به نام خدا

تمرین شماره: ٤   درس ریاضی فیزیک ۱   تحویل: ۹۲/۱/۲۸

---

۱) درستی اتحاد زیر را بررسی کنید

$$\nabla^2\phi = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

و نشان دهید برای هر تابع دلخواه $f(r)$ که $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$، عبارت زیر برقرار است

$$\nabla^2 f(r) = \frac{2}{r}\frac{df(r)}{dr} + \frac{d^2f(r)}{dr^2}$$

باتوجه به تعریف گرادیان و واگرائی

$$\vec{\nabla}\phi = \hat{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

اگر $\vec{A} = \vec{\nabla}\phi$ یعنی

$$A_x = \frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad A_y = \frac{\partial\phi}{\partial y}, \quad A_z = \frac{\partial\phi}{\partial z}$$

بنابراین

$$\nabla^2\phi = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(r)}{\partial x}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\frac{df(r)}{dr}x\right) = \frac{1}{r}\frac{df(r)}{dr} + \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{df(r)}{dr}\right)\frac{x^2}{r} \\
&= \frac{1}{r}\frac{df(r)}{dr} - \left(\frac{1}{r^2}\frac{df(r)}{dr}\right)\frac{x^2}{r} + \left(\frac{1}{r}\frac{d^2f(r)}{dr^2}\right)\frac{x^2}{r} \\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(r)}{\partial y}\right) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\frac{df(r)}{dr}y\right) = \frac{1}{r}\frac{df(r)}{dr} + \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{df(r)}{dr}\right)\frac{y^2}{r} \\
&= \frac{1}{r}\frac{df(r)}{dr} - \left(\frac{1}{r^2}\frac{df(r)}{dr}\right)\frac{y^2}{r} + \left(\frac{1}{r}\frac{d^2f(r)}{dr^2}\right)\frac{y^2}{r} \\
\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f(r)}{\partial z}\right) &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{df(r)}{dr}z\right) = \frac{1}{r}\frac{df(r)}{dr} + \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{df(r)}{dr}\right)\frac{z^2}{r} \\
&= \frac{1}{r}\frac{df(r)}{dr} - \left(\frac{1}{r^2}\frac{df(r)}{dr}\right)\frac{z^2}{r} + \left(\frac{1}{r}\frac{d^2f(r)}{dr^2}\right)\frac{z^2}{r}
\end{aligned}$$

$$\nabla^2 f(r) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(r)}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(r)}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f(r)}{\partial z}\right) = \frac{2}{r}\frac{df(r)}{dr} + \frac{d^2f(r)}{dr^2}$$

۲) درستی اتحادهای زیر را بررسی کنید

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\phi=۰,\qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{A}=۰,\qquad \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})=\vec{\nabla}\vec{\nabla}\cdot\vec{A}-\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\vec{A}$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\phi&=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{i}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial\phi}{\partial x}&\frac{\partial\phi}{\partial y}&\frac{\partial\phi}{\partial z}\end{vmatrix}\\ &=\hat{i}\left(\frac{\partial^۲\phi}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^۲\phi}{\partial z\partial y}\right)+\hat{j}\left(\frac{\partial^۲\phi}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^۲\phi}{\partial x\partial z}\right)+\hat{k}\left(\frac{\partial^۲\phi}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^۲\phi}{\partial x\partial y}\right)=۰\end{aligned}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ A_x&A_y&A_z\end{vmatrix}=۰$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A}&=\left(\sum_i\hat{e}_i\partial_i\right)\times\left(\sum_{jkl}\partial_jA_k\epsilon_{jkl}\hat{e}_l\right)=\sum_{ijklm}\partial_i\partial_jA_k\epsilon_{jkl}\epsilon_{ilm}\hat{e}_m\\ &=\sum_{ijkm}\partial_i\partial_jA_k\left(\sum_l\epsilon_{jkl}\epsilon_{ilm}\right)\hat{e}_m\\ &=\sum_{ijkm}\partial_i\partial_jA_k\left(-\delta_{ij}\delta_{km}+\delta_{ik}\delta_{jm}\right)\hat{e}_m\\ &=-\sum_{ik}\partial_i\partial_iA_k\hat{e}_k+\sum_{ij}\partial_i\partial_jA_i\hat{e}_j\\ &=-\left(\sum_i\partial_i\partial_i\right)\left(\sum_kA_k\hat{e}_k\right)+\left(\sum_j\hat{e}_j\partial_j\right)\left(\sum_i\partial_iA_i\right)\\ &=-\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\vec{A}+\vec{\nabla}\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\end{aligned}$$

