به نام خدا

تمرین شماره: ۷ — درس ریاضی فیزیک ۱ — تحویل: ۹۲/۲/۱۸

---

۱) اگر x، y و z تابع تحلیلی از q_1، q_2 و q_3 باشد، یعنی

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \qquad y = y(q_1, q_2, q_3), \qquad z = z(q_1, q_2, q_3)$$

بنابراین می‌توان تغییرات بردار مکان را بصورت

$$\vec{dr} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3$$

نشان داد. بردارهای یکه در امتداد تغییرات q_1، q_2 و q_3 برابر

$$\hat{a}_1 = \frac{1}{|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}|} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}, \qquad \hat{a}_2 = \frac{1}{|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}|} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}, \qquad \hat{a}_3 = \frac{1}{|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}|} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}$$

که در صورتی این بردارهای یکه یک دستگاه راستگرد متعامد را تشکیل می‌دهند که رابطه‌ی

$$\hat{a}_i \cdot \hat{a}_j \times \hat{a}_k = \epsilon_{ijk}$$

برقرار باشد. اگر مجذور فاصله کوچک ds برابر

$$\begin{aligned}(ds)^2 &= \vec{dr} \cdot \vec{dr} \\ &= \sum_{i,j} \left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \frac{\partial z}{\partial q_j} \right) dq_i dq_j = \sum_{i,j} h_{ij}^2 dq_i dq_j\end{aligned}$$

باشد، الف) نشان دهید برای دستگاههای مختصات متعامد، اتحاد

$$h_{ij} = h_{ii} \delta_{ij}$$

بر قرار است که معمولا $\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2} = h_{ii} = h_i$ نمایش داده می‌شود که به ضرایب مقیاس معروف می‌باشد.

ب) نشان دهید بردارهای یکه دستگاه مختصات عام برابر

$$\hat{a}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, 3$$

است.

ج) در دستگاه مختصات دکارتی $\vec{dr} = \hat{i}dx + \hat{j}dy + \hat{k}dz$ بنابراین در هر دستگاه مختصات متعامد دیگری نیز می‌توانیم داشته باشیم $\vec{dr} = \hat{a}_1 ds_1 + \hat{a}_2 ds_2 + \hat{a}_3 ds_3$. نشان دهید

$$ds_i = h_i dq_i, \quad i = 1, 2, 3$$

د) اگر $d\tau = dxdydz$ نشان دهید

$$d\tau = ds_۱ ds_۲ ds_۳ = h_۱ h_۲ h_۳ dq_۱ dq_۲ dq_۳$$

که $J\left(\frac{x,y,z}{q_۱,q_۲,q_۳}\right) = h_۱ h_۲ h_۳$ ژاکوبی نامیده می‌شود

۲) درستی اتحادهای زیر را بررسی کنید

$$h_i h_j = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}\right|, \quad i \neq j$$

$$h_۱ h_۲ h_۳ = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_۱} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_۲} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_۳}$$

۳) درستی اتحادهای زیر را بررسی کنید

$$\frac{\partial \hat{a}_i}{\partial q_j} = \hat{a}_j \frac{\partial h_j}{h_i \partial q_i}, \quad i \neq j$$

$$\frac{\partial \hat{a}_i}{\partial q_i} = -\sum_{j \neq i} \hat{a}_j \frac{\partial h_i}{h_j \partial q_j}$$

٤) برای دستگاه مختصات استوانه‌ای به مختصه‌های ρ، ϕ و z که بصورت

$$x = \rho \cos\phi, \qquad y = \rho \sin\phi, \qquad z = z$$

به دستگاه مختصات دکارتی مربوط می‌شوند. الف) ضرایب مقیاس h_ρ، h_ϕ و h_z را بدست آورید. ب) بردار های یکه $\hat{\rho}$، $\hat{\phi}$ و $\hat{z}$ را بدست آورید. ج) المان حجم را در دستگاه مختصات استوانه‌ای بدست آورید.

