به نام خدا

تمرین شماره: ۸ درس ریاضی فیزیک ۱ تحویل: ۹۲/۲/۲۵

---

۱) بردارهای یکه‌ی دکارتی را به مولفه‌های کروی آنها تجزیه کنید، یعنی

$$\hat{i} = \hat{r}\sin\theta\cos\phi + \hat{\theta}\cos\theta\cos\phi - \hat{\phi}\sin\phi$$
$$\hat{j} = \hat{r}\sin\theta\sin\phi + \hat{\theta}\cos\theta\sin\phi + \hat{\phi}\cos\phi$$
$$\hat{k} = \hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta$$

از تمرینهای سری هفتم داریم

$$\hat{r} = \hat{i}\cos\phi\sin\theta + \hat{j}\sin\phi\sin\theta + \hat{k}\cos\theta$$
$$\hat{\theta} = \hat{i}\cos\phi\cos\theta + \hat{j}\sin\phi\cos\theta - \hat{k}\sin\theta$$
$$\hat{\phi} = -\hat{i}\sin\phi + \hat{j}\cos\phi$$

هر بردار در دستگاه مختصات کروی را می‌توان بصورت زیر تجزیه کرد

$$\vec{A} = \hat{r}A_r + \hat{\theta}A_\theta + \hat{\phi}A_\phi$$

که با معلوم بودن بردار $\vec{A}$ و بردارهای یکه دستگاه کروی می‌توان مولفه‌های بردار $\vec{A}$ را بصورت زیر بدست آورد

$$A_r = \hat{r}\cdot\vec{A}$$
$$A_\theta = \hat{\theta}\cdot\vec{A}$$
$$A_\phi = \hat{\phi}\cdot\vec{A}$$

اگر $\vec{A} = \hat{i}$ بنابراین

$$\begin{cases} \hat{r}\cdot\hat{i} = \cos\phi\sin\theta \\ \hat{\theta}\cdot\hat{i} = \cos\phi\cos\theta \\ \hat{\phi}\cdot\hat{i} = -\sin\phi \end{cases} \Rightarrow \hat{i} = \hat{r}\cos\phi\sin\theta + \hat{\theta}\cos\phi\cos\theta - \hat{\phi}\sin\phi$$

اگر $\vec{A} = \hat{j}$ بنابراین

$$\begin{cases} \hat{r}\cdot\hat{j} = \sin\phi\sin\theta \\ \hat{\theta}\cdot\hat{j} = \sin\phi\cos\theta \\ \hat{\phi}\cdot\hat{j} = \cos\phi \end{cases} \Rightarrow \hat{j} = \hat{r}\sin\phi\sin\theta + \hat{\theta}\sin\phi\cos\theta + \hat{\phi}\cos\phi$$

اگر $\vec{A} = \hat{k}$ بنابراین

$$\begin{cases} \hat{r}\cdot\hat{k} = \cos\theta \\ \hat{\theta}\cdot\hat{k} = -\sin\theta \\ \hat{\phi}\cdot\hat{k} = ۰ \end{cases} \Rightarrow \hat{k} = \hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta$$

۲) بردارهای یکه‌ی دکارتی را به مولفه‌های استوانه‌ای آنها تجزیه کنید، یعنی

$$\hat{i} = \hat{\rho}\cos\phi - \hat{\phi}\sin\phi$$
$$\hat{j} = \hat{\rho}\sin\phi + \hat{\phi}\cos\phi$$
$$\hat{k} = \hat{k}$$

از تمرینهای سری هفتم داریم

$$\hat{\rho} = \hat{i}\cos\phi + \hat{j}\sin\phi$$
$$\hat{\phi} = -\hat{i}\sin\phi + \hat{j}\cos\phi$$
$$\hat{k} = \hat{k}$$

هر بردار در دستگاه مختصات استوانه‌ای را می‌توان بصورت زیر تجزیه کرد

$$\vec{A} = \hat{\rho}A_\rho + \hat{\phi}A_\phi + \hat{k}A_z$$

که با معلوم بودن بردار $\vec{A}$ و بردارهای یکه دستگاه استوانه‌ای می‌توان مولفه‌های بردار $\vec{A}$ را بصورت زیر بدست آورد

$$A_\rho = \hat{\rho}\cdot\vec{A}$$
$$A_\phi = \hat{\phi}\cdot\vec{A}$$
$$A_z = \hat{k}\cdot\vec{A}$$

اگر $\vec{A} = \hat{i}$ بنابراین

$$\begin{cases} \hat{\rho}\cdot\hat{i} = \cos\phi \\ \hat{\phi}\cdot\hat{i} = -\sin\phi \Rightarrow \hat{i} = \hat{\rho}\cos\phi - \hat{\phi}\sin\phi \\ \hat{k}\cdot\hat{i} = ۰ \end{cases}$$

اگر $\vec{A} = \hat{j}$ بنابراین

$$\begin{cases} \hat{\rho}\cdot\hat{j} = \sin\phi \\ \hat{\phi}\cdot\hat{j} = \cos\phi \Rightarrow \hat{j} = \hat{\rho}\sin\phi + \hat{\phi}\cos\phi \\ \hat{k}\cdot\hat{j} = ۰ \end{cases}$$