۳) نشان دهید اگر ϕ یک تابع اسکالر مشتق‌پذیر باشد، داریم

$$\vec{\nabla}\times(\phi\vec{\nabla}\phi)=۰$$

با استفاده از اتحاد $\vec{\nabla}\times(\phi\vec{A})=\vec{\nabla}\phi\times\vec{A}+\phi\vec{\nabla}\times\vec{A}$ و مسئله (۲) داریم

$$\vec{\nabla}\times(\phi\vec{\nabla}\phi)=(\vec{\nabla}\phi)\times(\vec{\nabla}\phi)+\phi\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\phi)=۰$$

٤) اگر ϕ و ψ توابع اسکالر مشتق‌پذیر باشند، نشان دهید $\vec{\nabla}\phi\times\vec{\nabla}\psi$ سیملوله ای است.
با استفاده از اتحاد $\vec{\nabla}\times(\phi\vec{A})=\vec{\nabla}\phi\times\vec{A}+\phi\vec{\nabla}\times\vec{A}$ و مسئله (۲) داریم

$$\vec{\nabla}\times(\phi\vec{\nabla}\psi)=\vec{\nabla}\phi\times\vec{\nabla}\psi+\phi\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\psi\Rightarrow\vec{\nabla}\times(\phi\vec{\nabla}\psi)=\vec{\nabla}\phi\times\vec{\nabla}\psi$$

حالا اگر از طرفین دیورژانس بگیریم، داریم

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times(\phi\vec{\nabla}\psi)=\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\phi\times\vec{\nabla}\psi)$$

با استفاده از مسئله (۲) عبارت سمت چپ برابر صفر است و در نهایت

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\phi\times\vec{\nabla}\psi)=۰$$

۵) اگر تابع اسکالر ϕ در معادله لاپلاس (یعنی $\nabla^۲\phi=۰$) صدق کند. نشان دهید $\vec{\nabla}\phi$ هم سیملوله‌ای و هم غیرچرخشی است.

با استفاده از مسئله (۲) $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\phi=۰$ یعنی $\vec{\nabla}\phi$ غیرچرخشی است و چون $\nabla^۲\phi=\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi=۰$ بنابراین $\vec{\nabla}\phi$ سیملوله‌ای است.

٦) سرعت جریان دو بعدی یک مایع از رابطه‌ی $\vec{V}=\hat{i}u(x,y)-\hat{j}v(x,y)$ داده می‌شود. اگر مایع تراکم ناپذیر (یعنی $\vec{\nabla}\cdot\vec{V}=۰$) و غیرچرخشی (یعنی $\vec{\nabla}\times\vec{V}=۰$) باشد، نشان دهید

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

این رابطه معروف به رابطه کوشی ریمان است که در درس ریاضی فیزیک ۲ آنرا در توابع مختلط بررسی می‌کنید.

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\cdot\vec{V}=۰&\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=۰\\ \vec{\nabla}\times\vec{V}=۰&\Rightarrow\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\hat{k}=۰\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=۰\end{aligned}$$

۷) معادلات ماکسول در غیاب چگالی بار آزاد (یعنی $\rho(\vec{r},t)=۰$) و جریان متناظر آن (یعنی $J(\vec{r},t)=۰$) بصورت

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=۰\qquad\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=۰\qquad\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\qquad\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_۰\epsilon_۰\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

داده می‌شود. با استفاده از مسئله (۲) معادله موج الکترومغناطیس را هم برای میدان الکتریکی $\vec{E}$ و هم میدان مغناطیس $\vec{B}$ بدست آورید

$$\begin{aligned}\nabla^۲\vec{E}&=\mu_۰\epsilon_۰\frac{\partial^۲\vec{E}}{\partial t^۲}\\ \nabla^۲\vec{B}&=\mu_۰\epsilon_۰\frac{\partial^۲\vec{B}}{\partial t^۲}\end{aligned}$$

