتحاد $\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})$ که در تمرین سری (۲) آنرا بررسی کردیم و همچنین باستفاده از مسئله (۳) که $\vec{\nabla}\times\vec{r} = ۰$ داریم

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v}=\vec{\nabla}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r})=\vec{\omega}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{r})-\vec{r}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{\omega})=-\vec{r}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{\omega})$$

از آنجایی که جسم صلبی با سرعت زاویه‌ای ثابت ω می‌چرخد، $\vec{\nabla}\times\vec{\omega}=0$، بنابراین $\vec{\nabla}\cdot\vec{v}=0$.

۷) میدان الکترواستاتیکی بار نقطه ای q برابر است با

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3}\vec{r}$$

واگرایی($\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$) و چرخش ($\vec{\nabla}\times\vec{E}$) را محاسبه کنید(راهنمایی: از مسئله (۳) استفاده کنید).

۸) اگر $\vec{A}$ و $\vec{B}$ غیر چرخشی باشد(یعنی $\vec{\nabla}\times\vec{A}=0$ و $\vec{\nabla}\times\vec{B}=0$) نشان دهید که $\vec{A}\times\vec{B}$ سیملوله‌ای است(یعنی $\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=0$).(راهنمائی: از مسئله شماره (۱۵) سری ۲ برای پاسخ به این سوال استفاده کنید)

با استفاده از اتحاد $\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})-\vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})$ که در تمرین سری (۲) آنرا بررسی کردیم. اگر $\vec{A}$ و $\vec{B}$ غیر چرخشی باشد،یعنی $\vec{\nabla}\times\vec{A}=0$ و $\vec{\nabla}\times\vec{B}=0$، بنابراین $\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=0$.

۹) اگر $\vec{A}$ غیر چرخشی باشد(یعنی $\vec{\nabla}\times\vec{A}=0$) نشان دهید که $\vec{A}\times\vec{r}$ سیملوله‌ای است.(راهنمائی: از مسئله شماره (۱۵) سری ۲ برای پاسخ به این سوال استفاده کنید)

با استفاده از اتحاد $\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})-\vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})$ که در تمرین سری (۲) آنرا بررسی کردیم. اگر $\vec{A}$ و $\vec{r}$ غیر چرخشی باشد،یعنی $\vec{\nabla}\times\vec{A}=0$ و $\vec{\nabla}\times\vec{r}=0$، بنابراین $\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{r})=0$.

۱۰) میدان برداری $\vec{A}(x,y,z)$ چرخشی است(یعنی $\vec{\nabla}\times\vec{A}\neq 0$) اما حاصل ضرب $\vec{A}$ و میدان اسکالر $\phi(x,y,z)$ غیر چرخشی است. نشان دهید

$$\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{A}=0$$

(راهنمائی: از مسئله (۲) استفاده کنید)

حاصل ضرب $\vec{A}$ و میدان اسکالر $\phi(x,y,z)$ غیر چرخشی است، یعنی $\vec{\nabla}\times\phi\vec{A}=0$. با استفاده از مسئله (۲) داریم، $\vec{\nabla}\times\phi\vec{A}=\vec{\nabla}\phi\times\vec{A}+\phi\vec{\nabla}\times\vec{A}$. بدین‌ترتیب

$$0=\vec{\nabla}\phi\times\vec{A}+\phi\vec{\nabla}\times\vec{A}$$

اگر طرفین رابطه بالا را در بردار $\vec{A}$ ضرب داخلی کنیم داریم

$$0=\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\phi\times\vec{A}+\phi\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{A}$$

جمله اول سمت راست بالا برابر با صفر است، $\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\phi\times\vec{A}=0$، بنابراین

$$0=\phi\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{A}\Rightarrow\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{A}=0.$$

۱۱) درستی اتحادهای زیر را تحقیق کنید

$$\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B})=\vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})+\vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})+(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}+(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}$$
$$\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B})=(\vec{A}\times\vec{\nabla})\times\vec{B}+(\vec{B}\times\vec{\nabla})\times\vec{A}+\vec{A}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})+\vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})$$