اگر $\vec{A} = \hat{k}$ بنابراین

$$\begin{cases} \hat{\rho}\cdot\hat{k} = ۰ \\ \hat{\phi}\cdot\hat{k} = ۰ \Rightarrow \hat{k} = \hat{k} \\ \hat{k}\cdot\hat{k} = ۱ \end{cases}$$

۳) راستای یک بردار با زاویه‌های $\theta_۱$ و $\phi_۱$ تعیین می‌شود. برای یک بردار دیگر زاویه‌های متناظر عبارتند از $\theta_۲$ و $\phi_۲$. نشان دهید که زاویه‌ی بین این بردارها، γ، از رابطه زیر بدست می‌آید

$$\cos\gamma = \cos\theta_۱ cos\theta_۲ + \sin\theta_۱\sin\theta_۲\cos(\phi_۱ - \phi_۲)$$

دو بردار $\vec{A_۱}$ و $\vec{A_۲}$ را می‌توان بصورت زیر نوشت

$$\begin{cases} \vec{A_۱} = A_۱(\hat{i}\cos\phi_۱\sin\theta_۱ + \hat{j}\sin\phi_۱\sin\theta_۱ + \hat{k}\cos\theta_۱) \\ \vec{A_۲} = A_۲(\hat{i}\cos\phi_۲\sin\theta_۲ + \hat{j}\sin\phi_۲\sin\theta_۲ + \hat{k}\cos\theta_۲) \end{cases}$$

با توجه به تعریف ضرب‌داخلی، کسینوس زاویه بین دو بردار را می‌توان بصورت

$$\cos\gamma = \frac{\vec{A_۱}\cdot\vec{A_۱}}{A_۱A_۲}$$

بدست آورد و

$$\begin{aligned} \cos\gamma &= \cos\phi_۱\sin\theta_۱\cos\phi_۲\sin\theta_۲ + \sin\phi_۱\sin\theta_۱\sin\phi_۲\sin\theta_۲ + \cos\theta_۱\cos\theta_۲ \\ &= \sin\theta_۱\sin\theta_۲(\cos\phi_۱\cos\phi_۲ + \sin\phi_۱\sin\phi_۲) + \cos\theta_۱\cos\theta_۲ \\ &= \sin\theta_۱\sin\theta_۲\cos(\phi_۱ - \phi_۲) + \cos\theta_۱\cos\theta_۲ \end{aligned}$$

٤) ذره‌ای در فضا حرکت می کند، مولفه‌های سرعت و شتاب آنرا در دستگاه کروی بدست آورید

$$\begin{aligned} v_r &= \dot{r} \\ v_\theta &= r\dot{\theta} \\ v_\phi &= r\sin\theta\dot{\phi} \\ a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^۲ - r\sin^۲\theta\dot{\phi}^۲ \\ a_\theta &= r\ddot{\theta} + ۲\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^۲ \\ a_\phi &= r\sin\theta\ddot{\phi} + ۲\dot{r}\sin\theta\dot{\phi} + ۲r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\phi} \end{aligned}$$

بردار مکان در مختصات کروی

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

داده می‌شود که بردار سرعت آن برابر

$$\begin{aligned} \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} &= \dot{r}\hat{r} + r\frac{d}{dt}\hat{r} = \dot{r}\hat{r} + r\left(\frac{d\theta}{dt}\frac{\partial\hat{r}}{\partial\theta} + \frac{d\phi}{dt}\frac{\partial\hat{r}}{\partial\phi}\right) \\ &= \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\frac{\partial\hat{r}}{\partial\theta} + r\dot{\phi}\frac{\partial\hat{r}}{\partial\phi} \end{aligned}$$

با استفاده از اتحادهای مسئله (۳) در تمرین سری ۷، یعنی $i \neq j \quad \frac{\partial\hat{a}_i}{\partial q_j} = \hat{a}_j\frac{\partial h_j}{h_i\partial q_i},$ و $\frac{\partial\hat{a}_i}{\partial q_i} = -\sum_{j\neq i}\hat{a}_j\frac{\partial h_i}{h_j\partial q_j}$ داریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial\hat{r}}{\partial\theta} &= \hat{\theta}\frac{\partial h_\theta}{h_r dr} \\ \frac{\partial\hat{r}}{\partial\phi} &= \hat{\phi}\frac{\partial h_\phi}{h_r dr} \end{aligned}$$

و با توجه به اینکه $h_r = ۱$، $h_\theta = r$ و $h_\phi = r\sin\theta$ داریم

$$\frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} = \hat{\theta}$$
$$\frac{\partial \hat{r}}{\partial \phi} = \hat{\phi}\sin\theta$$

بنابراین

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi}$$

شتاب حرکت

$$\vec{a} = \left(\ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\frac{d\hat{r}}{dt}\right) + \left(\dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\frac{d\hat{\theta}}{dt}\right) + \left(\dot{r}\sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi} + r\dot{\theta}\cos\theta\dot{\phi}\hat{\phi} + r\sin\theta\ddot{\phi}\hat{\phi} + r\sin\theta\dot{\phi}\frac{d\hat{\phi}}{dt}\right)$$