از طرفین معادله $\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ کرل می‌گیریم

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)=-\vec{\nabla}\times\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)$$

با استفاده از مسئله (۲)

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})-\nabla^{۲}\vec{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)$$

با قرار دادن $\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_{۰}\epsilon_{۰}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ و $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=۰$ در رابطه بالا داریم

$$\nabla^{۲}\vec{E}=\mu_{۰}\epsilon_{۰}\frac{\partial^{۲}\vec{E}}{\partial t^{۲}}$$

از طرفین معادله $\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_{۰}\epsilon_{۰}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ کرل می‌گیریم

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)=\mu_{۰}\epsilon_{۰}\vec{\nabla}\times\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

با استفاده از مسئله (۲)

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})-\nabla^{۲}\vec{B}=\mu_{۰}\epsilon_{۰}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)$$

با قرار دادن $\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ و $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=۰$ در رابطه بالا داریم

$$\nabla^{۲}\vec{B}=\mu_{۰}\epsilon_{۰}\frac{\partial^{۲}\vec{B}}{\partial t^{۲}}$$

۸) مسئله (۷) را برای حالتی که معادلات ماکسول چگالی جریان $\vec{J}$ مخالف صفر دارد، تکرار کنید. در این حالت شکل معادلات ماکسول بصورت

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=۰\qquad\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=۰\qquad\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\qquad\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_{۰}\epsilon_{۰}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\mu_{۰}\vec{J}$$

می‌باشد. در اینجا فرض کنید قانون اهم($\vec{J}=\sigma\vec{E}$) برقرار است که در آن σ رسانندگی سیستم می‌باشد.

از طرفین معادله $\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ کرل می‌گیریم

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)=-\vec{\nabla}\times\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)$$

با استفاده از مسئله (۲)

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})-\nabla^{۲}\vec{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)$$

با قرار دادن $\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_{۰}\epsilon_{۰}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\mu_{۰}\sigma\vec{E}$ و $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=۰$ در رابطه بالا داریم

$$\nabla^{۲}\vec{E} = \mu_۰\epsilon_۰\frac{\partial^{۲}\vec{E}}{\partial t^{۲}} + \mu_۰\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

از طرفین معادله $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_۰\epsilon_۰\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu_۰\sigma\vec{E}$ کرل می‌گیریم

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right) = \vec{\nabla}\times\left(\mu_۰\epsilon_۰\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu_۰\sigma\vec{E}\right)$$

با استفاده از مسئله (۲)

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) - \nabla^{۲}\vec{B} = \mu_۰\epsilon_۰\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) + \mu_۰\sigma\vec{\nabla}\times\vec{E}$$

با قرار دادن $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ و $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = ۰$ در رابطه بالا داریم

$$\nabla^{۲}\vec{B} = \mu_۰\epsilon_۰\frac{\partial^{۲}\vec{B}}{\partial t^{۲}} + \mu_۰\sigma\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

۹) مسئله (۷) را برای حالتی که معادلات ماکسول چگالی جریان و چگالی بار مخالف صفر دارد را از روش پتانسیل تکرار کنید. در این حالت شکل معادلات ماکسول بصورت

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_۰} \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = ۰ \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_۰\epsilon_۰\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu_۰\vec{J}$$

می‌باشد. در اینجا با توجه به اینکه $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = ۰$ می توان میدان مغناطیسی $\vec{B}$ را بصورت

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

نوشت که به $\vec{A}$ پتانسیل برداری گفته می‌شود. اگر عبارت بالا (یعنی $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$) را داخل $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}$ قرار دهیم مقدار آن برابر $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{A} = ۰$ می‌شود. پس $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$. با استفاده از $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ و اینکه $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ داریم

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{A} \Rightarrow \vec{\nabla}\times\left[\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right] = ۰$$

می‌توان $-\vec{\nabla}\phi = \vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ چون $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\phi = ۰$. همچنین ϕ را پتانسیل اسکار می‌نامند. حالا با استفاده از پتانسیلهای برداری و اسکالر و روابط آنها با میدانهای الکتریکی و مغناطیسی

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

معادله موج الکترومغناطیسی را این بار برحسب پتانسیلها بدست آورید.

