به نام خدا

تمرین شماره: ۶ درس ریاضی فیزیک ۱ تحویل: ۹۲/۲/۱۱

---

۱) برای نیروی $\vec{F} = (x^2 + y^2 + z^2)^n (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$ کمیتهای زیر را بدست آورید (الف) $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ (ب) $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ (ج) پتانسیل نرده‌ای $\phi(x, y, z)$ بطوریکه $\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi$ (د) به ازای چه مقداری از n، پتانسیل نرده‌ای هم در مبدا و هم در بینهایت واگرایی دارد؟

در اینجا می‌توان برای سادگی عبارت نیرو را بصورت فشرده زیر باز نویسی کنیم

$$\vec{F} = r^{2n}\vec{r}$$

که $\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$ و $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ است.

(الف)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \vec{\nabla} r^{2n} \cdot \vec{r} + r^{2n}\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = \left(\frac{\vec{r}}{r}\frac{d}{dr}r^{2n}\right) \cdot \vec{r} + 3r^{2n} = 2nr^{2n} + 3r^{2n} = (2n+3)r^{2n}$$

(ب)

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{\nabla} r^{2n} \times \vec{r} + r^{2n}\vec{\nabla} \times \vec{r} = \left(\frac{\vec{r}}{r}\frac{d}{dr}r^{2n}\right) \times \vec{r} + 0 = 2nr^{2n-2}\vec{r} \times \vec{r} = 0$$

با صفر شدن کرل میدان برداری $\vec{F}$، میدان اسکالری مانند ϕ وجود دارد که

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi$$

است. با توجه به اینکه میدان برداری نیرو تابعی از r است پتانسیل اسکالر ϕ نیز تابعی از r خواهد بود

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi(r) \Rightarrow r^{2n}\vec{r} = -\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\phi\right)\vec{r} \Rightarrow \left(r^{2n} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\phi\right)\vec{r} = 0$$

در حالت کلی با توجه به اینکه $\vec{r}$ مخالف صفر است بنابراین

$$r^{2n} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\phi = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr}\phi = -r^{2n+1}$$

برای $n \geq 0$ و با فرض اینکه پتانسیل در مبدا برابر صفر است، داریم

$$\int_{\phi(r=0)=0}^{\phi(r)} d\phi = -\int_0^r r^{2n+1}dr \Rightarrow \phi(r) = -\frac{1}{2n+2}r^{2n+2}$$

برای $n < -1$ و با فرض اینکه پتانسیل در بینهایت برابر صفر است، داریم

$$\int_{\phi(r=\infty)=0}^{\phi(r)} d\phi = -\int_\infty^r r^{2n+1}dr \Rightarrow \phi(r) = -\frac{1}{2n+2}r^{2n+2}$$

برای $n = -۱$ با فرض اینکه پتانسیل در $r = ۱$ برابر صفر است، داریم

$$\int_{\phi(r=۱)=۰}^{\phi(r)} d\phi = -\int_{r=۱}^{r} \frac{dr}{r} \Rightarrow \phi(r) = -\ln r$$

۲) کره‌ای به شعاع a بطور یکنواخت در تمامی حجمش باردار شده است. پتانسیل الکترواستاتیک $\phi(r)$ را برای $۰ \leq r < \infty$ بدست آورید(راهنمائی: از قانون گوس استفاده کنید و میدان الکتریکی را در تمامی فواصل بدست آورید و سپس بوسیله آن و با این فرض که مقدار پتانسیل در بینهایت برابر صفر است، پتانسیل را در تمامی فواصل بدست آورید)(از مباحث فیزیک ۲).

در اینجا با توجه به تقارن مسئله از قانون گوس برای بدست آوردن میدان الکتریکی کره توپر باردار استفاده می‌کنیم. برای این منظور در انتگرال سطح قانون گوس (یعنی $\oint \vec{E}\cdot\vec{ds}$) از پوسته‌های کروی شکل در دو ناحیه $a \leq r < \infty$ و $۰ \leq r \leq a$ استفاده کرده‌ایم. با توجه به تقارن مسئله میدان الکتریکی در تمامی نقاط روی پوسته‌ها مقدار یکسانی دارد، بنابراین

