به نام خدا

تمرین شماره: ۷ درس ریاضی فیزیک ۱ تحویل: ۹۲/۲/۱۸

---

۱) اگر x، y و z تابع تحلیلی از q_1، q_2 و q_3 باشد، یعنی

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \qquad y = y(q_1, q_2, q_3), \qquad z = z(q_1, q_2, q_3)$$

بنابراین می‌توان تغییرات بردار مکان را بصورت

$$\vec{dr} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3$$

نشان داد. بردارهای یکه در امتداد تغییرات q_1، q_2 و q_3 برابر

$$\hat{a}_1 = \frac{1}{|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}|} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}, \qquad \hat{a}_2 = \frac{1}{|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}|} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}, \qquad \hat{a}_3 = \frac{1}{|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}|} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}$$

که در صورتی این بردارهای یکه یک دستگاه راستگرد متعامد را تشکیل می‌دهند که رابطه‌ی

$$\hat{a}_i \cdot \hat{a}_j \times \hat{a}_k = \epsilon_{ijk}$$

برقرار باشد. اگر مجذور فاصله کوچک ds برابر

$$\begin{aligned}(ds)^2 &= \vec{dr} \cdot \vec{dr} \\ &= \sum_{i,j} \left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \frac{\partial z}{\partial q_j} \right) dq_i dq_j = \sum_{i,j} h_{ij}^2 dq_i dq_j\end{aligned}$$

باشد، الف) نشان دهید برای دستگاههای مختصات متعامد، اتحاد

$$h_{ij} = h_{ii} \delta_{ij}$$

بر قرار است که معمولا $h_{ii} = h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}$ نمایش داده می‌شود که به ضرایب مقیاس معروف می‌باشد.

ب) نشان دهید بردارهای یکه دستگاه مختصات عام برابر

$$\hat{a}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, 3$$

است.

ج) در دستگاه مختصات دکارتی $d\vec{r} = \hat{i} dx + \hat{j} dy + \hat{k} dz$ بنابراین در هر دستگاه مختصات متعامد دیگری نیز می‌توانیم داشته باشیم $d\vec{r} = \hat{a}_1 ds_1 + \hat{a}_2 ds_2 + \hat{a}_3 ds_3$. نشان دهید

$$ds_i = h_i dq_i, \quad i = 1, 2, 3$$

د) اگر $d\tau = dx dy dz$ نشان دهید

$$d\tau = ds_1 ds_2 ds_3 = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3$$

که $J\left(\frac{x,y,z}{q_1,q_2,q_3}\right) = h_1 h_2 h_3$ ژاکوبی نامیده می‌شود

در حالت کلی

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3 = \sum_i^3 \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} dq_i \tag{1}$$

اگر بردار $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}$ بصورت زیر با یک بردار یکه و اندازه آن عوض کنیم، یعنی

$$\hat{a}_1 = \frac{1}{|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}|} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \Rightarrow \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = \hat{a}_1 |\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}|$$

اینکار رو برای بردارهای $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}$ و $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}$ تکرار می‌کنیم

$$\hat{a}_2 = \frac{1}{|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}|} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \Rightarrow \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} = \hat{a}_2 |\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}|$$
$$\hat{a}_3 = \frac{1}{|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}|} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \Rightarrow \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} = \hat{a}_3 |\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}|$$

بدین ترتیب رابطه (۱) برابر است با

$$d\vec{r} = \hat{a}_1 |\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}| dq_1 + \hat{a}_2 |\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}| dq_2 + \hat{a}_3 |\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}| dq_3 = \sum_i^3 \hat{a}_i |\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}| dq_i \tag{2}$$

اندازه $ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r}$ (معیاری که در تمامی دستگاههای مختصات مقدار آن یکسان است) برابر است با

$$ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2 + ds_3^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = \sum_{i,j} (\hat{a}_i \cdot \hat{a}_i) |\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}||\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}| dq_i dq_j$$

با این شرط که بردارهای یکه محورهای دستگاه خمیده با یکدیگر متعامد باشند، یعنی $\hat{a}_i \cdot \hat{a}_i = \delta_{ij}$، داریم

$$ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2 + ds_3^2 = \sum_{i,j} \delta_{ij} |\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}||\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}| dq_i dq_j = \sum_i |\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}|^2 dq_i^2$$

و بنابراین

$$ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2 + ds_3^2 = \sum_i (h_i dq_i)^2 \tag{3}$$

که در آن اگر $\vec{r} = \hat{i}x(q_1,q_2,q_3) + \hat{j}y(q_1,q_2,q_3) + \hat{k}z(q_1,q_2,q_3)$ بنابراین $h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}$ مقیاس یا فاکتور مقیاس یا مشخصه دستگاه خمیده نامیده می‌شود. همچنین $ds_i = h_i dq_i$ و بردارهای یکه محورهای دستگاه خمیده برابر $\hat{a}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$.