$$\nabla^{۲}\vec{A} = \mu_۰\epsilon_۰\frac{\partial^{۲}\vec{A}}{\partial t^{۲}} - \mu_۰\vec{J}$$
$$\nabla^{۲}\phi = \mu_۰\epsilon_۰\frac{\partial^{۲}\phi}{\partial t^{۲}} - \frac{۱}{\epsilon_۰}\rho$$

(راهنمائی: در جریان حل مسئله به عبارت $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\mu_\circ\epsilon_\circ\frac{\partial\phi}{\partial t}$ برخورد می‌کنید که آنرا برابر صفر قرار دهید که این رابطه به پیمانه لورنتس شناخته می‌شود.)

با قرار دادن $\vec{E}=-\vec{\nabla}\phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ در معادله $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\epsilon_\circ}$ داریم

$$\vec{\nabla}\cdot\left(-\vec{\nabla}\phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=\frac{\rho}{\epsilon_\circ}\Rightarrow-\nabla^{2}\phi-\vec{\nabla}\cdot\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=\frac{\rho}{\epsilon_\circ}\Rightarrow-\nabla^{2}\phi-\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=\frac{\rho}{\epsilon_\circ}$$

با استفاده از راهنمائی مسئله که $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\mu_\circ\epsilon_\circ\frac{\partial\phi}{\partial t}=0$ داریم

$$\nabla^{2}\phi+\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=-\frac{\rho}{\epsilon_\circ}\Rightarrow\nabla^{2}\phi-\mu_\circ\epsilon_\circ\frac{\partial^{2}\phi}{\partial t^{2}}=-\frac{\rho}{\epsilon_\circ}\Rightarrow\nabla^{2}\phi=\mu_\circ\epsilon_\circ\frac{\partial^{2}\phi}{\partial t^{2}}-\frac{\rho}{\epsilon_\circ}$$

با قرار دادن $\vec{E}=-\vec{\nabla}\phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ و $\vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{B}$ در معادله $\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_\circ\epsilon_\circ\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\mu_\circ\vec{J}$ داریم

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})&=\mu_\circ\epsilon_\circ\frac{\partial}{\partial t}\left(-\vec{\nabla}\phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)+\mu_\circ\vec{J}\\-\nabla^{2}\vec{A}+\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})&=-\vec{\nabla}\left(\mu_\circ\epsilon_\circ\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)-\mu_\circ\epsilon_\circ\frac{\partial^{2}\vec{A}}{\partial t^{2}}+\mu_\circ\vec{J}\\-\nabla^{2}\vec{A}&=-\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\mu_\circ\epsilon_\circ\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)-\mu_\circ\epsilon_\circ\frac{\partial^{2}\vec{A}}{\partial t^{2}}+\mu_\circ\vec{J}\end{aligned}$$

با استفاده از راهنمائی مسئله که $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\mu_\circ\epsilon_\circ\frac{\partial\phi}{\partial t}=0$ داریم

$$\nabla^{2}\vec{A}=\mu_\circ\epsilon_\circ\frac{\partial^{2}\vec{A}}{\partial t^{2}}-\mu_\circ\vec{J}$$

۱۰) در نظریه‌ی پائولی برای الکترون عبارت

$$(\vec{p}-e\vec{A})\times(\vec{p}-e\vec{A})\psi$$

ظاهر می‌شود که در آن ψ یک تابع نرده‌ای است. $\vec{A}$ پتانسیل برداری مغناطیسی است که با رابطه‌ی $\vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{B}$ به میدان مغناطیسی مربوط می‌شود. اگر داشته باشیم $\vec{p}=-i\vec{\nabla}$ نشان دهید

$$(\vec{p}-e\vec{A})\times(\vec{p}-e\vec{A})\psi=(i\vec{\nabla}+e\vec{A})\times(i\vec{\nabla}+e\vec{A})\psi=ie\vec{B}\psi$$

$$\begin{aligned}(i\vec{\nabla}+e\vec{A})\times(i\vec{\nabla}+e\vec{A})\psi&=i\vec{\nabla}\times(i\vec{\nabla}\psi+e\vec{A}\psi)+e\vec{A}\times(i\vec{\nabla}\psi+e\vec{A}\psi)\\&=-\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\psi+ie\vec{\nabla}\times(\vec{A}\psi)+ie\vec{A}\times\vec{\nabla}\psi+e\vec{A}\times\vec{A}\psi\end{aligned}$$