$$\oint \vec{E}\cdot\vec{ds} = (۴\pi r^{۲})E$$

برای $a \leq r < \infty$ بار در بر گرفته بوسیله پوسته کروی برابر

$$q = \frac{۴}{۳}\pi a^{۳}\rho$$

است که در آن ρ چگالی بار الکتریکی کره توپر به حجم $\frac{۴}{۳}\pi a^{۳}$ است که بطور یکنواخت در کره توزیع شده است و برای $۰ \leq r \leq a$ بار در بر گرفته بوسیله پوسته کروی برابر

$$q = \frac{۴}{۳}\pi r^{۳}\rho$$

میدان الکتریکی برای $a \leq r < \infty$ برابر

$$\oint \vec{E}\cdot\vec{ds} = \frac{q}{\epsilon_۰} \Rightarrow (۴\pi r^{۲})E = \frac{۱}{\epsilon_۰}\frac{۴}{۳}\pi a^{۳}\rho \Rightarrow E = \frac{\rho a^{۳}}{۳\epsilon_۰}\frac{۱}{r^{۲}}$$

و برای $۰ \leq r \leq a$ برابر

$$\oint \vec{E}\cdot\vec{ds} = \frac{q}{\epsilon_۰} \Rightarrow (۴\pi r^{۲})E = \frac{۱}{\epsilon_۰}\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}\rho \Rightarrow E = \frac{\rho r}{۳\epsilon_۰}$$

اگر فرض کنیم پتانسیل در بینهایت برابر صفر است، $\phi(r=\infty) = ۰$، برای $a \leq r < \infty$ داریم

$$\phi(r) - \phi(r=\infty) = -\int_{r=\infty}^{r} E(r)dr \Rightarrow \phi(r) = -\frac{\rho a^{۳}}{۳\epsilon_۰}\int_{r=\infty}^{r}\frac{dr}{r^{۲}} \Rightarrow \phi(r) = \frac{\rho a^{۳}}{۳\epsilon_۰}\frac{۱}{r}$$

و برای $۰ \leq r \leq a$ برابر

$$\phi(r) - \phi(r=\infty) = -\int_{r=\infty}^{r} E(r)dr \Rightarrow \phi(r) = -\frac{\rho a^{۳}}{۳\epsilon_۰}\int_{r=\infty}^{a}\frac{dr}{r^{۲}} - \frac{\rho}{۳\epsilon_۰}\int_{a}^{r} r dr$$

$$\phi(r)=\frac{\rho a^{۲}}{۳\epsilon_{۰}}-\left(\frac{\rho r^{۲}}{۶\epsilon_{۰}}-\frac{\rho a^{۲}}{۶\epsilon_{۰}}\right)=\frac{\rho}{۶\epsilon_{۰}}(۳a^{۲}-r^{۲})$$

۳) استوانه‌ای خیلی بلند به شعاع a را در نظر بگیرید که چگالی بار در واحد طول آن برابر λ است. پتانسیل الکترواستاتیک $\phi(r)$ را برای $۰ \le r < \infty$ بدست آورید(راهنمائی: مانند مسئله ۲)(از مباحث فیزیک ۲).
در اینجا با توجه به تقارن مسئله از قانون گوس برای بدست آوردن میدان الکتریکی استوانه‌ی باردار بطول بینهایت استفاده می‌کنیم. برای این منظور در انتگرال سطح قانون گوس (یعنی $\oint \vec{E}\cdot\vec{ds}$) از پوسته‌های استوانه‌ای شکل در دو ناحیه $a \le r < \infty$ و $۰ \le r \le a$ استفاده کرده‌ایم. با توجه به تقارن مسئله میدان الکتریکی در تمامی نقاط روی پوسته‌ها مقدار یکسانی دارد، بنابراین

$$\oint \vec{E}\cdot\vec{ds}=(۲\pi r)lE$$

که در آن l طول استوانه‌ی بلند می‌باشد. برای $a \le r < \infty$ بار در بر گرفته بوسیله پوسته استوانه‌ای برابر

$$q=\pi a^{۲}l\rho \Rightarrow \frac{q}{l}=\pi a^{۲}\rho \Rightarrow \lambda=\pi a^{۲}\rho \Rightarrow \rho=\frac{\lambda}{\pi a^{۲}}$$