که

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{\theta}\frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} + \dot{\phi}\frac{\partial \hat{r}}{\partial \phi} = \dot{\theta}\hat{\theta}\frac{\partial h_\theta}{h_r\partial r} + \dot{\phi}\hat{\phi}\frac{\partial h_\phi}{h_r\partial r} = \dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{\phi}\hat{\phi}\sin\theta$$
$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = \dot{\theta}\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta} + \dot{\phi}\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \phi} = -\dot{\theta}\left(\hat{r}\frac{\partial h_\theta}{h_r\partial r} + \hat{\phi}\frac{\partial h_\theta}{h_\phi\partial \phi}\right) + \dot{\phi}\hat{\phi}\frac{\partial h_\phi}{h_\theta\partial \theta} = -\dot{\theta}\hat{r} + \dot{\phi}\hat{\phi}\cos\theta$$
$$\frac{d\hat{\phi}}{dt} = \dot{\theta}\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \theta} + \dot{\phi}\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \phi} = \dot{\theta}\hat{\theta}\frac{\partial h_\theta}{h_\phi\partial \phi} - \dot{\phi}\left(\hat{r}\frac{\partial h_\phi}{h_r\partial r} + \hat{\theta}\frac{\partial h_\phi}{h_\theta\partial \theta}\right) = -\hat{r}\dot{\phi}\sin\theta - \hat{\theta}\dot{\phi}\cos\theta$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \hat{r}(\ddot{r} - r\dot{\theta}^۲ - r\dot{\phi}^۲\sin^۲\theta) \\ &+ \hat{\theta}(۲\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\phi}^۲\sin\theta\cos\theta) \\ &+ \hat{\phi}(۲\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + ۲r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta + r\ddot{\phi}\sin\theta)\end{aligned}$$

۵) ذره‌ای در فضا حرکت می کند، مولفه‌های سرعت و شتاب آنرا در دستگاه استوانه‌ای بدست آورید

$$v_\rho = \dot{\rho}$$
$$v_\phi = \rho\dot{\phi}$$
$$v_z = \dot{z}$$
$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^۲$$
$$a_\phi = \rho\ddot{\phi} + ۲\dot{\rho}\dot{\phi}$$
$$a_z = \ddot{z}$$

بردار مکان در مختصات استوانه‌ای برابر

$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{k}$$

با توجه به اینکه $h_\rho = ۱$، $h_\phi = \rho$ و $h_z = ۱$ و همچنین با استفاده از اتحادهای مسئله (۳) در تمرین سری ۷، بردار سرعت برابر است با

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\frac{d\hat{\rho}}{dt} + \dot{z}\hat{k}\\ &= \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\frac{d\hat{\rho}}{d\phi} + \dot{z}\hat{k}\\ &= \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\left(\hat{\phi}\frac{dh_\phi}{h_\rho d\rho}\right) + \dot{z}\hat{k}\\ &= \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{k}\end{aligned}$$

و بردار شتاب برابر است با

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \ddot{\rho}\hat{\rho} + \dot{\rho}\frac{d\hat{\rho}}{dt} + \dot{\rho}\dot{\phi}\hat{\phi} + \rho\ddot{\phi}\hat{\phi} + \rho\dot{\phi}\frac{d\hat{\phi}}{dt} + \ddot{z}\hat{k}\\ &= \ddot{\rho}\hat{\rho} + \dot{\rho}\dot{\phi}\frac{d\hat{\rho}}{d\phi} + \dot{\rho}\dot{\phi}\hat{\phi} + \rho\ddot{\phi}\hat{\phi} + \rho\dot{\phi}^۲\frac{d\hat{\phi}}{d\phi} + \ddot{z}\hat{k}\\ &= \ddot{\rho}\hat{\rho} + \dot{\rho}\dot{\phi}\left(\hat{\phi}\frac{dh_\phi}{h_\rho d\rho}\right) + \dot{\rho}\dot{\phi}\hat{\phi} + \rho\ddot{\phi}\hat{\phi} + \rho\dot{\phi}^۲\left(-\hat{\rho}\frac{dh_\phi}{h_\rho d\rho}\right) + \ddot{z}\hat{k}\\ &= \hat{\rho}(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^۲) + \hat{\phi}(۲\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}) + \ddot{z}\hat{k}\end{aligned}$$

٦) ذره‌ی m تحت تاثیر یک نیروی مرکزی مطابق قانون دوم نیوتن

$$m\ddot{\vec{r}} = \hat{r}f(r)$$

در فضا حرکت می کند، نشان دهید که $\vec{r}\times\vec{v} = \vec{c}$ یک ثابت است.

ذره تحت تاثیر نیروهای مرکز در یک صفحه حرکت می‌کند. در اینجا از مختصات قطبی برای بررسی استفاده می‌کنیم، بطوریکه معادله دینامیکی بالا در مختصات قطبی بصورت $m\ddot{\vec{r}} = \hat{\rho}f(\rho)$ نمایش داده می‌شود. با استفاده از مسئله قبل $\ddot{\vec{r}} = \hat{\rho}(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^۲) + \hat{\phi}(۲\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})$ بنابراین

$$m\ddot{\vec{r}} = \hat{\rho}f(\rho) \Rightarrow \begin{cases} m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^۲) = f(\rho)\\ m(۲\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}) = ۰\end{cases}$$

اگر طرفین عبارت $m(۲\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}) = ۰$ را در یک ρ ضرب کنیم داریم

$$m(۲\rho\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho^۲\ddot{\phi}) = ۰ \Rightarrow \frac{d}{dt}(m\rho^۲\dot{\phi}) = ۰$$

عبارت بالا نشان می‌دهد که $m\rho^۲\dot{\phi}$ یک کمیت ثابت است. از طرفی دیگر اگر اندازه حرکت زاویه‌ای $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$ را بدست اوریم، داریم

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{r}\times\vec{p} = m\vec{r}\times\vec{v} = m(\rho\hat{\rho})\times(\dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi}) = m\rho\dot{\rho}(\hat{\rho}\times\hat{\rho}) + m\rho^۲\dot{\phi}(\hat{\rho}\times\hat{\phi})\\ &= m\rho^۲\dot{\phi}\hat{k}\end{aligned}$$

از مقایسه معادله بالا با ثابت حرکت $m\rho^۲\dot{\phi}$ نتیجه می شود که $\vec{L}$ ثابت حرکت است و $\frac{\vec{L}}{m} = \vec{r}\times\vec{v}$ نیز ثابت می‌باشد.

