به نام خدا

تمرین شماره: ۵ درس ریاضی فیزیک ۱ تحویل: ۹۲/۲/٤

---

۱) میدان نیروی وارد بر یک نوسانگر خطی دوبعدی توسط $\vec{F} = -\hat{i}kx - \hat{j}ky$ توصیف می‌شود. کار انجام شده برای رفتن از نقطه A به نقطه C را از مسیرهای زیر بدست آورید: (الف) $(۱,۱) \to (٤,۱) \to (٤,٤)$ (ب) $(۱,۱) \to (۱,٤) \to (٤,٤)$ (ج) $(۱,۱) \to (٤,٤)$ در امتداد $y = x$

(الف) برای $(۱,۱) \to (٤,۱)$:

$$y = ۱, \quad ,۱ \leq x \leq ٤, \quad \vec{dl} = \hat{i}dx$$

و برای $(٤,۱) \to (٤,٤)$:

$$x = ٤, \quad ,۱ \leq y \leq ٤, \quad \vec{dl} = \hat{j}dy$$

$$W_{(۱,۱)\to(٤,۱)} = -\int_{۱}^{٤} kxdx = -\frac{۱}{۲}kx^{۲}|_{۱}^{٤} = -\frac{۱۵}{۲}k$$
$$W_{(٤,۱)\to(٤,٤)} = -\int_{۱}^{٤} kydy = -\frac{۱}{۲}ky^{۲}|_{۱}^{٤} = -\frac{۱۵}{۲}k$$

مقدار نهایی کار برابر

$$W_{(۱,۱)\to(٤,۱)} + W_{(٤,۱)\to(٤,٤)} = -۱۵k$$

(ب) برای $(۱,۱) \to (۱,٤)$:

$$x = ۱, \quad ,۱ \leq y \leq ٤, \quad \vec{dl} = \hat{j}dy$$

و برای $(۱,٤) \to (٤,٤)$:

$$y = ٤, \quad ,۱ \leq x \leq ٤, \quad \vec{dl} = \hat{i}dx$$

$$W_{(۱,۱)\to(۱,٤)} = -\int_{۱}^{٤} kydy = -\frac{۱}{۲}ky^{۲}|_{۱}^{٤} = -\frac{۱۵}{۲}k$$
$$W_{(۱,٤)\to(٤,٤)} = -\int_{۱}^{٤} kxdx = -\frac{۱}{۲}kx^{۲}|_{۱}^{٤} = -\frac{۱۵}{۲}k$$

مقدار نهایی کار برابر

$$W_{(۱,۱)\to(۱,٤)} + W_{(۱,٤)\to(٤,٤)} = -۱۵k$$

(ج) برای $(۱,۱) \to (٤,٤)$:

$$y = x = t, \quad ,۱ \le t \le ٤, \quad \vec{dl} = (\hat{i} + \hat{j})dt$$

$$W_{(۱,۱)\to(٤,٤)} = -۲\int_۱^٤ ktdt = -۲\frac{۱}{۲}kt^۲|_۱^٤ = -۱۵k$$

۲) کار انجام شده در برابر میدان نیروی $\vec{F} = -\hat{i}\frac{y}{x^۲+y^۲} + \hat{j}\frac{x}{x^۲+y^۲}$ روی یک دایره به شعاع $R = ۱$ در صفحه xy برای دو حالت زیر بررسی کنید
الف) از صفر تا π در جهت پادساعتگرد، ب) از صفر تا $-\pi$ در جهت ساعتگرد
برای سادگی از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم

$$x = \cos\theta$$
$$y = \sin\theta$$

در این صورت

$$\vec{F} = -\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta$$

(الف) $۰ \le \theta \le \pi$:

$$\vec{dl} = (-\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta)d\theta$$
$$W = \int_۰^\pi (-\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta)\cdot(-\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta)d\theta = ۲\int_۰^\pi d\theta = ۲\pi$$

۳) کار انجام شده در برابر میدان نیروی $\vec{F} = \hat{i}(x-y) + \hat{j}(x+y)$ برای رفتن از نقطه $(۱,۱)$ به نقطه $(۳,۳)$ را بدست آورید و نشان دهید که نیرو ناپایستار است.

(الف) برای $(۱,۱) \to (۳,۱)$:

$$y = ۱, \quad ,۱ \le x \le ۳, \quad \vec{dl} = \hat{i}dx$$
$$\vec{F} = \hat{i}(x-۱) + \hat{j}(x+۱)$$

و برای $(۳,۱) \to (۳,۳)$:

$$x = ۳, \quad ,۱ \le y \le ۳, \quad \vec{dl} = \hat{j}dy$$
$$\vec{F} = \hat{i}(۳-y) + \hat{j}(۳+y)$$

$$W_{(۱,۱)\to(۳,۱)} = \int_۱^۳ (x-۱)dx = (\frac{۱}{۲}x^۲ - x)|_۱^۳ = ۲$$
$$W_{(۳,۱)\to(۳,۳)} = \int_۱^۳ (y+۳)dy = (\frac{۱}{۲}y^۲ + ۳y)|_۱^۳ = ۱۰$$

مقدار نهایی کار برابر

$$W_{(۱,۱)\to(۳,۱)} + W_{(۳,۱)\to(۳,۳)} = ۱۲ \qquad (۱)$$

(ب) برای $(۱,۱) \to (۱,۳)$:

$$x = ۱, \quad ,۱ \leq y \leq ۳, \quad \vec{dl} = \hat{j}dy$$
$$\vec{F} = \hat{i}(۱-y) + \hat{j}(۱+y)$$