است که در آن ρ چگالی بار الکتریکی استوانه توپر به حجم $\pi a^{۲}l$ است که بطور یکنواخت در استوانه توزیع شده است و برای $۰ \le r \le a$ بار در بر گرفته بوسیله پوسته استوانه‌ای برابر

$$q=\pi r^{۲}l\rho$$

میدان الکتریکی برای $a \le r < \infty$ برابر

$$\oint \vec{E}\cdot\vec{ds}=\frac{q}{\epsilon_{۰}} \Rightarrow (۲\pi r)lE=\frac{۱}{\epsilon_{۰}}\pi a^{۲}l\rho \Rightarrow E=\frac{\rho a^{۲}}{۲\epsilon_{۰}}\frac{۱}{r} \Rightarrow E=\frac{\lambda}{۲\pi\epsilon_{۰}}\frac{۱}{r}$$

و برای $۰ \le r \le a$ برابر

$$\oint \vec{E}\cdot\vec{ds}=\frac{q}{\epsilon_{۰}} \Rightarrow (۲\pi r)lE=\frac{۱}{\epsilon_{۰}}\pi r^{۲}l\rho \Rightarrow E=\frac{\lambda}{۲\pi\epsilon_{۰}}\frac{r}{a^{۲}}$$

اگر فرض کنیم پتانسیل در $r=a$ برابر صفر است، $\phi(r=a)=۰$، برای $a \le r < \infty$ داریم

$$\phi(r)-\phi(r=a)=-\int_{r=a}^{r}E(r)dr \Rightarrow \phi(r)=-\frac{\lambda}{۲\pi\epsilon_{۰}}(\ln r-\ln a) \Rightarrow \phi(r)=-\frac{\lambda}{۲\pi\epsilon_{۰}}\ln\left(\frac{r}{a}\right)$$

و برای $۰ \le r \le a$ برابر

$$\phi(r)-\phi(r=a)=-\int_{r=a}^{r}E(r)dr \Rightarrow \phi(r)=-\frac{\lambda}{۴\pi\epsilon_{۰}a^{۲}}(r^{۲}-a^{۲}) \Rightarrow \phi(r)=-\frac{\lambda}{۴\pi\epsilon_{۰}}\left[\left(\frac{r}{a}\right)^{۲}-۱\right]$$

۴) یک جرم کروی با چگالی یکنواخت $\rho_۰$ و شعاع a را در نظر بگیرید. (الف) پتانسیل گرانشی را برای $۰ \leq r < \infty$ بدست آورید. (ب) فرض کنید یک سوراخ سراسری از مرکز زمین می‌گذرد و ذره‌ای به جرم $m_۰$ در این سوراخ انداخته شده است، با استفاده از قانون دوم نیوتن معادله حرکت ذره را بدست آورید(راهنمائی: مانند مسئله ۲)(از مباحث فیزیک ۱).

در اینجا با توجه به تقارن مسئله از قانون گوس برای بدست آوردن میدان گرانش کره توپر جرم‌دار استفاده می‌کنیم. برای این منظور در انتگرال سطح قانون گوس (یعنی $\oint \vec{g}\cdot\vec{ds}$) از پوسته‌های کروی شکل در دو ناحیه $a \leq r < \infty$ و $۰ \leq r \leq a$ استفاده کرده‌ایم. با توجه به تقارن مسئله میدان گرانشی در تمامی نقاط روی پوسته‌ها مقدار یکسانی دارد، بنابراین

$$\oint \vec{g}\cdot\vec{ds} = (۴\pi r^۲)g$$

برای $a \leq r < \infty$ جرم در بر گرفته بوسیله پوسته کروی برابر

$$m = \frac{۴}{۳}\pi a^۳ \rho_۰$$

است که در آن m جرم کره توپر به حجم $\frac{۴}{۳}\pi a^۳$ است و برای $۰ \leq r \leq a$ جرم در بر گرفته بوسیله پوسته کروی برابر

$$m = \frac{۴}{۳}\pi r^۳ \rho_۰$$

میدان گرانشی برای $a \leq r < \infty$ برابر

$$\oint \vec{g}\cdot\vec{ds} = -۴\pi G m \Rightarrow (۴\pi r^۲)g = -۴\pi G\frac{۴}{۳}\pi a^۳\rho_۰ \Rightarrow g = -G\rho_۰\frac{۴\pi a^۳}{۳}\frac{۱}{r^۲}$$

و برای $۰ \leq r \leq a$ برابر

$$\oint \vec{g}\cdot\vec{ds} = -۴\pi G m \Rightarrow (۴\pi r^۲)g = -۴\pi G\frac{۴}{۳}\pi r^۳\rho_۰ \Rightarrow g = -G\rho_۰\frac{۴\pi}{۳}r$$