۷) اپراتورهای $\partial/\partial x$، $\partial/\partial y$ و $\partial/\partial z$ را در مختصات کروی بیان کنید

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial r} + \cos\theta\cos\phi\frac{۱}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\\
\frac{\partial}{\partial y} &= \sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial r} + \cos\theta\sin\phi\frac{۱}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\\
\frac{\partial}{\partial z} &= \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \sin\theta\frac{۱}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}
\end{aligned}$$

راهنمائی: همزمان $\vec{\nabla}_{xyz}$ را برابر با $\vec{\nabla}_{r\theta\phi}$ قرار دهید

در مختصات دکارتی داریم

$$\vec{\nabla}_{xyz}\psi = \hat{i}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial\psi}{\partial z}$$

در مختصات کروی داریم

$$\vec{\nabla}_{r\theta\phi}\psi = \hat{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \frac{\hat{\phi}}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}$$

در ادامه برای برابر قرار دادن عبارت بالا با شکل دکارتی آن باید بردارهای یکه که در مختصات کروی را در مختصات کروی بنویسیم،

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}_{r\theta\phi}\psi &= (\hat{i}\sin\theta\cos\phi + \hat{j}\sin\theta\sin\phi + \hat{k}\cos\theta)\frac{\partial\psi}{\partial r}\\
&+ \frac{۱}{r}(\hat{i}\cos\theta\cos\phi + \hat{j}\cos\theta\sin\phi - \hat{k}\sin\theta)\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\\
&+ \frac{۱}{r\sin\theta}(-\hat{i}\sin\phi + \hat{j}\cos\phi)\frac{\partial\psi}{\partial\phi}
\end{aligned}$$

که اگر آنها را برحسب بردارهای یکه دکارتی مرتب کنیم داریم

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}_{r\theta\phi}\psi &= \hat{i}\left(\sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial r} + \cos\theta\cos\phi\frac{۱}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\\
&+ \hat{j}\left(\sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial r} + \cos\theta\sin\phi\frac{۱}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\\
&+ \hat{k}\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \sin\theta\frac{۱}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)
\end{aligned}$$

اگر $\vec{\nabla}_{xyz}\psi = \vec{\nabla}_{r\theta\phi}\psi$ نتیجه اینکه

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial r} + \cos\theta\cos\phi\frac{۱}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\\
\frac{\partial}{\partial y} &= \sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial r} + \cos\theta\sin\phi\frac{۱}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\\
\frac{\partial}{\partial z} &= \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \sin\theta\frac{۱}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}
\end{aligned}$$

۸) از تمرین (۷) استفاده کنید و نشان دهید که

$$-i\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right)=-i\frac{\partial}{\partial\phi}$$

از نظر کوانتومی اندازه حرکت خطی یک اپراتور است که انرا بصورت $\vec{p}=-i\hbar\vec{\nabla}$ نشان می‌دهند در اینجا فرض کنید که $\hbar=۱$ پس $\vec{p}=-i\vec{\nabla}$. با این شرایط در مکانیک کوانتومی، اندازه حرکت زاویه‌ای $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$ نیز یک اپراتور است،

$$\vec{L}=-i\vec{r}\times\vec{\nabla}\Rightarrow\begin{cases}L_x=-i\left(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y}\right)\\ L_y=-i\left(z\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial z}\right)\\ L_z=-i\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right)\end{cases}$$

در اینجا قصد داریم نشان دهیم که

$$L_z=-i\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right)=-i\frac{\partial}{\partial\phi}$$

با استفاده از مسئله قبل داریم

$$\begin{aligned}L_z&=-i\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right)\\&=-ir\cos\phi\sin\theta\left(\sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial r}+\cos\theta\sin\phi\frac{۱}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\\&\quad+ir\sin\phi\sin\theta\left(\sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial r}+\cos\theta\cos\phi\frac{۱}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)=-i\frac{\partial}{\partial\phi}\end{aligned}$$

۹) از تمرین (۷) استفاده کنید و نشان دهید که

$$\begin{aligned}L_x+iL_y&=e^{i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\\L_x-iL_y&=-e^{-i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}-i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\end{aligned}$$

با استفاده از مسئله قبل و مسئله (۹) داریم

$$\begin{aligned}L_x&=-i\left(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y}\right)\\&=-ir\sin\phi\sin\theta\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\sin\theta\frac{۱}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+ir\cos\theta\left(\sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial r}+\cos\theta\sin\phi\frac{۱}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\\&=i\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta}+i\cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\end{aligned}$$