۵) برای دستگاه مختصات کروی به مختصه‌های r، θ و ϕ که بصورت

$$x = r \cos\phi \sin\theta, \qquad y = r \sin\phi \sin\theta, \qquad z = r \cos\theta$$

به دستگاه مختصات دکارتی مربوط می‌شوند. الف) ضرایب مقیاس h_r، h_θ و h_ϕ را بدست آورید. ب) بردار های یکه $\hat{r}$، $\hat{\theta}$ و $\hat{\phi}$ را بدست آورید. ج) المان حجم را در دستگاه مختصات کروی بدست آورید.

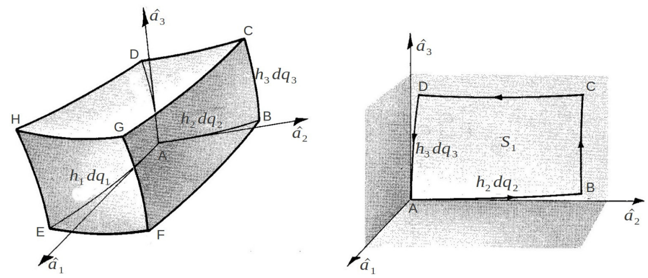
٦) با استفاده از معادله

$$\vec{\nabla}\psi = \lim_{\int d\tau \to ۰} \frac{\oint \psi d\vec{s}}{\int d\tau}$$

رابطه‌ی زیر را بدست آورید

$$\vec{\nabla}\psi(q_۱, q_۲, q_۳) = \hat{a}_۱ \frac{\partial \psi}{h_۱ \partial q_۱} + \hat{a}_۲ \frac{\partial \psi}{h_۲ \partial q_۲} + \hat{a}_۳ \frac{\partial \psi}{h_۳ \partial q_۳}$$

(راهنمائی: از شکل سمت چپ (۱) برای بررسی مسئله استفاده کنید.)



شکل ۱: شکل سمت چپ مربوط به حجم $d\tau = h_۱h_۲h_۳dq_۱dq_۲dq_۳$ و شکل سمت راست مربوط به سطح $dS_۱ = h_۲h_۳dq_۲dq_۳$ است.

۷) با استفاده از معادله

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \lim_{\int d\tau\to ۰}\frac{\oint \vec{A}\cdot\vec{ds}}{\int d\tau}$$

رابطه‌ی زیر را بدست آورید

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(q_۱,q_۲,q_۳) = \frac{۱}{h_۱h_۲h_۳}\left[\frac{\partial}{\partial q_۱}(A_۱h_۲h_۳) + \frac{\partial}{\partial q_۲}(A_۲h_۱h_۳) + \frac{\partial}{\partial q_۳}(A_۳h_۱h_۲)\right]$$

(راهنمائی: از شکل سمت چپ (۱) برای بررسی مسئله استفاده کنید.)

۸) با استفاده از معادله

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \lim_{\int da\to ۰}\frac{\oint \vec{A}\cdot\vec{dl}}{\int da}$$

رابطه‌ی زیر را بدست آورید

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}(q_۱,q_۲,q_۳) = \frac{۱}{h_۱h_۲h_۳}\begin{vmatrix} \hat{a}_۱h_۱ & \hat{a}_۲h_۲ & \hat{a}_۳h_۳ \\ \frac{\partial}{\partial q_۱} & \frac{\partial}{\partial q_۲} & \frac{\partial}{\partial q_۳} \\ h_۱A_۱ & h_۲A_۲ & h_۳A_۳ \end{vmatrix}$$

(راهنمائی: از شکل سمت راست (۱) برای بررسی مسئله استفاده کنید.)

۹) اگر بردار یکه $\hat{a}_۱$ در جهت $q_۱$ صعودی باشد، نشان دهید

$$\vec{\nabla}\cdot\hat{a}_۱ = \frac{۱}{h_۱h_۲h_۳}\frac{\partial(h_۲h_۳)}{\partial q_۱} \qquad \vec{\nabla}\times\hat{a}_۱ = \frac{۱}{h_۱}\left[\hat{a}_۲\frac{\partial h_۱}{h_۳\partial q_۳} - \hat{a}_۳\frac{\partial h_۱}{h_۲\partial q_۲}\right]$$

مظفّری