از طرفی دیگر

$$x=x(q_۱,q_۲,q_۳),\quad y=y(q_۱,q_۲,q_۳),\quad z=z(q_۱,q_۲,q_۳)\Rightarrow d\vec{r}=\sum_i\left(\hat{i}\frac{\partial x}{\partial q_i}+\hat{j}\frac{\partial y}{\partial q_i}+\hat{k}\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)dq_i$$

و

$$ds^۲=d\vec{r}\cdot d\vec{r}=\sum_{ij}\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\frac{\partial x}{\partial q_j}+\frac{\partial y}{\partial q_i}\frac{\partial y}{\partial q_j}+\frac{\partial z}{\partial q_i}\frac{\partial z}{\partial q_j}\right)dq_idq_j \tag{٤}$$

مقایسه (۳) با (٤) نشان می‌دهد که

$$\sqrt{\frac{\partial x}{\partial q_i}\frac{\partial x}{\partial q_j}+\frac{\partial y}{\partial q_i}\frac{\partial y}{\partial q_j}+\frac{\partial z}{\partial q_i}\frac{\partial z}{\partial q_j}}=h_{ij}=h_i\delta_{ij}$$

المان حجم $d\tau$ در تمامی دستگاها برابر حاصلضرب $\vec{ds}_i$ها با یکدیگر

$$d\tau=\vec{ds}_۱\cdot\vec{ds}_۲\times\vec{ds}_۳=h_۱h_۲h_۳(\hat{a}_۱\cdot\hat{a}_۲\times\hat{a}_۳)dq_۱dq_۱dq_۱=h_۱h_۲h_۳\epsilon_{۱۲۳}dq_۱dq_۱dq_۱=h_۱h_۲h_۳dq_۱dq_۱dq_۱$$

۲) درستی اتحادهای زیر را بررسی کنید

$$h_ih_j=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_j}\right|,\quad i\neq j$$
$$h_۱h_۲h_۳=\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_۱}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_۲}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_۳}$$

از مسئله قبل داریم

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_۱}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_۲}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_۳}=\hat{a}_۱|\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_۱}|\cdot\hat{a}_۲|\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_۲}|\times\hat{a}_۳|\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_۳}|=\hat{a}_۱h_۱\cdot\hat{a}_۲h_۲\times\hat{a}_۳h_۳$$
$$=(\hat{a}_۱\cdot\hat{a}_۲\times\hat{a}_۳)h_۱h_۲h_۳=\epsilon_{۱۲۳}h_۱h_۲h_۳=h_۱h_۲h_۳$$

و

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_j}=\hat{a}_i|\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}|\times\hat{a}_j|\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_j}|=\hat{a}_ih_i\times\hat{a}_jh_j$$
$$=(\hat{a}_i\times\hat{a}_j)h_ih_j=\sum_k\epsilon_{ijk}\hat{a}_kh_ih_j$$

۳) درستی اتحادهای زیر را بررسی کنید

$$\frac{\partial\hat{a}_i}{\partial q_j}=\hat{a}_j\frac{\partial h_j}{h_i\partial q_i},\quad i\neq j$$
$$\frac{\partial\hat{a}_i}{\partial q_i}=-\sum_{j\neq i}\hat{a}_j\frac{\partial h_i}{h_j\partial q_j}$$

به کمک مسئله اول داریم

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}=\hat{a}_ih_i,\qquad\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_j}=\hat{a}_jh_j$$

اگر از طرفین دو عبارت بالا مشتقهایی با اندیسهای مختلف بگیریم، داریم

$$\frac{\partial^{۲}\vec{r}}{\partial q_i \partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}(\hat{a}_i h_i), \qquad \frac{\partial^{۲}\vec{r}}{\partial q_j \partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}(\hat{a}_j h_j)$$

با توجه به اینکه $\frac{\partial^{۲}\vec{r}}{\partial q_i \partial q_j} = \frac{\partial^{۲}\vec{r}}{\partial q_j \partial q_i}$ پس

$$\frac{\partial}{\partial q_j}(\hat{a}_i h_i) = \frac{\partial}{\partial q_i}(\hat{a}_j h_j)$$

$$h_i \frac{\partial \hat{a}_i}{\partial q_j} + \frac{\partial h_i}{\partial q_j}\hat{a}_i = h_j \frac{\partial \hat{a}_j}{\partial q_i} + \frac{\partial h_j}{\partial q_i}\hat{a}_j$$

دو طرف عبارت بالا را در بردار یکه $\hat{a}_j$ ضرب داخلی می‌کنیم

$$h_i \frac{\partial \hat{a}_i}{\partial q_j}\cdot\hat{a}_j + \frac{\partial h_i}{\partial q_j}\hat{a}_i\cdot\hat{a}_j = h_j \frac{\partial \hat{a}_j}{\partial q_i}\cdot\hat{a}_j + \frac{\partial h_j}{\partial q_i}\hat{a}_j\cdot\hat{a}_j \qquad (۵)$$