همچنین

$$
\begin{aligned}
L_y &= -i\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)\\
&= -ir\cos\theta\left(\sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial r} + \cos\theta\cos\phi\frac{۱}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right) + ir\sin\theta\cos\phi\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \sin\theta\frac{۱}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\\
&= -i\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}
\end{aligned}
$$

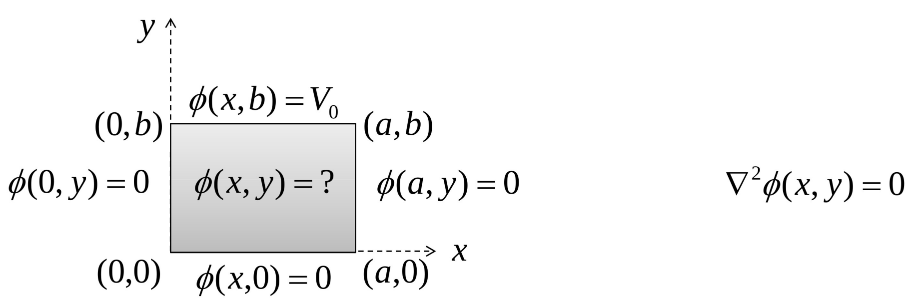
و

$$
\begin{aligned}
L_x + iL_y &= i\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi} + \cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\\
&= (\cos\phi + i\sin\phi)\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta(\cos\phi + i\sin\phi)\frac{\partial}{\partial\phi}\\
&= e^{i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)
\end{aligned}
$$

و همچنین

$$
\begin{aligned}
L_x - iL_y &= i\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi} - \cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\\
&= -(\cos\phi - i\sin\phi)\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta(\cos\phi - i\sin\phi)\frac{\partial}{\partial\phi}\\
&= -e^{-i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)
\end{aligned}
$$

۱۰) با استفاده از جداسازی متغییرها پتانسیل ϕ را برای هندسه و شرایط مرزی داده شده پیدا کنید وقتی معادله حاکم در مسئله $\nabla^۲\phi = ۰$ است.



با استفاده از روش جداسازی متغییرها در حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای خطی، اگر $\phi(x,y) = f_۱(x)f_۲(y)$ در اینصورت معادله $\nabla^۲\phi = ۰$ را می‌توان بصورت

$$
\begin{aligned}
&\nabla^۲\phi = ۰ \Rightarrow \frac{\partial^۲\phi}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲\phi}{\partial y^۲} = ۰\\
&f_۲(y)\frac{d^۲f_۱(x)}{dx^۲} + f_۱(x)\frac{d^۲f_۲(y)}{dy^۲} = ۰
\end{aligned}
$$

نوشت. اگر عبارت بالا را بر $f_۱(x)f_۲(y)$ تقسیم کنیم داریم

$$\frac{۱}{f_۱(x)}\frac{d^۲f_۱(x)}{dx^۲}+\frac{۱}{f_۲(y)}\frac{d^۲f_۲(y)}{dy^۲}=۰$$

با توجه به شرایط مرزی $\phi(x=۰,y)=۰$ و $\phi(x=a,y)=۰$ یا $f_۱(x=۰)=۰$ و $f_۱(x=a)=۰$ اولین جمله عبارت بالا که فقط مربوط به مختصه x است، $\frac{۱}{f_۱(x)}\frac{d^۲f_۱(x)}{dx^۲}$ را برابر با $-\alpha^۲$ قرار می‌دهیم که α یک کمیت ثابت است

$$\frac{۱}{f_۱(x)}\frac{d^۲f_۱(x)}{dx^۲}=-\alpha^۲\Rightarrow\frac{d^۲f_۱(x)}{dx^۲}+\alpha^۲f_۱(x)=۰\Rightarrow f_۱(x)=A_۱\sin\alpha x+A_۲\cos\alpha x$$

با اعمال شرایط مرزی

$$f_۱(x=۰)=۰\Rightarrow A_۲=۰\Rightarrow f_۱(x)=A_۱\sin\alpha x$$
$$f_۱(x=a)=۰\Rightarrow\sin\alpha a=۰\Rightarrow\alpha a=m\pi\Rightarrow\alpha=\frac{m\pi}{a}$$

بدین‌ترتیب $f_۱(x)\sim\sin\frac{m\pi x}{a}$ که m یک عدد صحیح می‌باشد.

با انتخابی که برای عبارت $\frac{۱}{f_۱(x)}\frac{d^۲f_۱(x)}{dx^۲}$ داشتیم نتیجه می‌شود که در جهت y

$$\frac{۱}{f_۲(y)}\frac{d^۲f_۲(y)}{dy^۲}=\alpha^۲\Rightarrow\frac{d^۲f_۲(y)}{dy^۲}-\alpha^۲f_۲(y)=۰\Rightarrow f_۲(y)=B_۱\sinh\alpha y+B_۲\cosh\alpha y$$

یا

$$f_۲(y)=B_۱\sinh\frac{m\pi y}{a}+B_۲\cosh\frac{m\pi y}{a}$$

با اعمال شرط مرزی در $y=۰$

$$f_۲(y=۰)=۰\Rightarrow B_۲=۰\Rightarrow f_۲(y)=B_۱\sinh\frac{m\pi y}{a}$$

بدین‌ترتیب $f_۲(x)\sim\sinh\frac{m\pi y}{a}$. لازم به اشاره است که شرط مرزی $f_۲(y=b)=V_۰$ را بزودی اعمال خواهیم کرد.