و برای $(۱,۳) \to (۳,۳)$:

$$y = ۳, \quad ,۱ \leq x \leq ۳, \quad \vec{dl} = \hat{i}dx$$
$$\vec{F} = \hat{i}(x-۳) + \hat{j}(x+۳)$$

$$W_{(۱,۱)\to(۱,۳)} = \int_۱^۳ (۱+y)dy = (\frac{۱}{۲}y^۲ + y)|_۱^۳ = ٦$$
$$W_{(۱,۳)\to(۳,۳)} = \int_۱^۳ (x-۳)dx = (\frac{۱}{۲}x^۲ - ۳x)|_۱^۳ = ۲$$

مقدار نهایی کار برابر

$$W_{(۱,۱)\to(۱,۳)} + W_{(۱,۳)\to(۳,۳)} = ۸ \qquad (۲)$$

روابط (۱) و (۲) نشان می‌دهد نیرو پایستار نیست.

٤) درستی اتحادهای زیر را برای حجم $d\tau = dxdydz$ در نقطه دلخواه $p(x,y,z)$ بررسی کنید

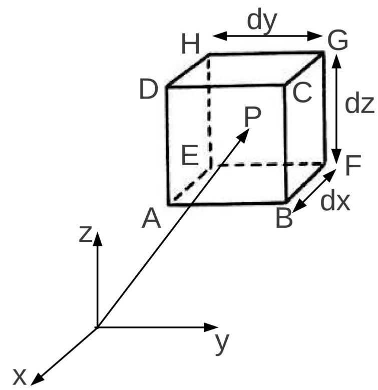
$$\vec{\nabla}\phi = \lim_{\int d\tau \to ۰} \frac{\oint_s \phi \vec{ds}}{\int d\tau}, \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \lim_{\int d\tau \to ۰} \frac{\oint_s \vec{A}\cdot\vec{ds}}{\int d\tau}, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{A} = \lim_{\int d\tau \to ۰} \frac{\oint_s \vec{ds}\times\vec{A}}{\int d\tau}$$

مطابق شکل نقطه $P(x,y,z)$ در وسط مکعب با حجم $d\tau = dxdydz$ قرار دارد. انتگرال بسته $\oint$ را می‌توان بصورت

$$\oint = \int_{ABCD} + \int_{EFGH} + \int_{ABFE} + \int_{DCGH} + \int_{BFGC} + \int_{AEHD}$$

به صفحات تشکیل دهنده مکعب تجزیه کرد.
در صفحه $ABCD$:

$$\vec{ds} = \hat{i}dydz, \qquad \phi = \phi(x + \frac{dx}{۲}, y, z), \qquad \vec{A} = \vec{A}(x + \frac{dx}{۲}, y, z)$$



در صفحه $EFGH$:

$$\vec{ds} = -\hat{i}dydz, \qquad \phi = \phi(x - \frac{dx}{۲}, y, z), \qquad \vec{A} = \vec{A}(x - \frac{dx}{۲}, y, z)$$

در صفحه $ABFE$:

$$\vec{ds} = -\hat{k}dxdy, \qquad \phi = \phi(x, y, z - \frac{dz}{۲}), \qquad \vec{A} = \vec{A}(x, y, z - \frac{dz}{۲})$$

در صفحه $DCGH$:

$$\vec{ds} = \hat{k}dxdy, \qquad \phi = \phi(x, y, z + \frac{dz}{۲}), \qquad \vec{A} = \vec{A}(x, y, z + \frac{dz}{۲})$$

در صفحه $BFGC$:

$$\vec{ds} = \hat{j}dzdx, \qquad \phi = \phi(x, y + \frac{dy}{۲}, z), \qquad \vec{A} = \vec{A}(x, y + \frac{dy}{۲}, z)$$

در صفحه $AEHD$:

$$\vec{ds} = -\hat{j}dzdx, \qquad \phi = \phi(x, y - \frac{dy}{۲}, z), \qquad \vec{A} = \vec{A}(x, y - \frac{dy}{۲}, z)$$

$$\begin{aligned}\oint \phi \vec{ds} = {} & \hat{i}\int_{ABCD} \phi(x + \frac{dx}{۲}, y, z)dydz - \hat{i}\int_{EFGH} \phi(x - \frac{dx}{۲}, y, z)dydz \\ & - \hat{k}\int_{ABFE} \phi(x, y, z - \frac{dz}{۲})dxdy + \hat{k}\int_{DCGH} \phi(x, y, z + \frac{dz}{۲})dxdy \\ & + \hat{j}\int_{BFGC} \phi(x, y + \frac{dy}{۲}, z)dxdz - \hat{j}\int_{AEHD} \phi(x, y - \frac{dy}{۲}, z)dxdz\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\oint \phi \vec{ds} = \hat{i} \int \left(\phi(x + \frac{dx}{۲}, y, z) - \phi(x - \frac{dx}{۲}, y, z) \right) dydz \\
+ \hat{k} \int \left(\phi(x, y, z + \frac{dz}{۲}) - \phi(x, y, z - \frac{dz}{۲}) \right) dxdy \\
+ \hat{j} \int \left(\phi(x, y + \frac{dy}{۲}, z) - \phi(x, y - \frac{dy}{۲}, z) \right) dxdz
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\oint \phi \vec{ds} = \hat{i} \int \left(\phi + \frac{dx}{۲} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \phi + \frac{dx}{۲} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dydz \\
+ \hat{k} \int \left(\phi + \frac{dz}{۲} \frac{\partial \phi}{\partial z} - \phi + \frac{dz}{۲} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) dxdy \\
+ \hat{j} \int \left(\phi + \frac{dy}{۲} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \phi + \frac{dy}{۲} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dzdx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\oint \phi \vec{ds} &= \hat{i} \int \frac{\partial \phi}{\partial x} dxdydz + \hat{k} \int \frac{\partial \phi}{\partial z} dxdydz + \hat{j} \int \frac{\partial \phi}{\partial y} dxdydz \\
&= \int \left(\hat{i} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) dxdydz = \int \vec{\nabla} \phi d\tau
\end{aligned}
$$