با توجه به اینکه $i \neq j$ جمله دوم سمت چپ عبارت بالا برابر صفر است، $\hat{a}_i\cdot\hat{a}_j = ۰$، همچنین اگر از طرفین $\hat{a}_j\cdot\hat{a}_j = ۱$ نسبت به متغییر q_i مشتق بگیریم

$$\hat{a}_j\cdot\hat{a}_j = ۱ \Rightarrow \frac{\partial \hat{a}_j}{\partial q_i}\cdot\hat{a}_j + \hat{a}_j\cdot\frac{\partial \hat{a}_j}{\partial q_i} = ۰ \Rightarrow ۲\frac{\partial \hat{a}_j}{\partial q_i}\cdot\hat{a}_j = ۰ \Rightarrow \frac{\partial \hat{a}_j}{\partial q_i}\cdot\hat{a}_j = ۰$$

بدین‌ترتیب عبارت (۵) بصورت

$$h_i \frac{\partial \hat{a}_i}{\partial q_j}\cdot\hat{a}_j = \frac{\partial h_j}{\partial q_i}\hat{a}_j\cdot\hat{a}_j \Rightarrow \left(h_i \frac{\partial \hat{a}_i}{\partial q_j} - \frac{\partial h_j}{\partial q_i}\hat{a}_j\right)\cdot\hat{a}_j = ۰$$

ساده می‌شود و در نهایت داریم

$$\frac{\partial h_j}{\partial q_i} = h_i \frac{\partial \hat{a}_i}{\partial q_j}\cdot\hat{a}_j, \qquad h_i \frac{\partial \hat{a}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial h_j}{\partial q_i}\hat{a}_j$$

برای اتحاد دوم،

$$\frac{\partial \hat{a}_i}{\partial q_i} = -\sum_{j\neq i}\hat{a}_j \frac{\partial h_i}{h_j \partial q_j} \qquad (٦)$$

اگر در طرفین تساوی بالا بردار یکه‌ی $\hat{a}_k$ را ضرب‌داخلی کنیم، داریم

$$\frac{\partial \hat{a}_i}{\partial q_i}\cdot\hat{a}_k = -\sum_{j\neq i}\hat{a}_j\cdot\hat{a}_k \frac{\partial h_i}{h_j \partial q_j} \Rightarrow \frac{\partial \hat{a}_i}{\partial q_i}\cdot\hat{a}_k = -\sum_{j\neq i}\delta_{jk}\frac{\partial h_i}{h_j \partial q_j}$$

و بنابراین

$$\frac{\partial \hat{a}_i}{\partial q_i}\cdot\hat{a}_k = -\frac{\partial h_i}{h_k \partial q_k}, \qquad i \neq k \qquad (۷)$$

در ادامه قصد داریم بجای بررسی اتحاد (٦)، اتحاد (۷) را بررسی کنیم.

اگر $i \neq k$ بنابراین $\hat{a}_i \cdot \hat{a}_k = ۰$

$$\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\hat{a}_i \cdot \hat{a}_k\right) = ۰ \Rightarrow \frac{\partial \hat{a}_i}{\partial q_i} \cdot \hat{a}_k + \hat{a}_i \cdot \frac{\partial \hat{a}_k}{\partial q_i} = ۰ \Rightarrow \frac{\partial \hat{a}_i}{\partial q_i} \cdot \hat{a}_k = -\hat{a}_i \cdot \frac{\partial \hat{a}_k}{\partial q_i}$$

با استفاده از اتحاد اول $\frac{\partial \hat{a}_k}{\partial q_i} \cdot \hat{a}_i = \frac{\partial h_i}{h_k \partial q_k}$ عبارت سمت راست بالا بصورت

$$\frac{\partial \hat{a}_i}{\partial q_i} \cdot \hat{a}_k = -\frac{\partial h_i}{h_k \partial q_k}$$

تبدیل می‌شود.

۴) برای دستگاه مختصات استوانه‌ای به مختصه‌های ρ، ϕ و z که بصورت

$$x = \rho \cos\phi, \qquad y = \rho \sin\phi, \qquad z = z$$

به دستگاه مختصات دکارتی مربوط می‌شوند. الف) ضرایب مقیاس h_ρ، h_ϕ و h_z را بدست آورید. ب) بردار های یکه $\hat{\rho}$، $\hat{\phi}$ و $\hat{z}$ را بدست آورید. ج) المان حجم را در دستگاه مختصات استوانه‌ای بدست آورید.

الف)

$$h_\rho = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^۲ + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^۲ + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^۲} = \sqrt{\cos^۲\phi + \sin^۲\phi} = ۱$$
$$h_\phi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right)^۲ + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right)^۲ + \left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^۲} = \sqrt{\rho^۲\sin^۲\phi + \rho^۲\cos^۲\phi} = \rho$$
$$h_z = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^۲ + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^۲ + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^۲} = ۱$$

ب)

$$\hat{\rho} = \frac{۱}{h_\rho}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \hat{i}\cos\phi + \hat{j}\sin\phi$$
$$\hat{\phi} = \frac{۱}{h_\phi}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = -\hat{i}\sin\phi + \hat{j}\cos\phi$$
$$\hat{z} = \frac{۱}{h_z}\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \hat{k}$$