$$
\begin{aligned}
\vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) &= \vec{A}\times\left[\sum_{jkl}(\partial_j B_k)\epsilon_{jkl}\hat{e}_l\right] = \sum_{ijklm}[A_i(\partial_j B_k)]\epsilon_{ilm}\epsilon_{jkl}\hat{e}_m = \sum_{ijkm}[A_i(\partial_j B_k)]\left(\sum_l \epsilon_{ilm}\epsilon_{jkl}\right)\hat{e}_m \\
&= -\sum_{ijkm}[A_i(\partial_j B_k)]\left(\sum_l \epsilon_{iml}\epsilon_{jkl}\right)\hat{e}_m = -\sum_{ijkm}[A_i(\partial_j B_k)](\delta_{ij}\delta_{mk}-\delta_{ik}\delta_{jm})\hat{e}_m \\
&= -\sum_{ik}[A_i(\partial_i B_k)]\hat{e}_k + \sum_{ij}[A_i(\partial_j B_i)]\hat{e}_j \\
&= -\sum_{ik}[(A_i\partial_i)B_k]\hat{e}_k + \sum_{ij}\hat{e}_j\partial_j(A_iB_i) - \sum_{ij}[B_i(\partial_j A_i)]\hat{e}_j \\
&= -(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + \vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B}) - \sum_{ij}[B_i(\partial_j A_i)]\hat{e}_j
\end{aligned}
$$

بنابراین

$$
\vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) + (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} - \vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = -\sum_{ij}[B_i(\partial_j A_i)]\hat{e}_j \qquad (۱)
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) &= \vec{B}\times\left[\sum_{jkl}(\partial_j A_k)\epsilon_{jkl}\hat{e}_l\right] = \sum_{ijklm}[B_i(\partial_j A_k)]\epsilon_{ilm}\epsilon_{jkl}\hat{e}_m = \sum_{ijkm}[B_i(\partial_j A_k)]\left(\sum_l \epsilon_{ilm}\epsilon_{jkl}\right)\hat{e}_m \\
&= -\sum_{ijkm}[B_i(\partial_j A_k)]\left(\sum_l \epsilon_{iml}\epsilon_{jkl}\right)\hat{e}_m = -\sum_{ijkm}[B_i(\partial_j A_k)](\delta_{ij}\delta_{mk}-\delta_{ik}\delta_{jm})\hat{e}_m \\
&= -\sum_{ik}[B_i(\partial_i A_k)]\hat{e}_k + \sum_{ij}[B_i(\partial_j A_i)]\hat{e}_j \\
&= -(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} + \sum_{ij}[B_i(\partial_j A_i)]\hat{e}_j
\end{aligned}
$$

بنابراین

$$
\vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} = \sum_{ij}[B_i(\partial_j A_i)]\hat{e}_j \qquad (۲)
$$

با مقایسه روابط (۱) و (۲) با یکدیگر داریم

$$
\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) + \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}
$$

۱۲) درستی اتحادهای زیر را تحقیق کنید

$$\vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})=\frac{۱}{۲}\vec{\nabla}A^{۲}-(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}$$

(راهنمائی: از مسئله (۱۱) استفاده کنید)

با استفاده از مسئله (۱۱)، $\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B})=\vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})+\vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})+(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}+(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}$، و جایگزین کردن بردار $\vec{A}$ به جای بردار $\vec{B}$ داریم

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{A})&=۲\vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})+۲(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}\\ \vec{\nabla}A^{۲}&=۲\vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})+۲(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}\end{aligned}$$

و نهایتا

$$\vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})=\frac{۱}{۲}\vec{\nabla}A^{۲}-(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}$$

۱۳) اگر $\vec{A}$ و $\vec{B}$ ثابت باشند، نشان دهید

$$\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{r})=\vec{A}\times\vec{B}$$

(راهنمائی: از مسئله (۱۱) استفاده کنید)

با استفاده از خاصیت چرخش ضرب داخلی و خارجی

$$\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{r})=\vec{\nabla}(\vec{r}\cdot\vec{A}\times\vec{B})$$

با استفاده از مسئله (۱۱)، $\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B})=\vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})+\vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})+(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}+(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}$ داریم

$$\vec{\nabla}(\vec{r}\cdot\vec{A}\times\vec{B})=\vec{r}\times[\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B})]+(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{\nabla}\times\vec{r})+([\vec{A}\times\vec{B}]\cdot\vec{\nabla})\vec{r}+(\vec{r}\cdot\vec{\nabla})(\vec{A}\times\vec{B})$$

با توجه به اینکه بردارهای $\vec{A}$ و بردار $\vec{B}$ ثابت هستند جملات اول و چهارم سمت راست عبارت بالا برابر صفرند. همچنین در تمرینهای بالا نشان دادیم که $\vec{\nabla}\times\vec{r}$ برابر صفر می‌باشد(به مسئله ۳ نگاه کنید)، بنابراین

$$\vec{\nabla}(\vec{r}\cdot\vec{A}\times\vec{B})=([\vec{A}\times\vec{B}]\cdot\vec{\nabla})\vec{r}$$