جواب نهایی برابر حاصلضرب $f_۱$ و $f_۲$ پس

$$\phi(x,y)\sim\sin\frac{m\pi x}{a}\sinh\frac{m\pi y}{a}$$

در معادله بالا، جواب به انتخاب m که یک عدد صحیح است بستگی دارد. بنابراین می‌توان عبارت بالا را بصورت

$$\phi_m(x,y)=A_m\sin\frac{m\pi x}{a}\sinh\frac{m\pi y}{a}$$

نوشت ولی قطعا جواب باید مستقل از m باشد برای این منظور از اصل برهم‌نهی استفاده می‌کنیم

$$\phi(x,y)=\sum_m\phi_m(x,y)=\sum_m A_m\sin\frac{m\pi x}{a}\sinh\frac{m\pi y}{a}$$

در ادامه سعی می‌کنیم ثابت A_m را با توجه به شرط مرزی $\phi(x,y=b)=V_۰$ بدست آوریم. با اعمال شرط مرزی

$$\phi(x, y=b) = V_0 = \sum_m A_m \sin\frac{m\pi x}{a} \sinh\frac{m\pi b}{a}$$

برای بدست آوردن A_m روی درجه آزادی x با انتگرال‌گیری جمع می‌زنیم، برای این منظور در طرفین عبارت بالا $\sin\frac{m'\pi x}{a}$ را ضرب می‌کنیم.

$$V_0 \sin\frac{m'\pi x}{a} = \sum_m A_m \sinh\frac{m\pi b}{a} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{m'\pi x}{a}$$

و با انتگرالگیری از طرفین نسبت به x روی بازه 0 تا a

$$V_0 \int_0^a \sin\frac{m'\pi x}{a} dx = \sum_m A_m \sinh\frac{m\pi b}{a} \int_0^a \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{m'\pi x}{a} dx$$

داریم

$$\frac{V_0 a}{m'\pi}\left(-\cos\frac{m'\pi x}{a}\right)_0^a = \sum_m A_m \sinh\frac{m\pi b}{a}\left(\frac{a}{2}\delta_{mm'}\right)$$

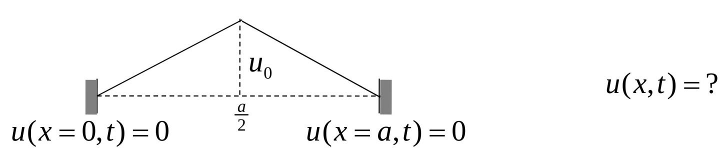
و

$$A_{m'} = \frac{2V_0}{m'\pi \sinh\frac{m'\pi b}{a}}(1-(-1)^{m'})$$

جواب نهایی برابر

$$\phi(x,y) = \frac{2V_0}{\pi}\sum_m \frac{(1-(-1)^m)}{m\sinh\frac{m\pi b}{a}} \sinh\frac{m\pi y}{a} \sin\frac{m\pi x}{a}$$

۱۱) با استفاده از جداسازی متغییرها معادله انتشار موج $u(x,t)$ در یک بعد برای هندسه و شرایط اولیه $u(x=0,t)$ داده شده پیدا کنید وقتی معادله حاکم در مسئله $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ است.



$$u(x,t=0) = \begin{cases} \frac{2u_0}{a}x, & 0 \le x \le \frac{a}{2} \\ -\frac{2u_0}{a}(x-a), & \frac{a}{2} \le x \le a \end{cases} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

مانند مسئله قبل جواب را می‌توان حاصلضرب تابعی از x(مانند $f_1(x)$) و تابعی از t(مانند $f_2(t)$) در نظر گرفت

$$u(x,y) = f_1(x) f_2(t)$$

که با جداسازی متغییرها معادله موج بصورت

$$f_1(x)\frac{d^2 f_2(t)}{dt^2} = c^2 f_2(t)\frac{d^2 f_1(x)}{dx^2}$$

تبدیل می‌شود. اگر معادله بالا را بر $f_1(x)f_2(t)$ تقسیم کنیم

$$\frac{1}{f_2(t)}\frac{d^2 f_2(t)}{dt^2} = c^2\frac{1}{f_1(x)}\frac{d^2 f_1(x)}{dx^2} \tag{1}$$

با توجه به شرایط مرزی $u(x=0,t)=0$ و $u(x=a,t)=0$ یا $f_1(x=0)=0$ و $f_1(x=a)=0$ عبارت $\frac{1}{f_1(x)}\frac{d^2 f_1(x)}{dx^2}$ را برابر $-k^2$ انتخاب می‌کنیم که در این صورت $f_1(x)=A_1\sin kx + A_2\cos kx$. با اعمال شرایط مرزی

$$f_1(x=0)=0 \Rightarrow A_2=0 \Rightarrow f_1(x)=A_1\sin kx$$
$$f_1(x=a)=0 \Rightarrow \sin ka=0 \Rightarrow \alpha a=m\pi \Rightarrow k=\frac{m\pi}{a}$$

بدین‌ترتیب $f_1(x)\sim\sin\frac{m\pi x}{a}$ که m یک عدد صحیح است

با انتخابی که برای عبارت $\frac{1}{f_1(x)}\frac{d^2 f_1(x)}{dx^2}$ داشتیم، برای t عبارت $\frac{1}{f_2(t)}\frac{d^2 f_2(t)}{dt^2}$ باید برابر با کمیتی مانند $-\omega^2$ قرار دهیم.