ج)

$$\vec{ds}_\rho = \hat{\rho} h_\rho d\rho = \hat{\rho} d\rho$$
$$\vec{ds}_\phi = \hat{\phi} h_\phi d\phi = \hat{\phi}\rho d\phi$$
$$\vec{ds}_z = \hat{z} h_z dz = \hat{k} dz$$

$$d\tau = |\vec{ds}_\rho \cdot \vec{ds}_\phi \times \vec{ds}_z| = |\hat{\rho} \cdot \hat{\phi} \times \hat{z}|\rho d\rho d\phi dz = \rho d\rho d\phi dz$$

۵) برای دستگاه مختصات کروی به مختصه‌های r، θ و ϕ که بصورت

$$x = r\cos\phi\sin\theta, \qquad y = r\sin\phi\sin\theta, \qquad z = r\cos\theta$$

به دستگاه مختصات دکارتی مربوط می‌شوند. الف) ضرایب مقیاس h_r، h_θ و h_ϕ را بدست آورید. ب) بردار های یکه $\hat{r}$، $\hat{\theta}$ و $\hat{\phi}$ را بدست آورید. ج) المان حجم را در دستگاه مختصات کروی بدست آورید.

الف)

$$h_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^۲ + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^۲ + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^۲} = \sqrt{\cos^۲\phi\sin^۲\theta + \sin^۲\phi\sin^۲\theta + \cos^۲\theta} = ۱$$
$$h_\theta = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^۲ + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^۲ + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^۲} = \sqrt{r^۲\cos^۲\phi\cos^۲\theta + r^۲\sin^۲\phi\cos^۲\theta + r^۲\sin^۲\theta} = r$$
$$h_\phi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right)^۲ + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right)^۲ + \left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^۲} = \sqrt{r^۲\sin^۲\phi\sin^۲\theta + r^۲\cos^۲\phi\sin^۲\theta} = r\sin\theta$$

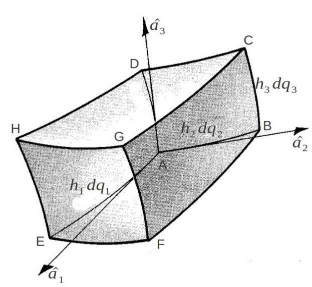
ب)

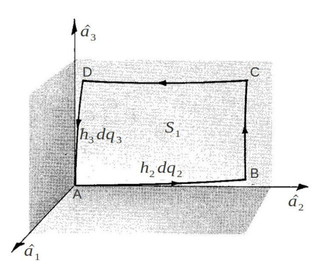
$$\hat{r} = \frac{۱}{h_r}\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \hat{i}\cos\phi\sin\theta + \hat{j}\sin\phi\sin\theta + \hat{k}\cos\theta$$
$$\hat{\theta} = \frac{۱}{h_\theta}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \hat{i}\cos\phi\cos\theta + \hat{j}\sin\phi\cos\theta - \hat{k}\sin\theta$$
$$\hat{\phi} = \frac{۱}{h_\phi}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = -\hat{i}\sin\phi + \hat{j}\cos\phi$$

ج)

$$\vec{ds}_r = \hat{r}h_r dr = \hat{r}dr$$
$$\vec{ds}_\theta = \hat{\theta}h_\theta d\theta = \hat{\theta}rd\theta$$
$$\vec{ds}_\phi = \hat{\phi}h_\phi d\phi = \hat{\phi}r\sin\theta d\phi$$

$$d\tau = |\vec{ds}_r \cdot \vec{ds}_\theta \times \vec{ds}_\phi| = |\hat{r}\cdot\hat{\theta}\times\hat{\phi}|r^۲\sin\theta drd\theta d\phi = r^۲\sin\theta drd\theta d\phi$$





شکل ۱: شکل سمت چپ مربوط به حجم $d\tau = h_۱h_۲h_۳dq_۱dq_۲dq_۳$ و شکل سمت راست مربوط به سطح $dS_۱ = h_۲h_۳dq_۲dq_۳$ است.

۶) با استفاده از معادله

$$\vec{\nabla}\psi = \lim_{\int d\tau \to 0} \frac{\oint \psi \vec{ds}}{\int d\tau}$$

رابطه‌ی زیر را بدست آورید

$$\vec{\nabla}\psi(q_1,q_2,q_3) = \hat{a}_1 \frac{\partial \psi}{h_1 \partial q_1} + \hat{a}_2 \frac{\partial \psi}{h_2 \partial q_2} + \hat{a}_3 \frac{\partial \psi}{h_3 \partial q_3}$$

(راهنمائی: از شکل سمت چپ (۱) برای بررسی مسئله استفاده کنید.)