جمله اول وآخر عبارت بالا برابر صفراند. بنابراین

$$\begin{aligned}(i\vec{\nabla}+e\vec{A})\times(i\vec{\nabla}+e\vec{A})\psi&=ie(\vec{\nabla}\psi\times\vec{A}+\psi\vec{\nabla}\times\vec{A})+ie\vec{A}\times\vec{\nabla}\psi\\&=-ie\vec{A}\times\vec{\nabla}\psi+ie\psi\vec{\nabla}\times\vec{A}+ie\vec{A}\times\vec{\nabla}\psi\\&=ie\psi\vec{\nabla}\times\vec{A}=ie\psi\vec{B}\end{aligned}$$

۱۱) تئوری انتقال حرارت به معادله

$$\nabla^۲\Psi = k|\nabla\Phi|^۲$$

منجر می‌شود که Φ پتانسیلی است که معادله لاپلاس را برآورده می‌کند($\nabla^۲\Phi = ۰$). نشان دهید حل معادله بالا برابر

$$\nabla^۲\Psi = k|\nabla\Phi|^۲ \Rightarrow \Psi = \frac{k}{۲}\Phi^۲$$

است.

$$\nabla \cdot \nabla\Phi^۲ = \nabla \cdot (۲\Phi\nabla\Phi) = ۲(\nabla\Phi \cdot \nabla\Phi + \Phi\nabla^۲\Phi)$$

با توجه به فرض مسئله $\nabla^۲\Phi = ۰$ داریم

$$\nabla \cdot \nabla\Phi^۲ = ۲\nabla\Phi \cdot \nabla\Phi = ۲|\nabla\Phi|^۲ \Rightarrow |\nabla\Phi|^۲ = \frac{۱}{۲}\nabla^۲\Phi^۲$$

باقرار دادن $|\nabla\Phi|^۲$ در $\nabla^۲\Psi = k|\nabla\Phi|^۲$ داریم

$$\nabla^۲\Psi = k\frac{۱}{۲}\nabla^۲\Phi^۲ \Rightarrow \nabla^۲\left(\Psi - k\frac{۱}{۲}\Phi^۲\right) = ۰ \Rightarrow \Psi - k\frac{۱}{۲}\Phi^۲ = \vec{c} \cdot \vec{r} + c'$$

که $\vec{c}$ و c' کمیتهای برداری و عددی ثابت می‌باشند. اگر مقدار $\vec{c}$ و c' برابر صفر باشند

$$\Psi = k\frac{۱}{۲}\Phi^۲$$

۱۲) نشان دهید معادله ماتریس و برداری

$$\left(\vec{M} \cdot \vec{\nabla} + I\frac{۱}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi = ۰$$

معادلات ماکسول را در خلا را باز تولید می‌کند(شکل این معادلات در مسئله (۷) داده شده است). اینجا ψ یک بردار ستونی با مولفه‌های $\psi_j = B_j - iE_j/c$ می‌باشد که $j = x, y, z$، همچنین $\frac{۱}{c^۲} = \mu_۰\epsilon_۰$ و ماتریسها برابرند با

$$M_x = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -i \\ ۰ & i & ۰ \end{bmatrix}, \quad M_y = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & i \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ -i & ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \quad M_z = \begin{bmatrix} ۰ & -i & ۰ \\ i & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\left(M_x\frac{\partial}{\partial x} + M_y\frac{\partial}{\partial y} + M_z\frac{\partial}{\partial z} + I\frac{۱}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi = ۰$$

$$\begin{bmatrix} \frac{۱}{c}\frac{\partial}{\partial t} & -i\frac{\partial}{\partial z} & i\frac{\partial}{\partial y} \\ i\frac{\partial}{\partial z} & \frac{۱}{c}\frac{\partial}{\partial t} & -i\frac{\partial}{\partial x} \\ -i\frac{\partial}{\partial y} & i\frac{\partial}{\partial x} & \frac{۱}{c}\frac{\partial}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_x - i\frac{۱}{c}E_x \\ B_y - i\frac{۱}{c}E_y \\ B_z - i\frac{۱}{c}E_z \end{bmatrix} = ۰$$