$$\frac{1}{f_2(t)}\frac{d^2 f_2(t)}{dt^2} = -\omega^2 \Rightarrow \frac{d^2 f_2(t)}{dt^2}+\omega^2 f_2(t)=0 \Rightarrow f_2(t)=B_1\sin\omega t + B_2\cos\omega t$$

اگر عبارتهای $\frac{1}{f_2(t)}\frac{d^2 f_2(t)}{dt^2}=-\omega^2$ و $\frac{1}{f_1(x)}\frac{d^2 f_1(x)}{dx^2}=-k^2$ را در داخل معادله (۱) قرار دهیم، داریم

$$-\omega^2=-c^2k^2 \Rightarrow \omega=ck$$

و چون $k=\frac{m\pi}{a}$ بنابراین

$$\omega_m=ck_m \Rightarrow \omega_m=\frac{m\pi c}{a}$$

بدین‌ترتیب $f_2(t)=C_m\sin\omega_m t + D_m\cos\omega_m t$

جواب نهایی برابر

$$u(x,t)=\sum_m (C_m\sin\omega_m t + D_m\cos\omega_m t)\sin\frac{m\pi x}{a}$$

که ثوابت C_m و D_m را قصد داریم با استفاده از شرایط اولیه مسئله بدست آوریم. شکل طناب در لحظه‌ی $t=0$ بصورت

$$u(x,t=0)=\begin{cases} \frac{2u_0}{a}x, & 0\le x\le\frac{a}{2} \\ -\frac{2u_0}{a}(x-a), & \frac{a}{2}\le x\le a \end{cases}$$

است و سرعت اولیه‌ی آن نیز برابر صفر است

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0}=0$$

$$u(x,t=۰)=\sum_m D_m \sin\frac{m\pi x}{a}$$

مانند مسئله قبل برای پیدا کردن D_m روی x انتگرالگیری می‌کنیم.

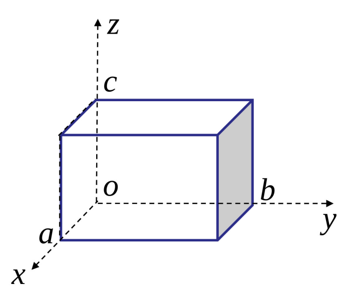
$$\int_۰^a u(x,t=۰)\sin\frac{m'\pi x}{a}dx=\sum_m D_m\int_۰^a \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{m'\pi x}{a}dx$$
$$\frac{۲u_۰}{a}\int_۰^{\frac{a}{۲}} x\sin\frac{m'\pi x}{a}dx-\frac{۲u_۰}{a}\int_{\frac{a}{۲}}^a (x-a)\sin\frac{m'\pi x}{a}dx=\sum_m D_m\left(\frac{a}{۲}\delta_{mm'}\right)$$
$$\frac{۸u_۰}{\pi^۲ m'^۲}\sin\frac{m'\pi}{۲}=D_{m'}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=۰}=\left(\sum_m \omega_m(C_m\cos\omega_m t-D_m\sin\omega_m t)\sin\frac{m\pi x}{a}\right)_{t=۰}=\sum_m \omega_m C_m\sin\frac{m\pi x}{a}=۰$$

نتیجه اینکه $C_m=۰$ بنابراین

$$u(x,t)=\frac{۸u_۰}{\pi^۲}\sum_m\frac{\sin\frac{m'\pi}{۲}}{m'^۲}\cos\omega_m t\sin\frac{m\pi x}{a}$$

۱۲) یک ذره (کوانتومی) محبوس در جعبه‌ای به شکل مکعب مستطیل است. این ذره توسط تابع موج ψ توصیف می‌شود که معادله شرودینگر $-\frac{\hbar^۲}{۲m}\frac{\partial^۲\psi}{\partial x^۲}=E\psi$ آنرا برآورده می‌کند. تابع موج روی هر وجه مکعب برابر صفر است. با توجه به جداسازی متغییرها این شرایط مرزی قیوردی را برای انرژی تحمیل می‌کند که انرژی همواره مقادیر مشخصی را داشته باشد.



$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi=E\psi$$
$$\begin{cases}\psi(x=0,y,z)=\psi(x=a,y,z)=0\\ \psi(x,y=0,z)=\psi(x,y=b,z)=0\\ \psi(x,y,z=0)=\psi(x,y,z=c)=0\end{cases}$$

اگر تابع موج ψ را با حاصلضرب $f_۱(x)f_۲(y)f_۳(z)$ عوض کنیم معادله شرودینگر $-\frac{\hbar^۲}{۲m}\frac{\partial^۲\psi}{\partial x^۲}=E\psi$ به شکل زیر تبدیل می‌شود

$$-\frac{\hbar^۲}{۲m}\frac{\partial^۲\psi}{\partial x^۲}=E\psi$$
$$-\frac{\hbar^۲}{۲m}\left(f_۲(y)f_۳(z)\frac{d^۲f_۱(x)}{dx^۲}+f_۱(x)f_۳(z)\frac{d^۲f_۲(y)}{dy^۲}+f_۱(x)f_۲(y)\frac{d^۲f_۳(z)}{dz^۲}\right)=Ef_۱(x)f_۲(y)f_۳(z)$$