در اینجا با توجه به شکل (۱) انتگرال سطح بسته را می‌توان بصورت

$$\oint \psi \vec{ds} = \int_{ABCD} \psi \vec{ds} + \int_{EFGH} \psi \vec{ds} + \int_{ADHE} \psi \vec{ds} + \int_{BCGF} \psi \vec{ds} + \int_{ABFE} \psi \vec{ds} + \int_{DCGH} \psi \vec{ds}$$

نوشت که در آن صفحات خمیده‌ی حجم مربوطه بصورت زیر داده می‌شود

برای رویه‌ی $ABCD$:

$$\psi = \psi(q_1,q_2,q_3)$$
$$\vec{ds} = -\hat{a}_1(q_1,q_2,q_3) h_2(q_1,q_2,q_3) h_3(q_1,q_2,q_3) dq_2 dq_3$$

برای رویه‌ی $EFGH$:

$$\psi = \psi(q_1+dq_1,q_2,q_3)$$
$$\vec{ds} = \hat{a}_1(q_1+dq_1,q_2,q_3) h_2(q_1+dq_1,q_2,q_3) h_3(q_1+dq_1,q_2,q_3) dq_2 dq_3$$

برای رویه‌ی $ADHE$:

$$\psi = \psi(q_1,q_2,q_3)$$
$$\vec{ds} = -\hat{a}_2(q_1,q_2,q_3) h_2(q_1,q_2,q_3) h_3(q_1,q_2,q_3) dq_3 dq_1$$

برای رویه‌ی $BCGF$:

$$\psi = \psi(q_1,q_2+dq_2,q_3)$$
$$\vec{ds} = \hat{a}_2(q_1,q_2+dq_2,q_3) h_2(q_1,q_2+dq_2,q_3) h_3(q_1,q_2+dq_2,q_3) dq_3 dq_1$$

برای رویه‌ی $ABFE$:

$$\psi = \psi(q_1,q_2,q_3)$$
$$\vec{ds} = -\hat{a}_3(q_1,q_2,q_3) h_2(q_1,q_2,q_3) h_3(q_1,q_2,q_3) dq_1 dq_2$$

برای رویه‌ی $DCGH$:

$$\psi = \psi(q_1,q_2,q_3+dq_3)$$
$$\vec{ds} = \hat{a}_3(q_1,q_2,q_3+dq_3) h_2(q_1,q_2,q_3+dq_3) h_3(q_1,q_2,q_3+dq_3) dq_1 dq_2$$

که

$$\begin{aligned}\oint \psi \vec{ds} = &-\int_{ABCD} \psi \hat{a}_1 h_2 h_3 dq_2 dq_3 + \int_{EFGH} \left(\psi \hat{a}_1 h_2 h_3 + \frac{\partial \psi \hat{a}_1 h_2 h_3}{\partial q_1} dq_1\right) dq_2 dq_3 \\ &-\int_{ADHE} \psi \hat{a}_2 h_1 h_3 dq_1 dq_3 + \int_{BCGF} \left(\psi \hat{a}_2 h_1 h_3 + \frac{\partial \psi \hat{a}_2 h_1 h_3}{\partial q_2} dq_2\right) dq_1 dq_3 \\ &-\int_{ABFE} \psi \hat{a}_3 h_1 h_2 dq_1 dq_2 + \int_{DCGH} \left(\psi \hat{a}_3 h_1 h_2 + \frac{\partial \psi \hat{a}_3 h_1 h_2}{\partial q_3} dq_3\right) dq_1 dq_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\oint \psi \vec{ds} &= \int \left(\frac{\partial \psi \hat{a}_1 h_2 h_3}{\partial q_1} + \frac{\partial \psi \hat{a}_2 h_1 h_3}{\partial q_2} + \frac{\partial \psi \hat{a}_3 h_1 h_2}{\partial q_3}\right) dq_1 dq_2 dq_3 \\ &= \int \left(\hat{a}_1 h_2 h_3 \frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \hat{a}_2 h_1 h_3 \frac{\partial \psi}{\partial q_2} + \hat{a}_3 h_1 h_2 \frac{\partial \psi}{\partial q_3}\right) dq_1 dq_2 dq_3 \\ &\quad + \int \psi \left(\frac{\partial \hat{a}_1 h_2 h_3}{\partial q_1} + \frac{\partial \hat{a}_2 h_1 h_3}{\partial q_2} + \frac{\partial \hat{a}_3 h_1 h_2}{\partial q_3}\right) dq_1 dq_2 dq_3\end{aligned}$$

اگر $h_1 h_2 h_3$ را در انتگرالده ضرب و تقسیم کنیم داریم

$$\begin{aligned}\oint \psi \vec{ds} = &\int \left(\frac{\hat{a}_1}{h_1}\frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \frac{\hat{a}_2}{h_2}\frac{\partial \psi}{\partial q_2} + \frac{\hat{a}_3}{h_3}\frac{\partial \psi}{\partial q_3}\right) h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3 \\ &+ \int \psi \left(\frac{1}{h_1 h_2 h_3}\frac{\partial \hat{a}_1 h_2 h_3}{\partial q_1} + \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\frac{\partial \hat{a}_2 h_1 h_3}{\partial q_2} + \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\frac{\partial \hat{a}_3 h_1 h_2}{\partial q_3}\right) h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3\end{aligned}$$

$$\oint \psi \vec{ds} = \int \left(\hat{a}_1 \frac{1}{h_1}\frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \hat{a}_2 \frac{1}{h_2}\frac{\partial \psi}{\partial q_2} + \hat{a}_3 \frac{1}{h_3}\frac{\partial \psi}{\partial q_3}\right) d\tau + \int \psi \vec{w}(q_1, q_2, q_3) d\tau$$