اگر $\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}(\vec{r}\cdot\vec{C})=(\vec{C}\cdot\vec{\nabla})\vec{r}&=\left(C_x\frac{\partial}{\partial x}+C_y\frac{\partial}{\partial y}+C_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{r}\\ &=\left(C_x\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}+C_y\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}+C_z\frac{\partial\vec{r}}{\partial z}\right)\\ &=\left(C_x\hat{i}+C_y\hat{j}+C_z\hat{k}\right)=\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}\end{aligned}$$

۱٤) اگر $\vec{A}=\hat{i}A_x(x,y)+\hat{j}A_y(x,y)$ و $\vec{\nabla}\times\vec{A}\neq ۰$، نشان دهید که $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ و $\vec{A}$ برهم عمودند.

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\hat{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

برای بررسی عمود بودن $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ و $\vec{A}$ داریم

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{A}&=(\hat{i}A_x+\hat{j}A_y)\cdot\hat{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\\&=(\hat{i}\cdot\hat{k})A_x\frac{\partial A_y}{\partial x}-(\hat{j}\cdot\hat{k})A_y\frac{\partial A_x}{\partial y}=۰\end{aligned}$$

۱۵) توزیع از چند جریان الکتریکی، گشتاور مغناطیسی ثابت $\vec{m}$ را ایجاد می‌کند. نیروی وارد بر $\vec{m}$ در میدان مغناطیسی خارجی $\vec{B}$ برابر است با $\vec{F}=\vec{\nabla}\times(\vec{B}\times\vec{m})$، نشان دهید

$$\vec{F}=\vec{\nabla}(\vec{B}\cdot\vec{m})$$

(نکته: در اینجا میدانهای سیستم تابع زمان نیستند بنابراین با توجه به معادلات ماکسول نتیجه می‌گیریم، $\vec{\nabla}\times\vec{B}=۰$. با توجه به اینکه تک قطبی مغناطیسی هم وجود ندارد، $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=۰$) (راهنمائی: از مسئله (۱۱) استفاده کنید)

با استفاده از مسئله ۱۵ تمرین سری ۲، $\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B})=(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}-(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}-\vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})+\vec{A}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})$، داریم

$$\vec{F}=\vec{\nabla}\times(\vec{B}\times\vec{m})=(\vec{m}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}-(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{m}-\vec{m}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})+\vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{m})$$

با توجه به اینکه $\vec{m}$ بردار ثابتی است جمله دوم و چهارم برابر صفر است و با توجه به اینکه تک قطبی مغناطیسی هم وجود ندارد، $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=۰$ داریم

$$\vec{F}=(\vec{m}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} \qquad (۳)$$

از طرفی دیگر با استفاده از مسئله ۱۱ داریم

$$\vec{\nabla}(\vec{B}\cdot\vec{m})=\vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{m})+\vec{m}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})+(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{m}+(\vec{m}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}$$

با توجه به اینکه $\vec{m}$ بردار ثابتی است جمله اول و سوم برابر صفر است و با توجه به اینکه میدان مغناطیسی مستقل از زمان است، پس $\vec{\nabla}\times\vec{B}=۰$ بدین ترتیب

$$\vec{\nabla}(\vec{B}\cdot\vec{m})=(\vec{m}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} \qquad (٤)$$

از مقایسه روابط (۳) و (٤) بایکدیگر داریم

$$\vec{F}=\vec{\nabla}(\vec{B}\cdot\vec{m})$$

۱۶) یک گشتاور دو قطبی الکتریکی $\vec{p}$ در مبدا قرار دارد. پتانسیل الکتریکی حاصل از این دوقطبی در نقطه $\vec{r}$ برابر است با،

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{۴\pi\epsilon_۰ r^۳}$$

میدان الکتریکی ($\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$) را در $\vec{r}$ بدست آورید.(راهنمائی: از مسئله (۱۱) استفاده کنید)

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi = -\frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\vec{\nabla}\left(\vec{p}\cdot\frac{\vec{r}}{r^۳}\right)$$