اگر $\int d\tau \to ۰$ داریم

$$
\oint \phi \vec{ds} = \int \vec{\nabla} \phi d\tau = \vec{\nabla} \phi \int d\tau
$$

بنابراین

$$
\lim_{\int d\tau \to ۰} \frac{\oint_s \phi \vec{ds}}{\int d\tau} = \vec{\nabla} \phi \lim_{\int d\tau \to ۰} \frac{\int d\tau}{\int d\tau} = \vec{\nabla} \phi
$$

$$
\begin{aligned}
\oint \vec{A} \cdot \vec{ds} = \int_{ABCD} A_x(x + \frac{dx}{۲}, y, z) dydz - \int_{EFGH} A_x(x - \frac{dx}{۲}, y, z) dydz \\
- \int_{ABFE} A_z(x, y, z - \frac{dz}{۲}) dxdy + \int_{DCGH} A_z(x, y, z + \frac{dz}{۲}) dxdy \\
+ \int_{BFGC} A_y(x, y + \frac{dy}{۲}, z) dxdz - \int_{AEHD} A_y(x, y - \frac{dy}{۲}, z) dxdz
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\oint \vec{A}\cdot\vec{ds} &= \int \left(A_x(x+\frac{dx}{۲},y,z) - A_x(x-\frac{dx}{۲},y,z)\right)dydz\\ &+ \int \left(A_z(x,y,z+\frac{dz}{۲}) - A_z(x,y,z-\frac{dz}{۲})\right)dxdy\\ &+ \int \left(A_y(x,y+\frac{dy}{۲},z) - A_y(x,y-\frac{dy}{۲},z)\right)dxdz\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\oint \vec{A}\cdot\vec{ds} &= \int \left(A_x + \frac{dx}{۲}\frac{\partial A_x}{\partial x} - A_x + \frac{dx}{۲}\frac{\partial A_x}{\partial x}\right)dydz\\ &+ \int \left(A_z + \frac{dz}{۲}\frac{\partial A_z}{\partial z} - A_z + \frac{dz}{۲}\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)dxdy\\ &+ \int \left(A_y + \frac{dy}{۲}\frac{\partial A_y}{\partial y} - A_y + \frac{dy}{۲}\frac{\partial A_y}{\partial y}\right)dzdx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\oint \vec{A}\cdot\vec{ds} &= \int \frac{\partial A_x}{\partial x}dxdydz + \int \frac{\partial A_y}{\partial z}dxdydz + \int \frac{\partial A_z}{\partial y}dxdydz\\ &= \int \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)dxdydz = \int \vec{\nabla}\cdot\vec{A}d\tau\end{aligned}$$

اگر $\int d\tau \to ۰$ داریم

$$\oint \vec{A}\cdot\vec{ds} = \int \vec{\nabla}\cdot\vec{A}d\tau = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\int d\tau$$

بنابراین

$$\lim_{\int d\tau\to ۰}\frac{\oint_s \vec{A}\cdot\vec{ds}}{\int d\tau} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\lim_{\int d\tau\to ۰}\frac{\int d\tau}{\int d\tau} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}$$

$$\begin{aligned}\oint \vec{ds}\times\vec{A} &= \int_{ABCD}\left(\hat{k}A_y(x+\frac{dx}{۲},y,z) - \hat{j}A_z(x+\frac{dx}{۲},y,z)\right)dydz\\ &- \int_{EFGH}\left(\hat{k}A_y(x-\frac{dx}{۲},y,z) - \hat{j}A_z(x-\frac{dx}{۲},y,z)\right)dydz\\ &- \int_{ABFE}\left(\hat{j}A_x(x,y,z-\frac{dz}{۲}) - \hat{i}A_y(x,y,z-\frac{dz}{۲})\right)dxdy\\ &+ \int_{DCGH}\left(\hat{j}A_x(x,y,z+\frac{dz}{۲}) - \hat{i}A_y(x,y,z+\frac{dz}{۲})\right)dxdy\\ &+ \int_{BFGC}\left(\hat{i}A_z(x,y+\frac{dy}{۲},z) - \hat{k}A_x(x,y+\frac{dy}{۲},z)\right)dxdz\\ &- \int_{AEHD}\left(\hat{i}A_z(x,y-\frac{dy}{۲},z) - \hat{k}A_x(x,y-\frac{dy}{۲},z)\right)dxdz\end{aligned}$$