$$\begin{aligned}\vec{w}(q_1, q_2, q_3) = &\frac{1}{h_1}\frac{\partial \hat{a}_1}{\partial q_1} + \frac{1}{h_2}\frac{\hat{a}_1}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial q_1} + \frac{1}{h_3}\frac{\hat{a}_1}{h_1}\frac{\partial h_3}{\partial q_1} \\ &+ \frac{1}{h_1}\frac{\hat{a}_2}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial q_2} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial \hat{a}_2}{\partial q_2} + \frac{1}{h_3}\frac{\hat{a}_2}{h_2}\frac{\partial h_3}{\partial q_2} \\ &+ \frac{1}{h_1}\frac{\hat{a}_3}{h_3}\frac{\partial h_1}{\partial q_3} + \frac{1}{h_2}\frac{\hat{a}_3}{h_3}\frac{\partial h_2}{\partial q_3} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial \hat{a}_3}{\partial q_3}\end{aligned}$$

با استفاده از اتحاد دوم مسئله (۳) داریم

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \hat{a}_1}{\partial q_1} + \frac{\hat{a}_2}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial q_2} + \frac{\hat{a}_3}{h_3}\frac{\partial h_1}{\partial q_3} = 0 \\ &\frac{\hat{a}_1}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial q_1} + \frac{\partial \hat{a}_2}{\partial q_2} + \frac{\hat{a}_3}{h_3}\frac{\partial h_2}{\partial q_3} = 0 \\ &\frac{\hat{a}_1}{h_1}\frac{\partial h_3}{\partial q_1} + \frac{\hat{a}_2}{h_2}\frac{\partial h_3}{\partial q_2} + \frac{\partial \hat{a}_3}{\partial q_3} = 0\end{aligned}$$

روابط بالا نشان می‌دهد که $\vec{w}=0$ بنابراین

$$\oint \psi \vec{ds} = \int \left(\hat{a}_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \hat{a}_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} + \hat{a}_3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial q_3} \right) d\tau$$

طبق تعریف $\vec{\nabla}\psi$، وقتی که $d\tau \to 0$

$$\vec{\nabla}\psi = \lim_{\int d\tau \to 0} \frac{\oint \psi \vec{ds}}{\int d\tau} = \hat{a}_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \hat{a}_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} + \hat{a}_3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial q_3}$$

۷) با استفاده از معادله

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \lim_{\int d\tau \to 0} \frac{\oint \vec{A} \cdot \vec{ds}}{\int d\tau}$$

رابطه‌ی زیر را بدست آورید

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(q_1, q_2, q_3) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1}(A_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(A_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3}(A_3 h_1 h_2) \right]$$

(راهنمائی: از شکل سمت چپ (۱) برای بررسی مسئله استفاده کنید.)

در اینجا با توجه به شکل (۱) انتگرال سطح بسته را می‌توان بصورت

$$\oint \vec{A} \cdot \vec{ds} = \int_{ABCD} \vec{A} \cdot \vec{ds} + \int_{EFGH} \vec{A} \cdot \vec{ds} + \int_{ADHE} \vec{A} \cdot \vec{ds} + \int_{BCGF} \vec{A} \cdot \vec{ds} + \int_{ABFE} \vec{A} \cdot \vec{ds} + \int_{DCGH} \vec{A} \cdot \vec{ds}$$

نوشت که در آن صفحات خمیده‌ی حجم مربوطه بصورت زیر داده می‌شود

برای رویه‌ی $ABCD$:

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \hat{a}_1(q_1, q_2, q_3) A_1(q_1, q_2, q_3) + \hat{a}_2(q_1, q_2, q_3) A_2(q_1, q_2, q_3) + \hat{a}_3(q_1, q_2, q_3) A_3(q_1, q_2, q_3) \\ \vec{ds} &= -\hat{a}_1(q_1, q_2, q_3) h_2(q_1, q_2, q_3) h_3(q_1, q_2, q_3) dq_2 dq_3 \end{aligned}$$

برای رویه‌ی $EFGH$:

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \hat{a}_1(q_1 + dq_1, q_2, q_3) A_1(q_1 + dq_1, q_2, q_3) \\ &\quad + \hat{a}_2(q_1 + dq_1, q_2, q_3) A_2(q_1 + dq_1, q_2, q_3) \\ &\qquad + \hat{a}_3(q_1 + dq_1, q_2, q_3) A_3(q_1 + dq_1, q_2, q_3) \\ \vec{ds} &= \hat{a}_1(q_1 + dq_1, q_2, q_3) h_2(q_1 + dq_1, q_2, q_3) h_3(q_1 + dq_1, q_2, q_3) dq_2 dq_3 \end{aligned}$$

برای رویه‌ی $BCGF$:

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \hat{a}_1(q_1, q_2 + dq_2, q_3) A_1(q_1, q_2 + dq_2, q_3) \\ &\quad + \hat{a}_2(q_1, q_2 + dq_2, q_3) A_2(q_1, q_2 + dq_2, q_3) \\ &\qquad + \hat{a}_3(q_1, q_2 + dq_2, q_3) A_3(q_1, q_2 + dq_2, q_3) \\ \vec{ds} &= \hat{a}_2(q_1, q_2 + dq_2, q_3) h_2(q_1, q_2 + dq_2, q_3) h_3(q_1, q_2 + dq_2, q_3) dq_3 dq_1 \end{aligned}$$

برای رویه‌ی $ADHE$:

$$\vec{A} = \hat{a}_1(q_1,q_2,q_3)A_1(q_1,q_2,q_3) + \hat{a}_2(q_1,q_2,q_3)A_2(q_1,q_2,q_3) + \hat{a}_3(q_1,q_2,q_3)A_3(q_1,q_2,q_3)$$
$$\vec{ds} = -\hat{a}_2(q_1,q_2,q_3)h_2(q_1,q_2,q_3)h_3(q_1,q_2,q_3)dq_3dq_1$$

برای رویه‌ی $ABFE$:

$$\vec{A} = \hat{a}_1(q_1,q_2,q_3)A_1(q_1,q_2,q_3) + \hat{a}_2(q_1,q_2,q_3)A_2(q_1,q_2,q_3) + \hat{a}_3(q_1,q_2,q_3)A_3(q_1,q_2,q_3)$$
$$\vec{ds} = -\hat{a}_3(q_1,q_2,q_3)h_2(q_1,q_2,q_3)h_3(q_1,q_2,q_3)dq_1dq_2$$

برای رویه‌ی $DCGH$:

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \hat{a}_1(q_1,q_2,q_3+dq_3)A_1(q_1,q_2,q_3+dq_3)\\ &\quad + \hat{a}_2(q_1,q_2,q_3+dq_3)A_2(q_1,q_2,q_3+dq_3)\\ &\qquad + \hat{a}_3(q_1,q_2,q_3+dq_3)A_3(q_1,q_2,q_3+dq_3)\\ \vec{ds} &= \hat{a}_3(q_1,q_2,q_3+dq_3)h_2(q_1,q_2,q_3+dq_3)h_3(q_1,q_2,q_3+dq_3)dq_1dq_2\end{aligned}$$

که

$$\begin{aligned}\oint \vec{A}\cdot\vec{ds} = &-\int_{ABCD} A_1h_2h_3dq_2dq_3 + \int_{EFGH}\left(A_1h_2h_3 + \frac{\partial A_1h_2h_3}{\partial q_1}dq_1\right)dq_2dq_3\\ &-\int_{ADHE} A_2h_3h_1dq_3dq_1 + \int_{BCGF}\left(A_2h_3h_1 + \frac{\partial A_2h_3h_1}{\partial q_2}\right)dq_3dq_1\\ &-\int_{ABFE} A_3h_1h_2dq_1dq_2 + \int_{DCGH}\left(A_3h_1h_2 + \frac{\partial A_3h_1h_2}{\partial q_3}dq_3\right)dq_1dq_2\end{aligned}$$

$$\oint \vec{A}\cdot\vec{ds} = \int\left(\frac{\partial A_1h_2h_3}{\partial q_1} + \frac{\partial A_2h_3h_1}{\partial q_2} + \frac{\partial A_3h_1h_2}{\partial q_3}\right)dq_1dq_2dq_3$$

اگر $h_1h_2h_3$ را در انتگرالده ضرب و تقسیم کنیم داریم

$$\oint \vec{A}\cdot\vec{ds} = \int \frac{1}{h_1h_2h_3}\left(\frac{\partial A_1h_2h_3}{\partial q_1} + \frac{\partial A_2h_3h_1}{\partial q_2} + \frac{\partial A_3h_1h_2}{\partial q_3}\right)d\tau$$

طبق تعریف $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$، وقتی که $d\tau \to 0$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \lim_{\int d\tau\to 0}\frac{\oint\vec{A}\cdot\vec{ds}}{\int d\tau} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left(\frac{\partial A_1h_2h_3}{\partial q_1} + \frac{\partial A_2h_3h_1}{\partial q_2} + \frac{\partial A_3h_1h_2}{\partial q_3}\right)$$

۸) با استفاده از معادله

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \lim_{\int da\to 0}\frac{\oint\vec{A}\cdot\vec{dl}}{\int da}$$

رابطه‌ی زیر را بدست آورید

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}(q_1,q_2,q_3)=\frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix}\hat{a}_1h_1 & \hat{a}_2h_2 & \hat{a}_3h_3\\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3}\\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3\end{vmatrix}$$

(راهنمائی: از شکل سمت راست (۱) برای بررسی مسئله استفاده کنید.)