اگر فرض کنیم پتانسیل در بینهایت برابر صفر است، $\phi(r=\infty)=۰$، برای $a \leq r < \infty$ داریم

$$\phi(r) - \phi(r=\infty) = -\int_{r=\infty}^{r} g(r)dr \Rightarrow \phi(r) = G\rho_۰\frac{۴\pi a^۳}{۳}\int_{r=\infty}^{r}\frac{dr}{r^۲} \Rightarrow \phi(r) = -G\rho_۰\frac{۴\pi a^۳}{۳}\frac{۱}{r}$$

و برای $۰ \leq r \leq a$ برابر

$$\phi(r) - \phi(r=\infty) = -\int_{r=\infty}^{r} g(r)dr \Rightarrow \phi(r) = G\rho_۰\frac{۴\pi a^۳}{۳}\int_{r=\infty}^{a}\frac{dr}{r^۲} + G\rho_۰\frac{۴\pi}{۳}\int_{a}^{r} r dr$$
$$\phi(r) = -G\rho_۰\frac{۴\pi a^۲}{۳} + G\rho_۰\frac{۴\pi}{۶}\left(r^۲ - a^۲\right) = G\rho_۰\frac{۴\pi}{۶}\left(r^۲ - ۳a^۲\right)$$

۵) سیم درازی را در نظر بگیرید که از آن جریان I عبور می‌کند و یک میدان مغناطیس بصورت

$$\vec{B} = \frac{\mu_۰ I}{۲\pi}\left(\frac{-y}{x^۲+y^۲}, \frac{x}{x^۲+y^۲}, ۰\right)$$

در اطراف خود ایجاد می‌کند. پتانسیل برداری مغناطیسی $\vec{A}$ را بدست آورید(از مباحث فیزیک ۲).

با استفاده از قانون آمپر

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 I$$

میدان مغناطیسی ایجاد شده بوسیله یک سیم بلند به جریان I با در نظر گرفتن یک دایره به شعاع r که سیم حامل جریان بصورت عمودی از سطح دایره می‌گذرد، بدست می‌آید. میدان مغناطیسی مماس بر محیط دایره است و مقدار آن روی محیط دایره یکسان می‌باشد. بنابراین

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 I \Rightarrow B(2\pi r) = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

اگر فرض کنیم دایره در صفحه xy قرار دارد پس $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ و مولفه مماسی با استفاده از مختصات قطبی برابر $\hat{e}_\theta = -\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta = -\hat{i}\frac{y}{r} + \hat{j}\frac{x}{r}$ است و در نتیجه

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{e}_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\left(-\hat{i}\frac{y}{r} + \hat{j}\frac{x}{r}\right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(-\hat{i}\frac{y}{r^2} + \hat{j}\frac{x}{r^2}\right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(-\hat{i}\frac{y}{x^2 + y^2} + \hat{j}\frac{x}{x^2 + y^2}\right)$$

اگر $\vec{A} = \hat{i}a_1 + \hat{j}a_2 + \hat{k}a_3$ رابطه $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ بصورت ساده می‌شود

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} &= B_1 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{y}{x^2 + y^2} \\
\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x} &= B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{x}{x^2 + y^2} \\
\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} &= B_3 = 0
\end{aligned}$$

اگر فرض کنیم $a_1 = a_2 = 0$ بنابراین

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a_3}{\partial y} &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{y}{x^2 + y^2} \\
\frac{\partial a_3}{\partial x} &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{x}{x^2 + y^2}
\end{aligned}$$

اگر از دو معادله بالا انتگرالگیری کنیم داریم

$$\begin{aligned}
a_3 &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\left(x^2 + y^2\right) + C_1 \\
a_3 &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\left(x^2 + y^2\right) + C_2
\end{aligned}$$

با فرض $C_1 = C_2 = 0$ دو معادله بالا با یکدیگر مساوی هستند

$$a_3 = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\left(x^2 + y^2\right) \Rightarrow \vec{A} = -\hat{k}\frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\left(x^2 + y^2\right)$$

با عوض کردن فرضهای بالا معادله بالا نیز عوض می‌شود پس جواب یکتا نیست.