$$\oint \vec{ds}\times\vec{A}=\int\left(\hat{k}A_y+\hat{k}\frac{dx}{۲}\frac{\partial A_y}{\partial x}-\hat{j}A_z-\hat{j}\frac{dx}{۲}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)dydz+\int\left(-\hat{k}A_y+\hat{k}\frac{dx}{۲}\frac{\partial A_y}{\partial x}+\hat{j}A_z-\hat{j}\frac{dx}{۲}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)dydz$$
$$-\int\left(\hat{j}A_x-\hat{j}\frac{dz}{۲}\frac{\partial A_x}{\partial z}-\hat{i}A_y+\hat{i}\frac{dz}{۲}\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)dxdy+\int\left(\hat{j}A_x+\hat{j}\frac{dz}{۲}\frac{\partial A_x}{\partial z}-\hat{i}A_y-\hat{i}\frac{dz}{۲}\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)dxdy$$
$$+\int\left(\hat{i}A_z+\hat{i}\frac{dy}{۲}\frac{\partial A_z}{\partial y}-\hat{k}A_x-\hat{k}\frac{dy}{۲}\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)dxdz-\int\left(\hat{i}A_z-\hat{i}\frac{dy}{۲}\frac{\partial A_z}{\partial y}-\hat{k}A_x+\hat{k}\frac{dy}{۲}\frac{\partial Ax}{\partial y}\right)dxdz$$

$$\oint \vec{ds}\times\vec{A}=\int\left(\hat{k}\frac{\partial A_y}{\partial x}-\hat{j}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)dxdydz+\int\left(\hat{j}\frac{\partial A_x}{\partial z}-\hat{i}\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)dxdydz+\int\left(\hat{i}\frac{\partial A_z}{\partial y}-\hat{k}\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)dxdydz$$

$$\oint \vec{ds}\times\vec{A}=\int\left[\hat{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\hat{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\hat{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\right]dxdydz$$
$$=\int\vec{\nabla}\times\vec{A}d\tau$$

اگر $\int d\tau\to ۰$ داریم

$$\oint \vec{ds}\times\vec{A}=\int\vec{\nabla}\times\vec{A}d\tau=\vec{\nabla}\times\vec{A}\int d\tau$$

بنابراین

$$\lim_{\int d\tau\to ۰}\frac{\oint\vec{ds}\times\vec{A}}{\int d\tau}=\vec{\nabla}\times\vec{A}\lim_{\int d\tau\to ۰}\frac{\int d\tau}{\int d\tau}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$$

۵) اگر $\phi(x,y,z)$ یک میدان اسکالر باشد، نشان دهید

$$\oint\phi\vec{ds}=\int\vec{\nabla}\phi d\tau$$

اگر $\vec{A}=\vec{b}\phi$ که در آن $\vec{b}$ یک بردار ثابت است، با استفاده از قضیه دیورژانس $\oint\vec{A}\cdot\vec{ds}=\int\vec{\nabla}\cdot\vec{A}d\tau$ داریم

$$\oint\vec{A}\cdot\vec{ds}=\oint\vec{b}\phi\cdot\vec{ds}=\oint\vec{b}\cdot\phi\vec{ds}=\vec{b}\cdot\oint\phi\vec{ds}\qquad(۳)$$

$$\int\vec{\nabla}\cdot\vec{A}d\tau=\int\vec{\nabla}\cdot\vec{b}\phi d\tau=\int(\vec{\nabla}\phi\cdot\vec{b}+\phi\vec{\nabla}\cdot\vec{b})d\tau=\int\vec{\nabla}\phi\cdot\vec{b}d\tau=\vec{b}\cdot\int\vec{\nabla}\phi d\tau\qquad(٤)$$

با مساوی قرار دادن روابط (۳) با (٤) با یکدیگر داریم

$$\vec{b}\cdot\oint\phi d\vec{s}=\vec{b}\cdot\int\vec{\nabla}\phi d\tau\Rightarrow\vec{b}\cdot\left(\oint\phi d\vec{s}-\int\vec{\nabla}\phi d\tau\right)=\text{۰}$$

با توجه به اینکه $\vec{b}$ بردار مخالف صفر است،

$$\oint\phi d\vec{s}=\int\vec{\nabla}\phi d\tau$$

٦) اگر $\vec{G}(x,y,z)$ یک میدان برداری باشد، نشان دهید

$$\oint d\vec{s}\times\vec{G}=\int\vec{\nabla}\times\vec{G}d\tau$$

اگر $\vec{A}=\vec{b}\times\vec{G}$ که در آن $\vec{b}$ یک بردار ثابت است، با استفاده از قضیه دیورژانس $\oint\vec{A}\cdot d\vec{s}=\int\vec{\nabla}\cdot\vec{A}d\tau$ داریم

$$\oint\vec{A}\cdot d\vec{s}=\oint\vec{b}\times\vec{G}\cdot d\vec{s}=\oint\vec{b}\cdot\vec{G}\times d\vec{s}=\vec{b}\cdot\oint\vec{G}\times d\vec{s}=-\vec{b}\cdot\oint d\vec{s}\times\vec{G}\qquad(\text{۵})$$

$$\int\vec{\nabla}\cdot\vec{A}d\tau=\int\vec{\nabla}\cdot(\vec{b}\times\vec{G})d\tau=\int(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{G})d\tau=-\int(\vec{b}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{G})d\tau=-\vec{b}\cdot\int(\vec{\nabla}\times\vec{G})d\tau\qquad(\text{٦})$$