در اینجا با توجه به شکل (۱) انتگرال مسیر بسته را می‌توان بصورت

$$\oint\vec{A}\cdot\vec{dl}=\int_{AB}\vec{A}\cdot\vec{dl}+\int_{BC}\vec{A}\cdot\vec{dl}+\int_{CD}\vec{A}\cdot\vec{dl}+\int_{DA}\vec{A}\cdot\vec{dl}$$

نوشت که در آن مشخصات مسیرها بصورت زیر داده می‌شود

برای مسیر AB:

$$\vec{A}=\hat{a}_1(q_1,q_2,q_3)A_1(q_1,q_2,q_3)+\hat{a}_2(q_1,q_2,q_3)A_2(q_1,q_2,q_3)+\hat{a}_3(q_1,q_2,q_3)A_3(q_1,q_2,q_3)$$
$$\vec{dl}=\hat{a}_2(q_1,q_2,q_3)h_2(q_1,q_2,q_3)dq_2$$

برای مسیر BC:

$$\begin{aligned}\vec{A}&=\hat{a}_1(q_1,q_2+dq_2,q_3)A_1(q_1,q_2+dq_2,q_3)\\&\quad+\hat{a}_2(q_1,q_2+dq_2,q_3)A_2(q_1,q_2+dq_2,q_3)\\&\qquad+\hat{a}_3(q_1,q_2+dq_2,q_3)A_3(q_1,q_2+dq_2,q_3)\\\vec{dl}&=\hat{a}_3(q_1,q_2+dq_2,q_3)h_3(q_1,q_2+dq_2,q_3)dq_2\end{aligned}$$

برای مسیر CD:

$$\begin{aligned}\vec{A}&=\hat{a}_1(q_1,q_2,q_3+dq_3)A_1(q_1,q_2,q_3+dq_3)\\&\quad+\hat{a}_2(q_1,q_2,q_3+dq_3)A_2(q_1,q_2,q_3+dq_3)\\&\qquad+\hat{a}_3(q_1,q_2,q_3+dq_3)A_3(q_1,q_2,q_3+dq_3)\\\vec{dl}&=-\hat{a}_2(q_1,q_2,q_3+dq_3)h_2(q_1,q_2,q_3+dq_3)dq_2\end{aligned}$$

برای مسیر DA:

$$\vec{A}=\hat{a}_1(q_1,q_2,q_3)A_1(q_1,q_2,q_3)+\hat{a}_2(q_1,q_2,q_3)A_2(q_1,q_2,q_3)+\hat{a}_3(q_1,q_2,q_3)A_3(q_1,q_2,q_3)$$
$$\vec{dl}=-\hat{a}_3(q_1,q_2,q_3)h_3(q_1,q_2,q_3)dq_3$$

که

$$\begin{aligned}\oint\vec{A}\cdot\vec{dl}&=\int_{AB}A_2h_2dq_2-\int_{CD}\left(A_2h_2+\frac{\partial A_2h_2}{\partial q_3}dq_3\right)dq_2\\&\quad+\int_{BC}\left(A_3h_3+\frac{\partial A_3h_3}{\partial q_2}dq_2\right)-\int_{DA}A_3h_3dq_3=\int\left(\frac{\partial A_3h_3}{\partial q_2}-\frac{\partial A_2h_2}{\partial q_3}\right)dq_2dq_3\end{aligned}$$

اگر $h_1h_2h_3$ را در انتگرالده ضرب و تقسیم کنیم داریم

$$\oint\vec{A}\cdot\vec{dl}=\int\frac{1}{h_1h_2h_3}\left(\frac{\partial A_3h_3}{\partial q_2}-\frac{\partial A_2h_2}{\partial q_3}\right)h_1dS_1$$

طبق تعریف $\vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot\hat{a}_۱$، وقتی که $dS_۱ \to ۰$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot\hat{a}_۱ = \lim_{\int dS_۱\to ۰}\frac{\oint \vec{A}\cdot d\vec{l}}{\int dS_۱} = \frac{۱}{h_۱h_۲h_۳}\left(\frac{\partial A_۳h_۳}{\partial q_۲} - \frac{\partial A_۲h_۲}{\partial q_۳}\right)h_۱$$

یا

$$(\vec{\nabla}\times\vec{A})_۱ = \frac{۱}{h_۱h_۲h_۳}\left(\frac{\partial A_۳h_۳}{\partial q_۲} - \frac{\partial A_۲h_۲}{\partial q_۳}\right)h_۱a_۱$$

۹) اگر بردار یکه $\hat{a}_۱$ در جهت $q_۱$ صعودی باشد، نشان دهید

$$\vec{\nabla}\cdot\hat{a}_۱ = \frac{۱}{h_۱h_۲h_۳}\frac{\partial(h_۲h_۳)}{\partial q_۱} \qquad \vec{\nabla}\times\hat{a}_۱ = \frac{۱}{h_۱}\left[\hat{a}_۲\frac{\partial h_۱}{h_۳\partial q_۳} - \hat{a}_۳\frac{\partial h_۱}{h_۲\partial q_۲}\right]$$

اگر $\vec{A} = a_۱$ با توجه به مسئله (۷) و (۸) داریم

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{۱}{h_۱h_۲h_۳}\frac{\partial(h_۲h_۳)}{\partial q_۱} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{۱}{h_۱}\left[\hat{a}_۲\frac{\partial h_۱}{h_۳\partial q_۳} - \hat{a}_۳\frac{\partial h_۱}{h_۲\partial q_۲}\right]$$

مظفّری