انجام عملیات ضرب یک ماتریس در یک بردار در رابطه‌ی بالا

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(B_x - i\frac{1}{c}E_x\right) - i\frac{\partial}{\partial z}\left(B_y - i\frac{1}{c}E_y\right) + i\frac{\partial}{\partial y}\left(B_z - i\frac{1}{c}E_z\right) = 0\\
&i\frac{\partial}{\partial z}\left(B_x - i\frac{1}{c}E_x\right) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(B_y - i\frac{1}{c}E_y\right) - i\frac{\partial}{\partial x}\left(B_z - i\frac{1}{c}E_z\right) = 0\\
&-i\frac{\partial}{\partial y}\left(B_x - i\frac{1}{c}E_x\right) + i\frac{\partial}{\partial x}\left(B_y - i\frac{1}{c}E_y\right) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(B_z - i\frac{1}{c}E_z\right) = 0
\end{aligned}
$$

جدا کردن قسمت حقیقی و موهومی از یکدیگر

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{c}\left(\frac{\partial B_x}{\partial t} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial y}\right) - i\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y}\right) = 0\\
&\frac{1}{c}\left(\frac{\partial B_y}{\partial t} + \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) - i\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial t} - \frac{\partial B_x}{\partial z} + \frac{\partial B_z}{\partial x}\right) = 0\\
&\frac{1}{c}\left(\frac{\partial B_z}{\partial t} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial x}\right) - i\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x}\right) = 0
\end{aligned}
$$

وقتی یک عبارت مختلط برابر صفر قرار می‌گیرد، قسمتهای حقیقی و موهومی آن بطور جداگانه برابر صفر می‌شوند، بنابراین

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial B_x}{\partial t} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial y} = 0, \qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y} = 0\\
&\frac{\partial B_y}{\partial t} + \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0, \qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial t} - \frac{\partial B_x}{\partial z} + \frac{\partial B_z}{\partial x} = 0\\
&\frac{\partial B_z}{\partial t} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0, \qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x} = 0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

عبارتهای سمت چپ معادلات (۱) را می‌توان بصورت فشرده زیر نوشت

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\tfrac{\partial B_x}{\partial t} - \tfrac{\partial E_y}{\partial z} + \tfrac{\partial E_z}{\partial y} = 0 \Rightarrow \tfrac{\partial B_x}{\partial t} + \left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_x = 0\\
&\tfrac{\partial B_y}{\partial t} + \tfrac{\partial E_x}{\partial z} - \tfrac{\partial E_z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \tfrac{\partial B_y}{\partial t} + \left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_y = 0\\
&\tfrac{\partial B_z}{\partial t} - \tfrac{\partial E_x}{\partial y} + \tfrac{\partial E_y}{\partial x} = 0 \Rightarrow \tfrac{\partial B_z}{\partial t} + \left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_z = 0
\end{aligned}
\right.
\quad \Rightarrow \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\times\vec{E}
$$

و همچنین عبارتهای سمت راست معادلات (۱) را می‌توان بصورت فشرده زیر نوشت

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{c^2}\tfrac{\partial E_x}{\partial t} + \tfrac{\partial B_y}{\partial z} - \tfrac{\partial B_z}{\partial y} = 0 \Rightarrow \tfrac{1}{c^2}\tfrac{\partial E_x}{\partial t} - \left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)_x = 0\\
&\tfrac{1}{c^2}\tfrac{\partial E_y}{\partial t} - \tfrac{\partial B_x}{\partial z} + \tfrac{\partial B_z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \tfrac{1}{c^2}\tfrac{\partial E_y}{\partial t} - \left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)_y = 0\\
&\tfrac{1}{c^2}\tfrac{\partial E_z}{\partial t} + \tfrac{\partial B_x}{\partial y} - \tfrac{\partial B_y}{\partial x} = 0 \Rightarrow \tfrac{1}{c^2}\tfrac{\partial E_z}{\partial t} - \left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)_z = 0
\end{aligned}
\right.
\quad \Rightarrow \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{\nabla}\times\vec{B}
$$