با مساوی قرار دادن روابط (۵) با (٦) با یکدیگر داریم

$$\vec{b}\cdot\oint d\vec{s}\times\vec{G}=\vec{b}\cdot\int(\vec{\nabla}\times\vec{G})d\tau\Rightarrow\vec{b}\cdot\left(\oint d\vec{s}\times\vec{G}-\int(\vec{\nabla}\times\vec{G})d\tau\right)=\text{۰}$$

با توجه به اینکه $\vec{b}$ بردار مخالف صفر است،

$$\oint d\vec{s}\times\vec{G}=\int(\vec{\nabla}\times\vec{G})d\tau$$

۷) نشان دهید $\oint d\vec{s}=\text{۰}$

اگر $\vec{A}$ یک بردار ثابت مخالف صفر باشد، با استفاده از قضیه دیورژانس $\oint\vec{A}\cdot d\vec{s}=\int\vec{\nabla}\cdot\vec{A}d\tau$ داریم

$$\oint\vec{A}\cdot d\vec{s}=\vec{A}\cdot\oint d\vec{s}\qquad(\text{۷})$$

$$\int\vec{\nabla}\cdot\vec{A}d\tau=\text{۰}\qquad(\text{۸})$$

با مساوی قرار دادن روابط (۷) با (۸) با یکدیگر داریم

$$\vec{A}\cdot\oint d\vec{s}=\text{۰}$$

با توجه به اینکه $\vec{A}$ بردار مخالف صفر است،

$$\oint \vec{ds} = ۰$$

۸) نشان دهید $\oint \vec{r}\cdot\vec{ds} = ۳\Omega$، که Ω حجم سیستم تحت بررسی می‌باشد.
اگر $\vec{A}=\vec{r}$، با استفاده از قضیه دیورژانس $\oint \vec{A}\cdot\vec{ds} = \int \vec{\nabla}\cdot\vec{A}d\tau$ داریم

$$\oint \vec{r}\cdot\vec{ds} = \int \vec{\nabla}\cdot\vec{r}d\tau = ۳\int d\tau = ۳\Omega$$

یادآوری که $\vec{\nabla}\cdot\vec{r} = ۳$.
۹) اگر $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ نشان دهید $\oint\ \vec{B}\cdot\vec{ds} = ۰$

$$\oint \vec{B}\cdot\vec{ds} = \int \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})d\tau = ۰$$

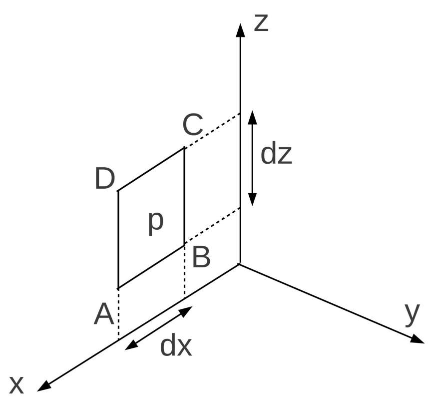
حاصلضرب متوالی $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})$ برابر صفر است به تمرین سری ٤ مراجعه کنید.
۱۰) اگر در حجم Ω فرض کنیم که ψ یک جواب معادله لاپلاس است(یعنی $\nabla^۲\psi = ۰$). نشان دهید $\oint\ \vec{\nabla}\psi\cdot\vec{ds} =$ ۰
اگر $\vec{A} = \vec{\nabla}\phi$، با استفاده از قضیه دیورژانس $\oint \vec{A}\cdot\vec{ds} = \int \vec{\nabla}\cdot\vec{A}d\tau$ داریم

$$\oint \vec{\nabla}\phi\cdot\vec{ds} = \int \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi d\tau = \int \nabla^۲\phi d\tau = ۰$$

حاصلضرب متوالی $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi$ برابر $\nabla^۲\phi$ است به تمرین سری ٤ مراجعه کنید.
۱۱) درستی اتحادهای زیر را برای مساحت $da = dxdz$ در نقطه دلخواه $p(x,y,z)$ بررسی کنید

$$\hat{n}\times\vec{\nabla}\phi = \lim_{\int da\to ۰}\frac{\oint_c \phi\vec{dl}}{\int da},\qquad \vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot\hat{n} = \lim_{\int d\tau\to ۰}\frac{\oint_c \vec{A}\cdot\vec{dl}}{\int da},\qquad (\vec{n}\times\vec{\nabla})\times\vec{A} = \lim_{\int da\to ۰}\frac{\oint_c \vec{dl}\times\vec{A}}{\int da}$$

که در آن $\hat{n}$ بردار یکه عمود برسطح da می‌باشد.



مطابق شکل نقطه $P(x,y,z)$ در وسط مستطیل با مساحت $da = dxdz$ قرار دارد و $\hat{n}$ با بردار یکه $\hat{\jmath}$ همزمان است. انتگرال روی مسیر بسته $\oint$ را می‌توان بصورت

$$\oint = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DA}$$

به اضلاع تشکیل دهنده مستطیل تجزیه کرد.