اگر طرفین عبارت بالا را بر $f_۱(x)f_۲(y)f_۳(z)$ تقسیم کنیم داریم

$$-\frac{\hbar^۲}{۲m}\left(\frac{۱}{f_۱(x)}\frac{d^۲f_۱(x)}{dx^۲}+\frac{۱}{f_۲(y)}\frac{d^۲f_۲(y)}{dy^۲}+\frac{۱}{f_۳(z)}\frac{d^۲f_۳(z)}{dz^۲}\right)=E \tag{۲}$$

با توجه به شرایط مرزی $\psi(x=۰,y,z)=۰$ و $\psi(x=a,y,z)=۰$ یا $f_۱(x=۰)=۰$ و $f_۱(x=a)=۰$ جمله $\frac{۱}{f_۱(x)}\frac{d^۲f_۱(x)}{dx^۲}$ که تابعی از x است را برابر با ثابت $-\alpha^۲$ قرار می دهیم.

$$\frac{۱}{f_۱(x)}\frac{d^۲f_۱(x)}{dx^۲}=-\alpha^۲\Rightarrow\frac{d^۲f_۱(x)}{dx^۲}+\alpha^۲f_۱(x)=۰\Rightarrow f_۱(x)=A_۱\sin\alpha x+A_۲\cos\alpha x$$

با اعمال شرایط مرزی

$$f_۱(x=۰)=۰\Rightarrow A_۲=۰\Rightarrow f_۱(x)=A_۱\sin\alpha x$$
$$f_۱(x=a)=۰\Rightarrow\sin\alpha a=۰\Rightarrow\alpha a=l\pi\Rightarrow\alpha=\frac{l\pi}{a}$$

بدین‌ترتیب $f_۱(x)\sim\sin\frac{l\pi x}{a}$ که l یک عدد صحیح می‌باشد.

با توجه به شرایط مرزی $\psi(x,y=۰,z)=۰$ و $\psi(x,y=b,z)=۰$ یا $f_۲(y=۰)=۰$ و $f_۲(y=b)=۰$ جمله $\frac{۱}{f_۲(y)}\frac{d^۲f_۲(y)}{dy^۲}$ که تابعی از y است را برابر با ثابت $-\beta^۲$ قرار می دهیم.

$$\frac{۱}{f_۲(y)}\frac{d^۲f_۲(y)}{dy^۲}=-\beta^۲\Rightarrow\frac{d^۲f_۲(y)}{dy^۲}+\beta^۲f_۲(y)=۰\Rightarrow f_۲(y)=B_۱\sin\beta y+B_۲\cos\beta y$$

با اعمال شرایط مرزی

$$f_۲(y=۰)=۰\Rightarrow B_۲=۰\Rightarrow f_۲(y)=B_۱\sin\beta x$$
$$f_۲(y=b)=۰\Rightarrow\sin\beta b=۰\Rightarrow\beta b=m\pi\Rightarrow\beta=\frac{m\pi}{b}$$

بدین‌ترتیب $f_۲(y)\sim\sin\frac{m\pi y}{b}$ که m یک عدد صحیح می‌باشد.

با توجه به شرایط مرزی $\psi(x,y,z=۰)=۰$ و $\psi(x,y,z=c)=۰$ یا $f_۳(z=۰)=۰$ و $f_۳(z=c)=۰$ جمله $\frac{۱}{f_۳(z)}\frac{d^۲f_۳(z)}{dz^۲}$ که تابعی از z است را برابر با ثابت $-\gamma^۲$ قرار می دهیم.

$$\frac{۱}{f_۳(z)}\frac{d^۲f_۳(z)}{dz^۲}=-\gamma^۲\Rightarrow\frac{d^۲f_۳(z)}{dz^۲}+\gamma^۲f_۳(z)=۰\Rightarrow f_۳(z)=C_۱\sin\gamma z+C_۲\cos\gamma z$$

با اعمال شرایط مرزی

$$f_۳(z=۰)=۰\Rightarrow C_۲=۰\Rightarrow f_۳(z)=C_۱\sin\gamma x$$
$$f_۲(z=c)=۰\Rightarrow\sin\gamma c=۰\Rightarrow\gamma c=n\pi\Rightarrow\gamma=\frac{n\pi}{c}$$

بدین‌ترتیب $f_۳(z)\sim\sin\frac{n\pi z}{c}$ که n یک عدد صحیح می‌باشد.

بنابراین تابع موج نهایی برابر است با

$$\psi(x,y,z)=\sum_{lmn} A_{lmn}\sin\frac{l\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\sin\frac{n\pi z}{c}$$

با توجه به انتخابهای $\frac{1}{f_1(x)}\frac{d^2f_1(x)}{dx^2}=-\alpha^2$، $\frac{1}{f_2(y)}\frac{d^2f_2(y)}{dy^2}=-\beta^2$ و $\frac{1}{f_3(z)}\frac{d^2f_3(z)}{dz^2}=-\gamma^2$ و قرار دادن ان در داخل معادله‌ی (۲) داریم

$$E_{lmn}=\frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\left(\left(\frac{l}{a}\right)^2+\left(\frac{m}{b}\right)^2+\left(\frac{n}{c}\right)^2\right)$$

عبارت بالا نشان می‌دهد انرژی گسسته و در lmnهای خاص مقدار دارد.
(نکته: در مکانیک کوانتومی $|A_{lmn}|^2$ میزان احتمال حضور ذره در حالتی با انرژی E_{lmn} رانشان می‌دهد.)

مظفّری