به نام خدا

تمرین شماره: ٤ درس ریاضی فیزیک ۱ تحویل: ۹۲/۱/۲۸

---

۱) درستی اتحاد زیر را بررسی کنید

$$\nabla^2\phi = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

و نشان دهید برای هر تابع دلخواه $f(r)$ که $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$، عبارت زیر برقرار است

$$\nabla^2 f(r) = \frac{2}{r}\frac{df(r)}{dr} + \frac{d^2 f(r)}{dr^2}$$

۲) درستی اتحادهای زیر را بررسی کنید

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\phi = 0, \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{A} = 0, \qquad \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}\vec{\nabla}\cdot\vec{A} - \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\vec{A}$$

۳) نشان دهید اگر ϕ یک تابع اسکالر مشتق‌پذیر باشد، داریم

$$\vec{\nabla}\times(\phi\vec{\nabla}\phi) = 0$$

٤) اگر ϕ و ψ توابع اسکالر مشتق‌پذیر باشند، نشان دهید $\vec{\nabla}\phi\times\vec{\nabla}\psi$ سیملوله ای است.

٥) اگر تابع اسکالر ϕ در معادله لاپلاس (یعنی $\nabla^2\phi = 0$) صدق کند. نشان دهید $\vec{\nabla}\phi$ هم سیملوله‌ای و هم غیرچرخشی است.

٦) سرعت جریان دو بعدی یک مایع از رابطه‌ی $\vec{V} = \hat{i}u(x,y) - \hat{j}v(x,y)$ داده می‌شود. اگر مایع تراکم ناپذیر (یعنی $\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = 0$) و غیرچرخشی (یعنی $\vec{\nabla}\times\vec{V} = 0$) باشد، نشان دهید

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

این رابطه معروف به رابطه کوشی ریمان است که در درس ریاضی فیزیک ۲ آنرا در توابع مختلط بررسی می‌کنید.

۷) معادلات ماکسول در غیاب چگالی بار آزاد (یعنی $\rho(\vec{r},t) = 0$) و جریان متناظر آن (یعنی $J(\vec{r},t) = 0$) بصورت

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

داده می‌شود. با استفاده از مسئله (۲) معادله موج الکترومغناطیس را هم برای میدان الکتریکی $\vec{E}$ و هم میدان مغناطیس $\vec{B}$ بدست آورید

$$\nabla^2\vec{E} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

۸) مسئله (۷) را برای حالتی که معادلات ماکسول چگالی جریان $\vec{J}$ مخالف صفر دارد، تکرار کنید. در این حالت شکل معادلات ماکسول بصورت

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0 \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\mu_0\vec{J}$$

می‌باشد. در اینجا فرض کنید قانون اهم($\vec{J}=\sigma\vec{E}$) برقرار است که در آن σ رسانندگی سیستم می‌باشد.

۹) مسئله (۷) را برای حالتی که معادلات ماکسول چگالی جریان و چگالی بار مخالف صفر دارد را از روش پتانسیل تکرار کنید. در این حالت شکل معادلات ماکسول بصورت

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\mu_0\vec{J}$$

می‌باشد. در اینجا با توجه به اینکه $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ می توان میدان مغناطیسی $\vec{B}$ را بصورت

$$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$$

نوشت که به $\vec{A}$ پتانسیل برداری گفته می‌شود. اگر عبارت بالا (یعنی $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$) را داخل $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}$ قرار دهیم مقدار آن برابر

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{A}=0$$

می‌شود. پس $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$. با استفاده از $\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ و اینکه $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$ داریم

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\Rightarrow\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{A}\Rightarrow\vec{\nabla}\times\left[\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right]=0$$

می‌توان $-\vec{\nabla}\phi=\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ چون $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\phi=0$. همچنین ϕ را پتانسیل اسکار می‌نامند. حالا با استفاده از پتانسیلهای برداری و اسکالر و روابط آنها با میدانهای الکتریکی و مغناطیسی

$$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A} \qquad \vec{E}=-\vec{\nabla}\phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

معادله موج الکترومغناطیسی را این بار برحسب پتانسیلها بدست آورید.

$$\nabla^2\vec{A}=\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\mu_0\vec{J}$$
$$\nabla^2\phi=\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-\frac{1}{\epsilon_0}\rho$$

(راهنمائی: در جریان حل مسئله به عبارت $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\phi}{\partial t}$ برخورد می‌کنید که آنرا برابر صفر قرار دهید که این رابطه به پیمانه لورنتس شناخته می‌شود.)

۱۰) در نظریه‌ی پائولی برای الکترون عبارت

$$(\vec{p}-e\vec{A})\times(\vec{p}-e\vec{A})\psi$$

ظاهر می‌شود که در آن ψ یک تابع نرده‌ای است. $\vec{A}$ پتانسیل برداری مغناطیسی است که با رابطه‌ی $\vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{B}$ به میدان مغناطیسی مربوط می‌شود. اگر داشته باشیم $\vec{p}=-i\vec{\nabla}$ نشان دهید

$$(\vec{p}-e\vec{A})\times(\vec{p}-e\vec{A})\psi=(i\vec{\nabla}+e\vec{A})\times(i\vec{\nabla}+e\vec{A})\psi=ie\vec{B}\psi$$

۱۱) تئوری انتقال حرارت به معادله

$$\nabla^{۲}\Psi=k|\nabla\Phi|^{۲}$$

منجر می‌شود که Φ پتانسیلی است که معادله لاپلاس را برآورده می‌کند($\nabla^{۲}\Phi=۰$). نشان دهید حل معادله بالا برابر

$$\nabla^{۲}\Psi=k|\nabla\Phi|^{۲}\Rightarrow\Psi=\frac{k}{۲}\Phi^{۲}$$

است.

۱۲) نشان دهید معادله ماتریس و برداری

$$\left(\vec{M}\cdot\vec{\nabla}+I\frac{۱}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi=۰$$

معادلات ماکسول را در خلا را باز تولید می‌کند(شکل این معادلات در مسئله (۷) داده شده است). اینجا ψ یک بردار ستونی با مولفه‌های $\psi_j=B_j-iE_j/c$ می‌باشد که $j=x,y,z$، همچنین $\frac{۱}{c^{۲}}=\mu_۰\epsilon_۰$ و ماتریسها برابرند با

$$M_x=\begin{bmatrix}۰&۰&۰\\۰&۰&-i\\۰&i&۰\end{bmatrix},\quad M_y=\begin{bmatrix}۰&۰&i\\۰&۰&۰\\-i&۰&۰\end{bmatrix},\quad M_z=\begin{bmatrix}۰&-i&۰\\i&۰&۰\\۰&۰&۰\end{bmatrix},\quad I=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}$$

مظفری