روی ضلع AB:

$$\vec{dl} = -\hat{i}dx, \qquad \phi = \phi(x, y, z - \frac{dz}{۲}), \qquad \vec{A} = \vec{A}(x, y, z - \frac{dz}{۲})$$

روی ضلع BC:

$$\vec{dl} = \hat{k}dz, \qquad \phi = \phi(x - \frac{dx}{۲}, y, z), \qquad \vec{A} = \vec{A}(x - \frac{dx}{۲}, y, z)$$

روی ضلع CD:

$$\vec{dl} = \hat{i}dx, \qquad \phi = \phi(x, y, z + \frac{dz}{۲}), \qquad \vec{A} = \vec{A}(x, y, z + \frac{dz}{۲})$$

روی ضلع DA:

$$\vec{dl} = -\hat{k}dz, \qquad \phi = \phi(x + \frac{dx}{۲}, y, z), \qquad \vec{A} = \vec{A}(x + \frac{dx}{۲}, y, z)$$

$$\begin{aligned}
\oint \phi \vec{dl} &= -\hat{i} \int \phi(x, y, z - \frac{dz}{۲})dx + \hat{k} \int \phi(x - \frac{dx}{۲}, y, z)dz + \hat{i} \int \phi(x, y, z + \frac{dz}{۲})dx - \hat{k} \oint \phi(x + \frac{dx}{۲}, y, z)dz \\
&= \hat{i} \int \left(-\phi + \frac{dz}{۲}\frac{\partial \phi}{\partial z} + \phi + \frac{dz}{۲}\frac{\partial \phi}{\partial z}\right) dx + \hat{k} \int \left(\phi - \frac{dx}{۲}\frac{\partial \phi}{\partial x} - \phi - \frac{dx}{۲}\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) dz \\
&= \int \left(\hat{i}\frac{\partial \phi}{\partial z} - \hat{k}\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) dxdz = \int (\hat{j} \times \vec{\nabla}\phi)da
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\lim_{\int da \to ۰} \frac{\oint_c \phi \vec{dl}}{\int da} = \lim_{\int da \to ۰} \frac{\int (\hat{j} \times \vec{\nabla}\phi)da}{\int da} = (\hat{j} \times \vec{\nabla}\phi) \lim_{\int da \to ۰} \frac{\int da}{\int da} = (\hat{j} \times \vec{\nabla}\phi)$$

$$\begin{aligned}
\oint_c \vec{A} \cdot \vec{dl} &= -\int A_x(x, y, z - \frac{dz}{۲})dx + \int A_z(x - \frac{dx}{۲}, y, z)dz + \int A_x(x, y, z + \frac{dz}{۲})dx - \int A_z(x + \frac{dx}{۲}, y, z)dz \\
&= \int \left(A_x(x, y, z + \frac{dz}{۲}) - A_x(x, y, z - \frac{dz}{۲})\right) dx + \int \left(A_z(x - \frac{dx}{۲}, y, z) - A_z(x + \frac{dx}{۲}, y, z)\right) dz \\
&= \int \left(A_x + \frac{dz}{۲}\frac{\partial A_x}{\partial z} - A_x + \frac{dz}{۲}\frac{\partial A_x}{\partial z}\right) dx + \int \left(A_z - \frac{dx}{۲}\frac{\partial A_z}{\partial x} - A_z - \frac{dx}{۲}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right) dz
\end{aligned}$$

$$\oint_c \vec{A}\cdot\vec{dl} = \int\left(A_x + \frac{dz}{۲}\frac{\partial A_x}{\partial z} - A_x + \frac{dz}{۲}\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)dx + \int\left(A_z - \frac{dx}{۲}\frac{\partial A_z}{\partial x} - A_z - \frac{dx}{۲}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)dz$$
$$= \int\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)dxdz = \int(\vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot\hat{j})da$$

بنابراین

$$\lim_{\int d\tau\to ۰}\frac{\oint_c \vec{A}\cdot\vec{dl}}{\int da} = \lim_{\int d\tau\to ۰}\frac{\int(\vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot\hat{j})da}{\int da} = (\vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot\hat{j})\lim_{\int d\tau\to ۰}\frac{\int da}{\int da} = \vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot\hat{j}$$

$$\begin{aligned}\oint_c \vec{dl}\times\vec{A} = &-\hat{k}\int A_y(x,y,z-\frac{dz}{۲})dx + \hat{j}\int A_z(x,y,z-\frac{dz}{۲})dx\\ &+\hat{j}\int A_x(x-\frac{dx}{۲},y,z)dz - \hat{i}\int A_y(x-\frac{dx}{۲},y,z)dz\\ &+\hat{k}\int A_y(x,y,z+\frac{dz}{۲})dx - \hat{j}\int A_z(x,y,z+\frac{dz}{۲})dx\\ &-\hat{j}\int A_x(x+\frac{dx}{۲},y,z)dz + \hat{i}\int A_y(x+\frac{dx}{۲},y,z)dz\end{aligned}$$

$$\oint_c \vec{dl}\times\vec{A} = \hat{i}\int\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}\right)dxdz + \hat{k}\int\left(\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)dxdz - \hat{j}\int\left(\frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{\partial A_x}{\partial x}\right)dxdz$$
$$= \int((\hat{j}\times\vec{\nabla})\times\vec{A})da$$

$$\lim_{\int da\to ۰}\frac{\oint_c \vec{dl}\times\vec{A}}{\int da} = \lim_{\int da\to ۰}\frac{\int((\hat{j}\times\vec{\nabla})\times\vec{A})da}{\int da} = ((\hat{j}\times\vec{\nabla})\times\vec{A})\lim_{\int da\to ۰}\frac{\int da}{\int da} = (\hat{j}\times\vec{\nabla})\times\vec{A}$$