۶) اگر

$$\vec{B}=\left(\frac{x}{(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲})^{\frac{۳}{۲}}},\frac{y}{(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲})^{\frac{۳}{۲}}},\frac{z}{(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}\right)$$

بردار $\vec{A}$ را طوری پیدا کنید که $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$.
در اینجا یادآور می‌شود که $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=۰$ است. مانند مسئله قبل اگر $\vec{A}=\hat{i}a_{۱}+\hat{j}a_{۲}+\hat{k}a_{۳}$ رابطه $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$ بصورت ساده می‌شود

$$\begin{aligned}\frac{\partial a_{۳}}{\partial y}-\frac{\partial a_{۲}}{\partial z}&=B_{۱}=\frac{x}{(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}\\ \frac{\partial a_{۱}}{\partial z}-\frac{\partial a_{۳}}{\partial x}&=B_{۲}=\frac{y}{(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}\\ \frac{\partial a_{۲}}{\partial x}-\frac{\partial a_{۱}}{\partial y}&=B_{۳}=\frac{z}{(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}\end{aligned}$$

اگر فرض کنیم $a_{۳}=۰$ بنابراین

$$\begin{aligned}\frac{\partial a_{۲}}{\partial z}&=-\frac{x}{(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}\\ \frac{\partial a_{۱}}{\partial z}&=\frac{y}{(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}\\ \frac{\partial a_{۲}}{\partial x}-\frac{\partial a_{۱}}{\partial y}&=\frac{z}{(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}\end{aligned}\tag{۱}$$

اگر از رابطه اول معادله (۱) انتگرال بگیریم داریم

$$\frac{\partial a_{۲}}{\partial z}=-\frac{x}{(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}\Rightarrow a_{۲}=-x\int\frac{dz}{(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}$$

برای حل انتگرال بالا تغییر متغییر $z=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}\tan\alpha$ را اعمال می‌کنیم

$$\begin{aligned}a_{۲}&=-x\int\frac{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}(۱+\tan^{۲}\alpha)d\alpha}{(x^{۲}+y^{۲})^{\frac{۳}{۲}}(۱+\tan^{۲}\alpha)^{\frac{۳}{۲}}}=-\frac{x}{x^{۲}+y^{۲}}\int\frac{d\alpha}{(۱+\tan^{۲}\alpha)^{\frac{۱}{۲}}}=-\frac{x}{x^{۲}+y^{۲}}\int\cos\alpha d\alpha\\ &=-\frac{x}{x^{۲}+y^{۲}}\sin\alpha+C_{۲}=-\frac{x}{x^{۲}+y^{۲}}\frac{z}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}}+C_{۲}=-\frac{xz}{(x^{۲}+y^{۲})\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}}+C_{۲}\end{aligned}$$

اگر از رابطه دوم معادله (۱) انتگرال بگیریم داریم

$$\frac{\partial a_{۱}}{\partial z}=\frac{y}{(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}\Rightarrow a_{۱}=y\int\frac{dz}{(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}$$

برای حل انتگرال بالا تغییر متغییر $z=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}\tan\alpha$ را اعمال می‌کنیم

$$
\begin{aligned}
a_۱ &= y\int \frac{\sqrt{x^۲+y^۲}(۱+\tan^۲\alpha)d\alpha}{(x^۲+y^۲)^{\frac{۳}{۲}}(۱+\tan^۲\alpha)^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{y}{x^۲+y^۲}\int \frac{d\alpha}{(۱+\tan^۲\alpha)^{\frac{۱}{۲}}} = \frac{y}{x^۲+y^۲}\int \cos\alpha d\alpha \\
&= \frac{y}{x^۲+y^۲}\sin\alpha + C_۱ = \frac{y}{x^۲+y^۲}\frac{z}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}} + C_۱ = \frac{yz}{(x^۲+y^۲)\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}} + C_۱
\end{aligned}
$$

برای بررسی جوابهای بالا، تساوی معادله سوم رابطه (۱) را چک کنید. همچنین فراموش نکنید که جواب با فرض $a_۳ = ۰$ بررسی شد بنابراین با فرض دیگری هم می‌توان این مسئله را حل کرد و جواب دیگری بدست آورد.

۷) نشان دهید هر بردار ثابت $\vec{B}$، دو معادله

$$
\vec{A} = \frac{۱}{۲}(\vec{B}\times\vec{r})
$$
$$
\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}
$$

را برآورده می‌کند(در اینجا $\vec{r}$ بردار مکان می باشد)(از مباحث فیزیک ۲ که در الکترومغناطیس، تحلیلی و کوانتوم هم آنرا می‌بینید).