با استفاده از مسئله ۱۱ داریم

$$\vec{\nabla}\left(\vec{p}\cdot\frac{\vec{r}}{r^۳}\right) = \frac{\vec{r}}{r^۳}\times(\vec{\nabla}\times\vec{p}) + \vec{p}\times(\vec{\nabla}\times\frac{\vec{r}}{r^۳}) + (\frac{\vec{r}}{r^۳}\cdot\vec{\nabla})\vec{p} + (\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\frac{\vec{r}}{r^۳}$$

با توجه به اینکه گشتاور دوقطبی $\vec{p}$ برداری ثابت است جمله اول و سوم عبارت بالا برابر صفرند. همچنین با استفاده از مسئله (۳)، $\vec{\nabla}\times\vec{r} = ۰$ بدین ترتیب

$$\vec{\nabla}\left(\vec{p}\cdot\frac{\vec{r}}{r^۳}\right) = (\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\frac{\vec{r}}{r^۳} = p_x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\vec{r}}{r^۳}\right) + p_y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\vec{r}}{r^۳}\right) + p_z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\vec{r}}{r^۳}\right)$$

$$\begin{aligned}
p_x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\vec{r}}{r^۳}\right) &= \hat{i}p_x\frac{۱}{r^۳} - ۳xp_x\frac{\vec{r}}{r^۵}\\
p_y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\vec{r}}{r^۳}\right) &= \hat{j}p_y\frac{۱}{r^۳} - ۳yp_y\frac{\vec{r}}{r^۵}\\
p_z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\vec{r}}{r^۳}\right) &= \hat{k}p_z\frac{۱}{r^۳} - ۳zp_z\frac{\vec{r}}{r^۵}
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\left(\vec{p}\cdot\frac{\vec{r}}{r^۳}\right) &= (\hat{i}p_x + \hat{j}p_y + \hat{k}p_z)\frac{۱}{r^۳} - ۳(xp_x + yp_y + zp_z)\frac{\vec{r}}{r^۵}\\
&= \frac{\vec{p}}{r^۳} - ۳(\vec{r}\cdot\vec{p})\frac{\vec{r}}{r^۵}
\end{aligned}$$

میدان الکتریکی ناشی از دوقطبی برابر

$$\vec{E} = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\left(\frac{۳(\vec{r}\cdot\vec{p})\vec{r}}{r^۵} - \frac{\vec{p}}{r^۳}\right)$$

۱۷) پتانسیل برداری $\vec{A}$ی یک دوقطبی مغناطیسی با گشتاور $\vec{m}$، از رابطه‌ی $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_۰}{۴\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^۳}$ تعیین می‌شود. نشان دهید میدان مغناطیسی $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ از رابطه‌ی زیر بدست آورید

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_۰}{۴\pi}\left(\frac{۳\vec{r}(\vec{r}\cdot\vec{m})}{r^۵} - \frac{\vec{m}}{r^۳}\right) = \frac{\mu_۰}{۴\pi}\frac{۳\hat{r}(\hat{r}\cdot\vec{m}) - \vec{m}}{r^۳}$$

که $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$ است.(راهنمائی: از مسئله (۱۱) استفاده کنید)

با استفاده از مسئله ۱۵ تمرین سری ۲، $\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} - \vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) + \vec{A}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})$، داریم

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{\mu_۰}{۴\pi}\vec{\nabla}\times\left(\vec{m}\times\frac{\vec{r}}{r^۳}\right) = \frac{\mu_۰}{۴\pi}\left[\left(\frac{\vec{r}}{r^۳}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{m} - (\vec{m}\cdot\vec{\nabla})\frac{\vec{r}}{r^۳} - \frac{\vec{r}}{r^۳}(\vec{\nabla}\cdot\vec{m}) + \vec{m}\left(\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{r}}{r^۳}\right)\right]$$

با توجه به اینکه $\vec{m}$ بردار ثابتی است جمله اول و سوم عبارت سمت راست بالا برابر صفرند و با توجه به مسئله (۳)، عبارت $\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{r}}{r^۳}$ نیز برابر صفر است، بنابراین

$$\vec{B} = -\frac{\mu_۰}{۴\pi}(\vec{m}\cdot\vec{\nabla})\frac{\vec{r}}{r^۳}$$

با استفاده از مسئله قبل داریم

$$\vec{B} = -\frac{\mu_۰}{۴\pi}\left(\frac{\vec{m}}{r^۳} - \frac{\vec{r}(\vec{m}\cdot\vec{r})}{r^۵}\right) = \frac{\mu_۰}{۴\pi}\left(\frac{\vec{r}(\vec{m}\cdot\vec{r})}{r^۵} - \frac{\vec{m}}{r^۳}\right)$$

مظفری