۱۲) اگر $\phi(x,y,z)$ یک میدان اسکالر باشد، نشان دهید

$$\oint \phi\vec{dl} = \int \vec{ds}\times\vec{\nabla}\phi$$

اگر $\vec{A}=\vec{b}\phi$ که در آن $\vec{b}$ یک بردار ثابت است، با استفاده از قضیه استوکس $\oint \vec{A}\cdot\vec{dl} = \int \vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot\hat{n}da$ داریم

$$\oint \vec{A}\cdot\vec{dl} = \oint \vec{b}\phi\cdot\vec{dl} = \oint \vec{b}\cdot\phi\vec{dl} = \vec{b}\cdot\oint\phi\vec{dl} \tag{۹}$$

$$\int \vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot\hat{n}da = \int\vec{\nabla}\times(\vec{b}\phi)\cdot\hat{n}da = \int(\vec{\nabla}\phi\times\vec{b} + \phi\vec{\nabla}\times\vec{b})\cdot\hat{n}da = \int\vec{\nabla}\phi\times\vec{b}\cdot\hat{n}da = \vec{b}\cdot\int(\hat{n}\times\vec{\nabla}\phi)da \tag{۱۰}$$

با مساوی قرار دادن روابط (۹) با (۱۰) با یکدیگر داریم

$$\vec{b}\cdot\oint\phi d\vec{l}=\vec{b}\cdot\int(\hat{n}\times\vec{\nabla}\phi)da\Rightarrow\vec{b}\cdot\left(\oint\phi d\vec{l}-\int(\hat{n}\times\vec{\nabla}\phi)da\right)=0$$

با توجه به اینکه $\vec{b}$ بردار مخالف صفر است،

$$\oint\phi d\vec{l}=\int(\hat{n}\times\vec{\nabla}\phi)da$$

۱۳) اگر $\vec{G}(x,y,z)$ یک میدان برداری باشد، نشان دهید

$$\oint d\vec{r}\times\vec{G}=\int(d\vec{s}\times\vec{\nabla})\times\vec{G}$$

اگر $\vec{A}=\vec{b}\times\vec{G}$ که در آن $\vec{b}$ یک بردار ثابت است، با استفاده از قضیه استوکس $\oint\vec{A}\cdot d\vec{l}=\int\vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot\hat{n}da$ داریم

$$\oint\vec{A}\cdot d\vec{l}=\oint\vec{b}\times\vec{G}\cdot d\vec{l}=\oint\vec{b}\cdot\vec{G}\times d\vec{l}=\vec{b}\cdot\oint\vec{G}\times d\vec{l}=-\vec{b}\cdot\oint d\vec{l}\times\vec{G} \tag{11}$$

$$\int\vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot\hat{n}da=\int\vec{\nabla}\times(\vec{b}\times\vec{G})\cdot\hat{n}da \tag{12}$$

با مساوی قرار دادن روابط (۱۱) با (۱۲) با یکدیگر داریم

$$\vec{b}\cdot\oint d\vec{l}\times\vec{G}=\vec{b}\cdot\int(\hat{n}\times\vec{\nabla})\times\vec{G}da\Rightarrow\vec{b}\cdot\left(\oint d\vec{l}\times\vec{G}-\int(\hat{n}\times\vec{\nabla})\times\vec{G}da\right)=0$$

با توجه به اینکه $\vec{b}$ بردار مخالف صفر است،

$$\oint d\vec{l}\times\vec{G}=\int(\hat{n}\times\vec{\nabla})\times\vec{G}da$$

۱٤) اگر بردار $\vec{t}=-\hat{i}y+\hat{j}x$، نشان دهید

$$\oint\vec{t}\cdot d\vec{l}=2A$$

در اینجا انتگرال روی منحنی بسته و پیوسته‌ای در صفحه‌ی xy محاسبه می‌شود و A مساحت است که منحنی آنرا احاطه کرده است.
اگر $\vec{A}=\vec{t}$، با استفاده از قضیه استوکس $\oint\vec{A}\cdot d\vec{l}=\int\vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot\hat{n}da$ داریم

$$\oint\vec{t}\cdot d\vec{l}=\int\vec{\nabla}\times\vec{t}\cdot\hat{k}dxdy$$

با توجه به اینکه $\vec{\nabla}\times\vec{t}=2\hat{k}$، بنابراین

$$\oint\vec{t}\cdot d\vec{l}=3\int\hat{k}\cdot\hat{k}dxdy=2\int da=2A$$

۱۵) نشان دهید برای هر مسیر بسته دلخواه $\oint \vec{r}\times d\vec{l}$ دو برابر مساحت است که مسیر مربوطه آنرا در بر می‌گیرد.
اگر $\vec{A}=\vec{b}\times\vec{r}$ که در آن $\vec{b}$ یک بردار ثابت است، با استفاده از قضیه استوکس $\oint \vec{A}\cdot d\vec{l}=\int \vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot\hat{n}da$ داریم

$$\oint \vec{A}\cdot d\vec{l}=\oint \vec{b}\times\vec{r}\cdot d\vec{l}=\oint \vec{b}\cdot\vec{r}\times d\vec{l}=\vec{b}\cdot\oint \vec{r}\times d\vec{l} \tag{۱۳}$$

$$\int \vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot\hat{n}da=\int \vec{\nabla}\times(\vec{b}\times\vec{r})\cdot\hat{n}da$$