اگر $\vec{B} = \hat{i}B_x + \hat{j}B_y + \hat{k}B_z$ در اینصورت بردار $\vec{A}$ برابر

$$
\vec{A} = \frac{۱}{۲}[\hat{i}(zB_y - yB_z) + \hat{j}(xB_z - zB_x) + \hat{i}(yB_x - xB_y)]
$$

با کرل گرفتن از بردار بالا به راحتی می توان نشان داد که

$$
\vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{B}
$$

۸) میدان مغناطیسی $\vec{B}$ با $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ به پتانسیل بردار مغناطیسی $\vec{A}$ مربوط می‌شود، با توجه به قضیه استوکس داریم

$$
\int \vec{B}\cdot d\vec{s} = \oint \vec{A}\cdot d\vec{r}
$$

نشان دهید هر دو طرف این معادله تحت تبدیل پیمانه‌ی $\vec{A}\to\vec{A}+\vec{\nabla}\psi$ ناوردا هستند(از مباحث الکترومغناطیس).

اگر قضیه استوکس را به میدان برداری $\vec{A}$ اعمال کنیم که $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ داریم

$$
\oint \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int \vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot d\vec{s} = \int \vec{B}\cdot d\vec{s}
$$

تحت تبدیل پیمانه‌ی $\vec{A}\to\vec{A}+\vec{\nabla}\psi$ داریم

$$
\oint \vec{A}\cdot d\vec{r} + \oint \vec{\nabla}\psi\cdot d\vec{r} = \int (\vec{\nabla}\times\vec{A} + \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\psi)\cdot d\vec{s}
$$

از تعریف گرادیان یک تابع اسکالر داریم $\vec{\nabla}\psi\cdot d\vec{r} = d\psi$ و همچنین $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\psi = ۰$، بنابراین

$$
\oint \vec{A}\cdot d\vec{r} + \oint d\psi = \int \vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot d\vec{s}
$$

انتگرال بسته دوم در رابطه بالا همواره برابر صفر است (یعنی $\oint d\psi = 0$) بنابراین

$$\oint \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int \vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot d\vec{s}$$

۹) اگر $\vec{E}$ میدان الکتریکی و $\vec{A}$ پتانسیل بردار مغناطیسی باشد، نشان دهید $\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ غیر چرخشی است و بنابراین می‌توان نوشت

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\psi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

(راهنمائی: از معادله $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ استفاده کنید که یکی از معادلات دیفرانسیلی معادلات ماکسول است)(از مباحث الکترومغناطیس).

با توجه به اینکه $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ و با استفاده از معادله ماکسول $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ داریم

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{A} = -\vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla}\times\left(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0$$

اگر کرل میدان برداری برابر صفر باشد(یعنی $\vec{\nabla}\times\left(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0$) می‌توان میدان برداری $\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ با منفی گرادیان میدان اسکالر (مانند $-\vec{\nabla}\psi$) عوض کرد. بنابراین

$$\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\psi \Rightarrow \vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\psi$$

۱۰) نیروی کل وارد بر یک بار الکتریکی q که با سرعت $\vec{v}$ حرکت می‌کند برابر است با

$$\vec{F} = q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})$$

با استفاده از پتانسیل نرده‌ای ϕ و پتانسیل برداری $\vec{A}$ نشان دهید

$$\vec{F} = q[-\vec{\nabla}\phi - \frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{v})]$$

(راهنمائی: با استفاده از مسئله (۹) رابطه میدان الکتریکی $\vec{E}$ با پتانسیل اسکالر ϕ و پتانسیل برداری $\vec{A}$ بصورت $\vec{E} = -\vec{\nabla}\psi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ است و رابطه میدان مغناطیس $\vec{B}$ با پتانسیل برداری $\vec{A}$ بصورت $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ است)(از مباحث الکترومغناطیس).

