به نام خدا

تمرین شماره: ۵   درس ریاضی فیزیک ۱   تحویل: ۹۲/۲/٤

---

۱) میدان نیروی وارد بر یک نوسانگر خطی دوبعدی توسط $\vec{F} = -\hat{i}kx - \hat{j}ky$ توصیف می‌شود. کار انجام شده برای رفتن از نقطه A به نقطه C را از مسیرهای زیر بدست آورید. (الف) $(۱,۱) \rightarrow (٤,۱) \rightarrow (٤,٤)$ (ب) $(۱,۱) \rightarrow (۱,٤) \rightarrow (٤,٤)$ (ج) $(۱,۱) \rightarrow (٤,٤)$ در امتداد $y = x$

۲) کار انجام شده در برابر میدان نیروی $\vec{F} = -\hat{i}\frac{y}{x^۲+y^۲} + \hat{j}\frac{x}{x^۲+y^۲}$ روی یک دایره به شعاع $R = ۱$ در صفحه xy برای دو حالت زیر بررسی کنید

الف) از صفر تا π در جهت پادساعتگرد، ب) از صفر تا $-\pi$ در جهت ساعتگرد

۳) کار انجام شده در برابر میدان نیروی $\vec{F} = \hat{i}(x-y) + \hat{j}(x+y)$ برای رفتن از نقطه $(۱,۱)$ به نقطه $(۳,۳)$ را بدست آورید و نشان دهید که نیرو ناپایستار است.

٤) درستی اتحادهای زیر را برای حجم $d\tau = dxdydz$ در نقطه دلخواه $p(x,y,z)$ بررسی کنید

$$\vec{\nabla}\phi = \lim_{\int d\tau \rightarrow ۰} \frac{\oint_s \phi \vec{ds}}{\int d\tau}, \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \lim_{\int d\tau \rightarrow ۰} \frac{\oint_s \vec{A}\cdot\vec{ds}}{\int d\tau}, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{A} = \lim_{\int d\tau \rightarrow ۰} \frac{\oint_s \vec{ds}\times\vec{A}}{\int d\tau}$$

۵) اگر $\phi(x,y,z)$ یک میدان اسکالر باشد، نشان دهید

$$\oint \phi\vec{ds} = \int \vec{\nabla}\phi d\tau$$

٦) اگر $\vec{G}(x,y,z)$ یک میدان برداری باشد، نشان دهید

$$\oint \vec{ds}\times\vec{G} = \int \vec{\nabla}\times\vec{G}d\tau$$

۷) نشان دهید $\oint \vec{ds} = ۰$

۸) نشان دهید $\oint \vec{r}\cdot\vec{ds} = ۳\Omega$، که Ω حجم سیستم تحت بررسی می‌باشد.

۹) اگر $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ نشان دهید $\oint \vec{B}\cdot\vec{ds} = ۰$

۱۰) اگر در حجم Ω فرض کنیم که ψ یک جواب معادله لاپلاس است(یعنی $\nabla^۲\psi = ۰$). نشان دهید $\oint \vec{\nabla}\psi\cdot\vec{ds} = ۰$

۱۱) درستی اتحادهای زیر را برای مساحت $da = dxdz$ در نقطه دلخواه $p(x,y,z)$ بررسی کنید

$$\hat{n}\times\vec{\nabla}\phi = \lim_{\int da \rightarrow ۰} \frac{\oint_c \phi\vec{dl}}{\int da}, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot\hat{n} = \lim_{\int d\tau \rightarrow ۰} \frac{\oint_c \vec{A}\cdot\vec{dl}}{\int da}, \qquad (\vec{n}\times\vec{\nabla})\times\vec{A} = \lim_{\int da \rightarrow ۰} \frac{\oint_c \vec{dl}\times\vec{A}}{\int da}$$

که در آن $\hat{n}$ بردار یکه عمود برسطح da می‌باشد.

۱۲) اگر $\phi(x,y,z)$ یک میدان اسکالر باشد، نشان دهید

$$\oint \phi \vec{dl} = \int \vec{ds} \times \vec{\nabla}\phi$$

۱۳) اگر $\vec{G}(x,y,z)$ یک میدان برداری باشد، نشان دهید

$$\oint \vec{dr} \times \vec{G} = \int (\vec{ds} \times \vec{\nabla}) \times \vec{G}$$

۱٤) اگر بردار $\vec{t} = -\hat{i}y + \hat{j}x$، نشان دهید

$$\oint \vec{t} \cdot \vec{dl} = ۲A$$

در اینجا انتگرال روی منحنی بسته و پیوسته‌ای در صفحه‌ی xy محاسبه می‌شود و A مساحت است که منحنی آنرا احاطه کرده است.

۱٥) نشان دهید برای هر مسیر بسته دلخواه $\oint \vec{r} \times \vec{dl}$ دو برابر مساحت است که مسیر مربوطه آنرا در بر می‌گیرد.

۱٦) یکی از معادلات ماکسول به ازای $\vec{E} = ۰$ عبارت است از $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$ که در آن $\vec{J}$ چگالی جریان است. نشان دهید

$$\oint \vec{H} \cdot \vec{dl} = \int \vec{J} \cdot \vec{ds} = I$$

که در آن I جریان خالصی است که از حلقه انتگرالگیری می‌گذرد.

۱۷) میدان مغناطیسی $\vec{B}$ از جریان الکتریکی در حلقه‌ای به شعاع R ایجاد می‌شود. نشان دهید بزرگی پتانسیل برداری $\vec{A}$ در حلقه برابر است با

$$|A| = \frac{\phi}{۲\pi R}$$

که در آن $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ و ϕ شار مغناطیسی کلی است که از حلقه عبور می‌کند(یعنی $\int \vec{B} \cdot \vec{ds} = \phi$).

۱۸) درستی اتحادهای زیر را بررسی کنید

$$\oint u\vec{\nabla}v \cdot \vec{dl} = -\oint v\vec{\nabla}u \cdot \vec{dl}$$
$$\oint u\vec{\nabla}v \cdot \vec{dl} = \int (\vec{\nabla}v) \times (\vec{\nabla}u) \cdot \vec{ds}$$

مظفّری