با توجه به اینکه $\vec{\nabla}\times(\vec{b}\times\vec{r})=۲\vec{b}$ داریم

$$\int \vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot\hat{n}da=۲\int \vec{b}\cdot\hat{n}da=۲\vec{b}\cdot\int \hat{n}da=\vec{b}\cdot\left(۲\int \hat{n}da\right) \tag{۱٤}$$

با مساوی قرار دادن روابط (۱۳) با (۱٤) با یکدیگر داریم

$$\vec{b}\cdot\oint \vec{r}\times d\vec{l}=\vec{b}\cdot\left(۲\int \hat{n}da\right)\Rightarrow \vec{b}\cdot\left(\oint \vec{r}\times d\vec{l}-۲\int \hat{n}da\right)=۰$$

با توجه به اینکه $\vec{b}$ بردار مخالف صفر است،

$$\oint \vec{r}\times d\vec{l}=۲\int \hat{n}da$$

۱٦) یکی از معادلات ماکسول به ازای $\vec{E}=۰$ عبارت است از $\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J}$ که در آن $\vec{J}$ چگالی جریان است.
نشان دهید

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l}=\int \vec{J}\cdot d\vec{s}=I$$

که در آن I جریان خالصی است که از حلقه انتگرالگیری می‌گذرد.

با جایگزین کردن $\vec{H}$ بجای $\vec{A}$ در قضیه استوکس $\oint \vec{A}\cdot d\vec{l}=\int \vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot\hat{n}da$ داریم

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l}=\int \vec{\nabla}\times\vec{H}\cdot d\vec{s}=\int \vec{J}\cdot d\vec{s}=I$$

۱۷) میدان مغناطیسی $\vec{B}$ از جریان الکتریکی در حلقه‌ای به شعاع R ایجاد می‌شود. نشان دهید بزرگی پتانسیل برداری $\vec{A}$ در حلقه برابر است با

$$|A|=\frac{\phi}{۲\pi R}$$

که در آن $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$ و ϕ شار مغناطیسی کلی است که از حلقه عبور می‌کند(یعنی $\int \vec{B}\cdot d\vec{s}=\phi$).
اگر قضیه استوکس را برای پتانسیل برداری $\vec{A}$ بنویسیم

$$\oint \vec{A}\cdot d\vec{l}=\int \vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot d\vec{s}$$

جمله سمت چپ عبارت بالا برای حلقه‌ای به شعاع R برابر

$$\oint \vec{A}\cdot\vec{dl} = A(۲\pi R) \tag{۱۵}$$

و جمله‌ی سمت راست

$$\int \vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot\vec{ds} = \int \vec{B}\cdot\vec{ds}$$

اگر $\int \vec{B}\cdot\vec{ds} = \phi$ شار مغناطیسی عبوری از حلقه عبور باشد

$$\int \vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot\vec{ds} = \int \vec{B}\cdot\vec{ds} = \phi \tag{۱۶}$$

با مساوی قرار دادن روابط (۱۵) با (۱۶) با یکدیگر داریم

$$A(۲\pi R) = \phi \Rightarrow A = \frac{\phi}{۲\pi R}$$

۱۸) درستی اتحادهای زیر را بررسی کنید

$$\oint u\vec{\nabla}v\cdot\vec{dl} = -\oint v\vec{\nabla}u\cdot\vec{dl}$$
$$\oint u\vec{\nabla}v\cdot\vec{dl} = \int(\vec{\nabla}v)\times(\vec{\nabla}u)\cdot\vec{ds}$$

اگر در قضیه استوکس $\oint \vec{A}\cdot\vec{dl} = \int \vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot\vec{ds}$، بردار $\vec{\nabla}(uv)$ را بجای بردار $\vec{A}$ جایگزین کنیم داریم

$$\oint \vec{\nabla}(uv)\cdot\vec{dl} = \int \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}(uv)\cdot\vec{ds}$$

در سمت راست، عبارت $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}(uv)$ برابر صفر است و عبارت سمت چپ برابر

$$\oint \left[u(\vec{\nabla}v) + (\vec{\nabla}u)v\right]\cdot\vec{dl} = ۰ \Rightarrow \oint u\vec{\nabla}v\cdot\vec{dl} = -\oint v\vec{\nabla}u\cdot\vec{dl}$$

اگر در قضیه استوکس $\oint \vec{A}\cdot\vec{dl} = \int \vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot\vec{ds}$، بردار $u\vec{\nabla}v$ را بجای بردار $\vec{A}$ جایگزین کنیم داریم

$$\begin{aligned}\oint u\vec{\nabla}v\cdot\vec{dl} &= \int \vec{\nabla}\times(u\vec{\nabla}v)\cdot\vec{ds}\\ &= \int(\vec{\nabla}u)\times(\vec{\nabla}v)\cdot\vec{ds} + \int u(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}v)\cdot\vec{ds}\end{aligned}$$

با توجه به اینکه مشتقات متوالی $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}v$ برابر صفر است، بنابراین

$$\oint u\vec{\nabla}v\cdot\vec{dl} = \int(\vec{\nabla}u)\times(\vec{\nabla}v)\cdot\vec{ds}$$