اگر اتحاد $\vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\vec{b}\cdot\vec{\nabla})\vec{a} + (\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{b} + \vec{b}\times(\vec{\nabla}\times\vec{a}) + \vec{a}\times(\vec{\nabla}\times\vec{b})$ برقرار باشد(به مسئله ۱۱ تمرینهای سری سوم مراجعه کنید)

$$\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{v}) = (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} + \vec{v}\times\vec{\nabla}\times\vec{A} + \vec{A}\times\vec{\nabla}\times\vec{v} \qquad (۲)$$

با استفاده از مسئله ۱۲ تمرینهای سری دوم ($\frac{d}{dt}\vec{F} = (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{F} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{F}$) داریم

$$\frac{d}{dt}\vec{A} = (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} \Rightarrow (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} = \frac{d}{dt}\vec{A} - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$$

بنابراین جمله اول سمت راست عبارت (۲) برابر است با

$$(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}=\frac{d}{dt}\vec{A}-\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$$

جمله دوم سمت راست عبارت (۲)

$$\begin{aligned}(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}=(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\frac{d}{dt}\vec{r}&=A_x\frac{\partial}{\partial x}\frac{d}{dt}\vec{r}+A_y\frac{\partial}{\partial y}\frac{d}{dt}\vec{r}+A_z\frac{\partial}{\partial z}\frac{d}{dt}\vec{r}\\&=A_x\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial x}\vec{r}+A_y\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial y}\vec{r}+A_z\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial z}\vec{r}\\&=A_x\frac{d}{dt}\hat{i}+A_y\frac{d}{dt}\hat{j}+A_z\frac{d}{dt}\hat{k}=0\end{aligned}$$

از آنجاییکه $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$، جمله سوم سمت راست معادله (۲) برابر

$$\vec{v}\times\vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{v}\times\vec{B}$$

اگر $\vec{\nabla}\times\vec{r}=0$

$$\vec{\nabla}\times\vec{v}=\vec{\nabla}\times\frac{d}{dt}\vec{r}=\frac{d}{dt}\vec{\nabla}\times\vec{r}=0$$

بنابراین جمله چهارم سمت راست معادله (۲) برابر صفر است. بدین ترتیب

$$\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{v})=\frac{d}{dt}\vec{A}-\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}+\vec{v}\times\vec{B}\Rightarrow\vec{v}\times\vec{B}=\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{v})-\frac{d}{dt}\vec{A}+\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$$

یا

$$\vec{v}\times\vec{B}=\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{v})-\frac{d}{dt}\vec{A}+\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\tag{3}$$

و همچنین

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\phi-\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\tag{4}$$

با قرار دادن دو معادله (۳) و (۴) در داخل $\vec{F}=q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})$ داریم

$$\vec{F}=q[-\vec{\nabla}\phi-\frac{d\vec{A}}{dt}+\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{v})]$$

۱۱) انرژی ذخیره شده در میدان الکترواستاتیک را می توان به صورت

$$W=\frac{1}{2}\int\rho(\vec{r})\phi(\vec{r})d\tau$$

نوشت که در آن $\rho(\vec{r})$ چگالی بار و $\phi(\vec{r})$ پتانسیل الکترواستاتیکی است. رابطه‌ی بالا را به

$$W=\frac{\epsilon_0}{2}\int|\vec{E}|^2d\tau$$

تبدیکل کنید که در آن $\vec{E}$ میدان الکتریکی است(با توجه به رابطه بالا، عبارت $\frac{\epsilon_0}{2}|\vec{E}|^2$ چگالی انرژی سیستم می‌باشد)(از مباحث الکترومغناطیس).

$$W=\frac{\epsilon_0}{2}\int|\vec{E}|^2d\tau=\frac{\epsilon_0}{2}\int\vec{\nabla}\phi\cdot\vec{\nabla}\phi d\tau=\frac{\epsilon_0}{2}\int\left(\vec{\nabla}\cdot\phi\vec{\nabla}\phi-\phi\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi\right)d\tau$$

با توجه به اینکه $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi=\vec{\nabla}^2\phi=-\frac{\rho}{\epsilon_0}$ و با استفاده از قضیه دیورژانس داریم

$$W=\frac{\epsilon_0}{2}\oint\phi\vec{\nabla}\phi\cdot\vec{ds}-\frac{\epsilon_0}{2}\int\phi\left(-\frac{\rho}{\epsilon_0}\right)d\tau$$

انتگرال روی سطح با توجه به اینکه پتانسیل ϕ در بینهایت رفتار $\frac{1}{r}$ دارد، برابر صفر است، بنابراین

$$W=\frac{1}{2}\int\phi\rho d\tau$$

مظفّری