به نام خدا

تمرین شماره: ۸ درس ریاضی فیزیک ۱ تحویل: ۹۲/۲/۲۵

---

۱) بردارهای یکه‌ی دکارتی را به مولفه‌های کروی آنها تجزیه کنید، یعنی

$$\hat{i} = \hat{r}\sin\theta\cos\phi + \hat{\theta}\cos\theta\cos\phi - \hat{\phi}\sin\phi$$
$$\hat{j} = \hat{r}\sin\theta\sin\phi + \hat{\theta}\cos\theta\sin\phi + \hat{\phi}\cos\phi$$
$$\hat{k} = \hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta$$

۲) بردارهای یکه‌ی دکارتی را به مولفه‌های استوانه‌ای آنها تجزیه کنید، یعنی

$$\hat{i} = \hat{\rho}\cos\phi - \hat{\phi}\sin\phi$$
$$\hat{j} = \hat{\rho}\sin\phi + \hat{\phi}\cos\phi$$
$$\hat{k} = \hat{k}$$

۳) راستای یک بردار با زاویه‌های $\theta_۱$ و $\phi_۱$ تعیین می‌شود. برای یک بردار دیگر زاویه‌های متناظر عبارتند از $\theta_۲$ و $\phi_۲$. نشان دهید که زاویه‌ی بین این بردارها، γ، از رابطه زیر بدست می‌آید

$$\cos\gamma = \cos\theta_۱ cos\theta_۲ + \sin\theta_۱\sin\theta_۲\cos(\phi_۱ - \phi_۲)$$

٤) ذره‌ای در فضا حرکت می کند، مولفه‌های سرعت و شتاب آنرا در دستگاه کروی بدست آورید

$$v_r = \dot{r}$$
$$v_\theta = r\dot{\theta}$$
$$v_\phi = r\sin\theta\dot{\phi}$$
$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^۲ - r\sin^۲\theta\dot{\phi}^۲$$
$$a_\theta = r\ddot{\theta} + ۲\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^۲$$
$$a_\phi = r\sin\theta\ddot{\phi} + ۲\dot{r}\sin\theta\dot{\phi} + ۲r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\phi}$$

۵) ذره‌ای در فضا حرکت می کند، مولفه‌های سرعت و شتاب آنرا در دستگاه استوانه‌ای بدست آورید

$$v_\rho = \dot{\rho}$$
$$v_\phi = \rho\dot{\phi}$$
$$v_z = \dot{z}$$
$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^۲$$
$$a_\phi = \rho\ddot{\phi} + ۲\dot{\rho}\dot{\phi}$$
$$a_z = \ddot{z}$$

۶) ذره‌ی m تحت تاثیر یک نیروی مرکزی مطابق قانون دوم نیوتن

$$m\ddot{\vec{r}} = \hat{r} f(r)$$

در فضا حرکت می کند، نشان دهید که $\vec{r} \times \vec{v} = \vec{c}$ یک ثابت است.

۷) اپراتورهای $\partial/\partial x$، $\partial/\partial y$ و $\partial/\partial z$ را در مختصات کروی بیان کنید

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial r} + \cos\theta\cos\phi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} \\
\frac{\partial}{\partial y} &= \sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial r} + \cos\theta\sin\phi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} \\
\frac{\partial}{\partial z} &= \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \sin\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}
\end{aligned}$$

راهنمائی: همزمان $\vec{\nabla}_{xyz}$ را برابر با $\vec{\nabla}_{r\theta\phi}$ قرار دهید

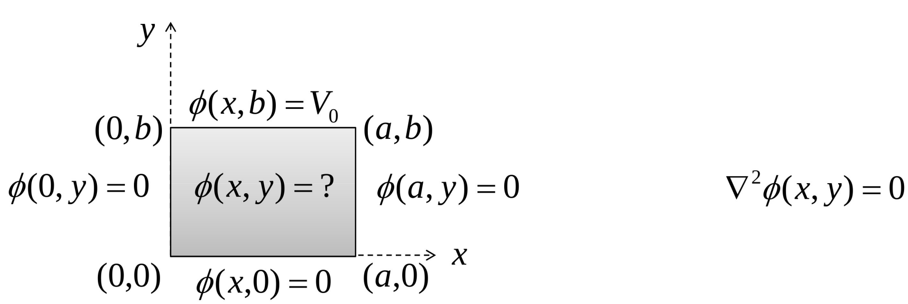
۸) از تمرین (۷) استفاده کنید و نشان دهید که

$$-i\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) = -i\frac{\partial}{\partial\phi}$$

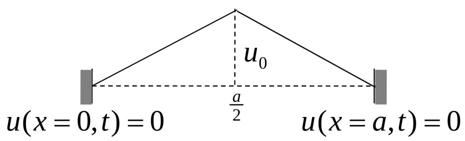
۹) از تمرین (۷) استفاده کنید و نشان دهید که

$$\begin{aligned}
L_x + iL_y &= e^{i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \\
L_x - iL_y &= -e^{-i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)
\end{aligned}$$

۱۰) با استفاده از جداسازی متغییرها پتانسیل ϕ را برای هندسه و شرایط مرزی داده شده پیدا کنید وقتی معادله حاکم در مسئله $\nabla^2\phi = 0$ است.



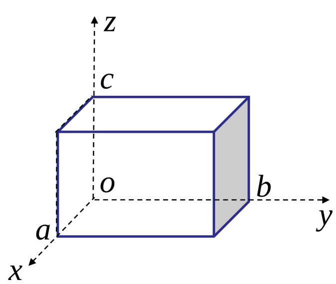
۱۱) با استفاده از جداسازی متغییرها معادله انتشار موج $u(x,t)$ در یک بعد برای هندسه و شرایط اولیه $u(x=0,t)$ داده شده پیدا کنید وقتی معادله حاکم در مسئله $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ است.



$$u(x,t) = ?$$

$$u(x,t=0) = \begin{cases} \frac{2u_0}{a}x, & 0 \le x \le \frac{a}{2} \\ -\frac{2u_0}{a}(x-a), & \frac{a}{2} \le x \le a \end{cases} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

۱۲) یک ذره (کوانتومی) محبوس در جعبه‌ای به شکل مکعب مستطیل است. این ذره توسط تابع موج ψ توصیف می‌شود که معادله شرودینگر $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = E\psi$ آنرا برآورده می‌کند. تابع موج روی هر وجه مکعب برابر صفر است. با توجه به جداسازی متغییرها این شرایط مرزی قیوردی را برای انرژی تحمیل می‌کند که انرژی همواره مقادیر مشخصی را داشته باشد.



$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = E\psi$$

$$\begin{cases} \psi(x=0,y,z) = \psi(x=a,y,z) = 0 \\ \psi(x,y=0,z) = \psi(x,y=b,z) = 0 \\ \psi(x,y,z=0) = \psi(x,y,z=c) = 0 \end{cases}$$

مظفّری